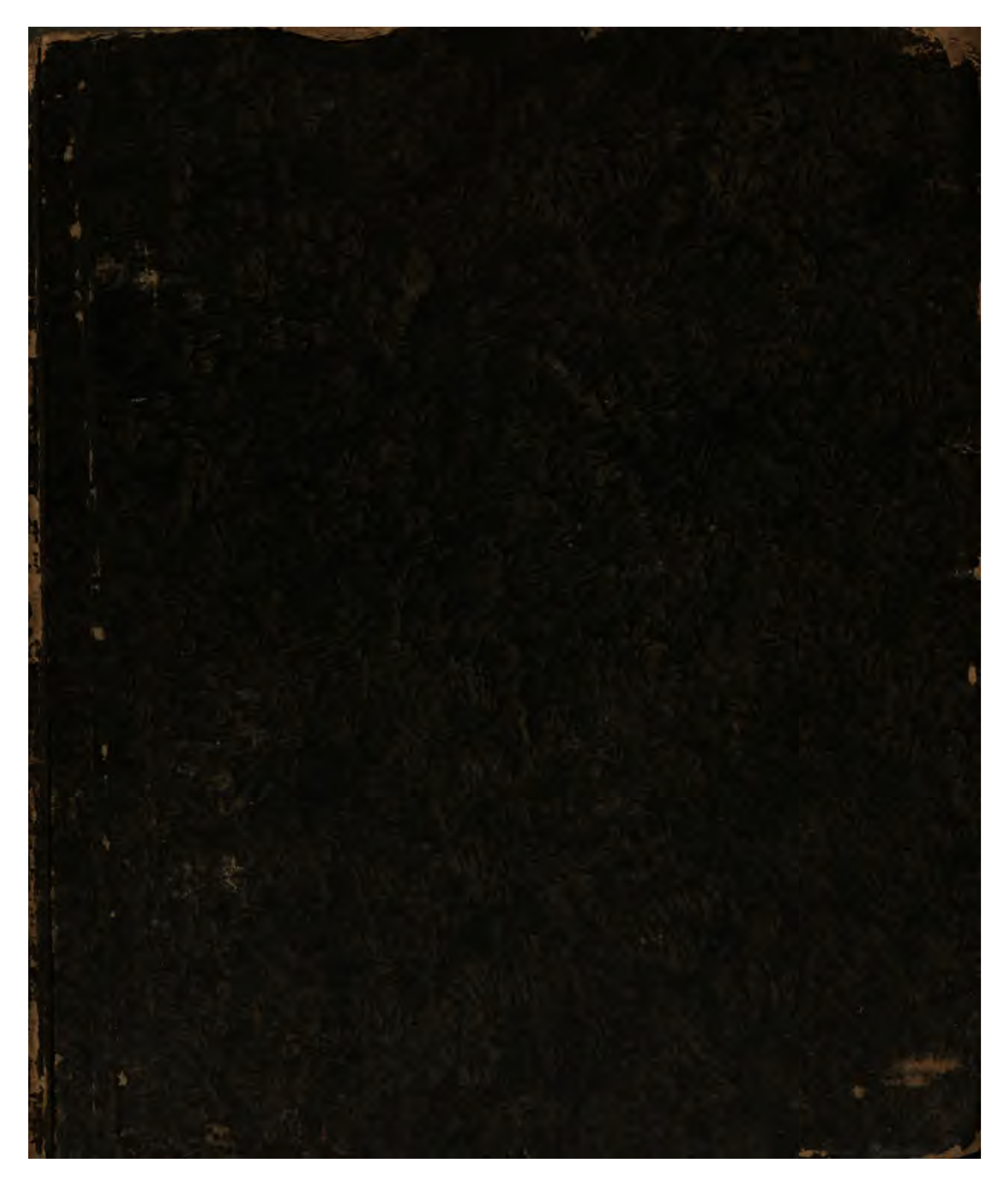
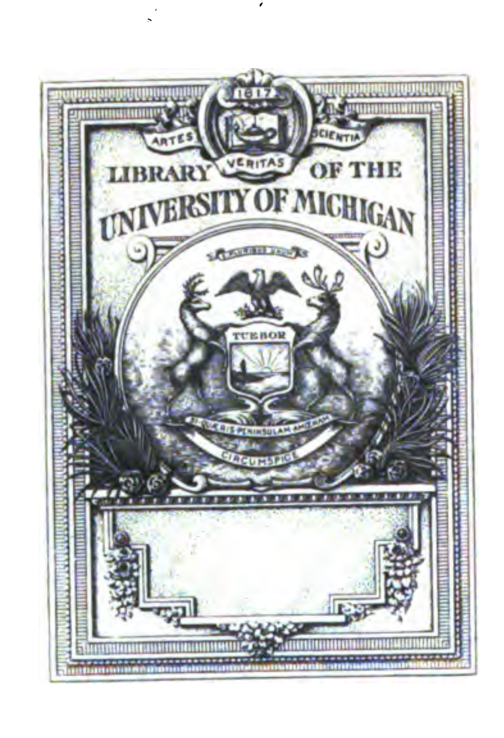
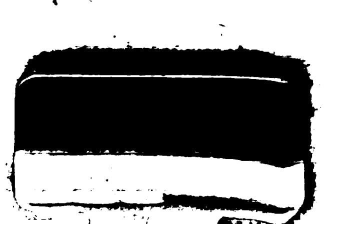



1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Grundlehren der höhern Analysis

von

D. J. A. Eytelwein,

Königl. Preuß. Ober-Landes-Baudirektor; Ritter des rothen Adler- und des k. niederländ. Löwenordens; ordentlichem Mitgliede der Akademie der Wissenschaften und des Senats der Akademie der [illegible]e zu Berlin, des National-Instituts der Wissenschaften und Künste zu Amsterdam, der Gesellschaft [illegible]xperimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurt a. d. O., der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg, Leipzig und Potsdam, und der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur Mitgliede.

Erster Band.

Berlin, 1824.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

Vorrede.

Aus den verschiedenen Vorträgen über einzelne Gegenstände der höhern Analysis, über welche ich früher öffentliche und Privatvorlesungen gehalten habe, ist eine Zusammenstellung der Grundlehren dieser Wissenschaft, besonders mit Rücksicht auf die Lehren der vorzüglichsten Reihen entstanden, deren Herausgabe, nach dem Wunsche mehrerer meiner gelehrten Freunde, ich nicht länger zurück halten wollte, und von der ich wünsche, daß durch sie der Zwischenraum, welcher gewöhnlich beim Uebergange von der gemeinen Algebra zur höhern Analysis entsteht, in dem nöthigen Zusammenhange und zureichend vollständig, wie es das Bedürfniß der Wissenschaft erfordert, ergänzt werde, um auf diesen Grundlehren ohne Hindernisse die weitere Ausführung der höhern Analysis fort zu führen. Es ist hiebei die gewöhnliche Algebra als bekannt vorausgesetzt, und nur einige Lehren derselben sind, zur leichtern Hinweisung bei vorkommenden Entwickelungen, aufgenommen worden.

Ob der Uebergang zur Differenzialrechnung durch Vermeidung der mystischen Begriffe vom unendlich Kleinen mir gelungen ist, kann nur der Beurtheilung der Kenner überlassen bleiben. Mein Bestreben war, die Begründung dieser Rechnungsart möglichst zu vereinfachen und von den hinlänglich bekannten Vorwürfen zu befreien, auch habe ich um so weniger Anstand genommen, hier diese Darstellung zu wählen, da schon viele Jahre verflossen sind, seit ich auf diese Weise die Differenzialrechnung bei meinen Vorträgen entwickelte, ohne bei der weitern Ausführung derselben auf Hindernisse zu treffen. Es ist zwar mehrmal angeführt worden, daß die Einführung des unendlich Kleinen unter dem Nahmen der Gränzverhältnisse, Differenzialverhältnisse, Verschwindungsquotienten, u. s. w. die Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf höhere Geometrie und Mechanik erleichtere und vereinfache; allein eben dies

wird in aller Strenge und Einfachheit mittelst des §. 570. entwickelten Satzes erreicht, ohne daß es nöthig war, bei der Begründung dieser Rechnungsart, die Differenziale als verschwindende Größen einzuführen.

Wegen der übrigen hier abgehandelten Gegenstände habe ich nichts weiter zu bemerken, als daß es nöthig schien, die vorzüglichsten Lehren durch Beispiele zu erläutern und dadurch die Anwendung derselben zu erleichtern, auch die Bezeichnung zu vereinfachen und, so weit es möglich war, gleichförmig durch zu führen. Wie weit mir dies gelungen ist, unterwerfe ich der kunstgerechten Beurtheilung, und hoffe zugleich Entschuldigung zu finden, daß die Lehre von den Combinationen nur erst im zweiten Bande ihre Stellung fand, weil sich hier der ausgebreitete Nutzen und die Unentbehrlichkeit derselben bei den wichtigsten Entwickelungen sogleich darstellte.

Die ungeachtet aller angewandten Sorgfalt dennoch stehen gebliebenen Druckfehler, bittet man gefälligst nach dem beigefügten Verzeichnisse zu verbessern.

Berlin, im December 1823.

J. A. E.

Erklärung der angenommenen Zeichen.

$m_r = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\;\ldots\ldots\;r}$. §. 20.

$lg\,a = log.\,nat.\,a.$ §. 165.

$Lg\,a = log.\,brigg.\,a.$ §. 165.

$\pi = 3,141\;592\;653\;589\;793\ldots\ldots$ §. 146.

$e = 2,718\;281\;828\;459\;045\ldots\ldots$ §. 162.

$a^{n;h} = a(a+h)(a+2h)(a+3h)\ldots\ldots(a+nh-h)$. §. 511.

$n! = 1.2.3.4.5.6\ldots\ldots\ldots n$ §. 511.

∂y die Ableitung oder das Differenzial von y. §. 178.

$\partial^{-1} y$ die Zurückleitung oder das Integral von y. §. 213.

$\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots + A_n x^n$. §. 351.

${}^r\!\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x_3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots + A_r x^r$. §. 352.

${}^1\!\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots + A_n x^n + \ldots$ *in infin.* §. 355.

$\Delta^r y$ die $r$te Differenz von y. §. 536.

$\Sigma y = \Delta^{-1} y$ die Zurückleitung oder das Differenzintegral von y. §. 639.

B_n die $n$te bernoullische Zahl. §. 440.

$\Gamma x = \frac{\infty}{2} + \frac{B_1}{2} x^2 - \frac{B_2}{4} x^4 + \frac{B_3}{6} x^6 - \frac{B_4}{8} x^8 + \ldots\ldots$ §. 600.

$\Lambda x = \frac{B_1}{1.2} x - \frac{B_2}{3.4} x^2 + \frac{B_3}{5.6} x^3 - \frac{B_4}{7.8} x^4 + \frac{B_5}{9.10} x^6 - \ldots\ldots$ §. 614.

$\underset{(abcd\ldots)}{V_n}$ Versetzung der Elemente $a, b, c, \ldots$ ohne Wiederholung, wenn in jede Zusammenstellung n Elemente kommen. §. 727.

NV_n Anzahl der Zusammenstellungen, der Versetzung V_n. §. 729.

V'_n Versetzung mit Wiederholungen. §. 730.

NV'_n Anzahl der Zusammenstellungen, der Versetzung V'_n. §. 730.

${}^\sigma V'_n$ Versetzung mit Wiederholung, zur bestimmten Summe σ in jeder Zusammenstellung. §. 732.

C_n Verbindung ohne Wiederholung und NC_n Anzahl der Zusammenstellungen dieser Verbindung. §. 741.

C'_n Verbindung mit Wiederholungen und NC'_n Anzahl der Zusammenstellungen dieser Verbindung. §. 741.

μC_n Verbindung ohne Wiederholung, mit Vorsetzung der Versetzungszahl vor jede Zusammenstellung. §. 748.

$\mu C'_n$ Verbindung mit Wiederholungen, mit Vorsetzung der Versetzungszahl vor jede Zusammenstellung. §. 748.

${}^\sigma C'_n$ Verbindung mit Wiederholungen zur bestimmten Summe σ in jeder Zusammenstellung. §. 750.

$\mu\,{}^\sigma C'_n$ Verbindung mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, mit Vorsetzung der Versetzungszahlen. §. 758.

$p^m k_n$ der $n+1$ste Koeffizient, wenn das Polynom p auf die $m$te Potenz erhoben wird. §. 790.

Inhalt
des ersten Bandes.

IV. Kapitel. Von den höhern Gleichungen.

V. Kapitel. Einige allgemeine Ausdrücke für Kreisfunkzionen, nebst dem Cotesischen Lehrsatze.

VI. Kapitel. Von den Logarithmen.

VII. Kapitel. Von der taylorschen Reihe und den abgeleiteten Funkzionen.

Wenn

XI. Kapitel. Von den wiederkehrenden Reihen.

Inhalt
des zweiten Bandes.

XIV. Kapitel. Von den Faktorenfolgen mit gebrochenen Exponenten.

XV. Kapitel. Zurückleitung der einfachen Differenzgleichungen.

XVI. Kapitel. Von der Abnahme oder Convergenz der unendlichen Reihen.

III. Von den Involutionen.

IV. Anwendung auf einige besondere Fälle.

XIX. Kapitel. Von den Potenzen und Produkten der Reihen.

XX. Kapitel. Von den Koeffizientengleichungen der Polynomien und einigen damit zusammenhängenden Entwickelungen.

XXI. Kapitel. Zurückleitung der zusammengesetzten Differenzgleichungen.

XXII. Kapitel. Von der Verwandlung der Reihen.

Wenn

Grund=

Grundlehren

der

höhern Analysis.

Erster Band.

Erstes Kapitel.

Von den analytischen Funkzionen überhaupt.

§. 1.

Größen, welche so von einander abhängen, daß mit der Veränderung einer derselben, auch die übrigen eine Veränderung erleiden, heißen **Funkzionen** von einander. So sind bei den krummen Linien, die Abscissen und Ordinaten; beim freien Falle der Körper, die verflossenen Zeiten und die Räume welche in diesen Zeiten durchlaufen sind, Funkzionen von einander.

Durch Gleichungen läßt sich die Abhängigkeit veränderlicher Größen von einander ausdrücken. Hätte man die beiden veränderlichen Größen x und y und für dieselben die Gleichung $y = ax + \sqrt{(a^2 x^2 - bx)}$; so ist dadurch die Art bestimmt, wie y von x abhängt, und jede Veränderung die x erleidet, wird eine Veränderung von y zur Folge haben. Wollte man ausdrücken wie umgekehrt x von y abhängt, so darf man nur aus der vorstehenden Gleichung x entwickeln; dies gibt $x = \frac{y^2}{2ay - b}$, wo alsdann jede Veränderung die y erleidet, eine Veränderung von x zur Folge hat.

Will man ganz allgemein anzeigen, daß y eine Funkzion von x ist, so pflegt man dies dadurch auszudrücken, daß man vor x den Buchstab f oder F, Γ, φ, ψ, ... setzt; also $y = fx$, wo aber f oder F, Γ, φ, ψ, ... keine Factoren, sondern nur Zeichen sind.

Ein jeder Ausdruck in welchem veränderliche Größen vorkommen, ist daher eine Funkzion dieser veränderlichen Größen. So ist $ax + \sqrt{(bx - x^2)}$ eine Funkzion von x und man kann dieselbe auch so bezeichnen

$$fx = ax + \sqrt{(bx - x^2)}.$$

Eine Funkzion mehrerer veränderlicher Größen, x, y oder x, y, z, wird durch $f(x; y)$ oder $f(x; y; z)$ u. s. w. bezeichnet. So wäre

$$\frac{ax + y^2}{bc - xy} = f(x; y).$$

Die **Analysis** hat zum Endzwecke, die aus der Veränderlichkeit der Größen entspringenden Eigenschaften der Funkzionen zu entwickeln. Man theilt daher die in der Analysis vorkommende Größen, in beständige, unveränderliche oder constante, und in unbeständige, veränderliche oder va=

riable. Von der Analysis pflegt man die **Algebra** zu unterscheiden, weil diese sich nur mit bekannten oder gegebenen, und unbekannten oder gesuchten Größen beschäftigt. So bestimmt aber auch diese Grenzen zwischen Algebra und Analysis zu seyn scheinen, so müssen doch mehrere der wichtigsten Lehren der Algebra dem Vortrage der Analysis vorbehalten werden, und man hat nur alsdann darauf Rücksicht zu nehmen, ob veränderliche oder unbekannte Größen Gegenstände der Rechnung sind. Dieser Unterschied ist um so mehr zu bemerken, da die unbekannten Größen der Algebra, und die veränderlichen Größen der Analysis, gewöhnlich auf einerlei Art, durch die Endbuchstaben des Alphabets bezeichnet werden.

Den Unterschied zwischen unbekannten und veränderlichen Größen zu übersehen, bemerke man, daß die Art und Weise wie Größen von einander abhängen sollen, durch Gleichungen ausgedrückt wird. Wäre nun die Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben und zugleich bestimmt, daß A, B, C beständige Größen sind, welche einen gegebenen Werth haben, so kann man fragen: welche Werthe die **unbekannte** Größe x erhalten muß, daß die Bedingungen der Gleichung erfüllt werden, d. h. daß die Summe der Glieder im ersten Theile der Gleichung oder auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, $= 0$ werde. Hier hat offenbar die unbekannte Größe x nur die beiden Werthe

$$x = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{B}\right)} \text{ und } x = -\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{B}\right)} \; ^{*)}$$

welche den Bedingungen der gegebenen Gleichung genügen. Giebt man alsdann x irgend einen andern Werth, so wird die Bedingung der Gleichung nicht erfüllt, und es entsteht eine neue Gleichung, deren zweiter Theil nicht $= 0$, sondern irgend eine bestimmte Größe ist.

Wäre hingegen eben diese Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ unter der Voraussetzung gegeben, daß x eine **veränderliche** Größe seyn soll, also x jeden möglichen Werth annehmen kann und dennoch der zweite Theil der Gleichung $= 0$ werden soll, so hängt nothwendig die Beschaffenheit der Größen A, B, C von dieser Eigenschaft ab, und weil die Gleichung für jeden Werth von x gelten muß, so kann man auch in derselben $x = 0$ setzen, wodurch man $C = 0$ erhält, welches nicht der Fall seyn kann, wenn x eine unbekannte Größe ist.

§. 2.

Von den vorkommenden Funkzionen kann man bemerken: **transcendente Funkzionen** (*Functiones transcendentes*), welche außer andern Größen, auch trigonometrische Ausdrücke als Sinus, Kosinus rc., oder Kreisbogen, Logarithmen oder veränderliche Exponenten, wie a^x, enthalten. **Algebraische Funkzionen** (*algebraicae*) enthalten keine dieser Ausdrücke.

Eine **entwickelte** (*explicita*) Funkzion ist eine solche, in welcher eine von den veränderlichen Größen, von den übrigen gänzlich abgesondert ist und nur allein vorkommt.

Z. B. $y = a + bx^3 - x^7$.

---

*) Die Auflösung der quadratischen Gleichungen wird hier als bekannt vorausgesetzt.

Unentwickelte (*implicitae*) Funkzionen sind solche, in welchen die unbekannten Größen von einander nicht abgesondert sind.

Z. B. $ax^4 + by^3 = cxy$ oder auch $o = f(x; y)$.

Eine **rationale** Funkzion ist diejenige, in welcher die veränderliche Größe keine gebrochene Exponenten hat, oder unter einem Wurzelzeichen vorkommt, sonst heißt sie **irrational**. So ist $\frac{a + bx^2}{cx - x^2}$ eine rationale Funkzion von x; dagegen ist $\frac{ax + by^{\frac{1}{2}}}{c + x}$ eine irrationale Funkzion von y.

Eine Funkzion heißt eine **imaginäre**, wenn in ihr Ausdrücke vorkommen, welche den imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ enthalten; alle andere Funkzionen heißen **reelle**.

Symmetrische Funkzionen heißen diejenigen, in welchen die Größen so mit einander verbunden sind, daß keine Veränderung im Werthe der Funkzion vorgeht, man mag die Größen unter einander vertauschen wie man will.

Für die Größen x und y sind

$$x^n + y^n;\ \sqrt{x} + \sqrt{y};\ xy + \sin x + \sin y;\ \frac{x^n y^m + x^m y^n}{\cos x + \cos y}$$

und für die Größen x, y, z

$$x^n + y^n + z^n;\ x^n y^m + x^n z^m + y^m z^n + x^m y^n + x^m z^n + y^n z^m;$$

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x^2yz + xy^2z + xyz^2};\ \frac{(xy + xz + yz)\,xyz}{\sqrt{(xyz - x - y - z)}};\ \text{u. s. w.}$$

symmetrische Funkzionen.

§. 3.

Wenn eine Funkzion keinen Nenner hat, oder in dem Nenner derselben die veränderliche Größe nicht enthalten ist, so heißt sie eine **ganze Funkzion** (*integra*). So sind $a + bx + cx\sqrt{x}$ oder $\frac{a^2 + x^2}{b + c}$, ganze Funkzionen von x.

Enthält aber der Nenner einer Funkzion die veränderliche Größe, oder kommen in derselben negative Exponenten der veränderlichen Größe vor, so ist sie eine **gebrochene Funkzion** (*fracta*),

z. B. $\frac{a + x}{b - x};\ a + bx + cx^{-1}$.

Eine **echte** gebrochene Funkzion (*propria seu genuina*) ist diejenige, in welcher der höchste Exponent der veränderlichen Größe im Zähler, weniger Abmessungen als im Nenner hat.

Z. B. $\frac{a + x}{cx - x^2}$.

Sind diese Abmessungen im Zähler und Nenner gleich, oder im Zähler größer als im Nenner, so ist die Funkzion eine **unechte** (*impropria*) gebrochene.

Z. B. $\frac{a + x}{b + x};\ \frac{a + bx + cx^2}{d + x}$.

Aehnliche Funkzionen sind solche, in welchen nur die veränderlichen Größen oder die besondern Werthe, welche man denselben beilegt, von einander verschieden sind, dagegen bleiben die beständigen Größen in solchen Funkzionen, auf einerlei Weise mit den veränderlichen Größen verbunden. Es bedeuten daher $\frac{ax - x^3}{b + x}$ und $\frac{ay - y^3}{b + y}$ ähnliche Funkzion von x und von y; sie erhal-

ten alsdann auch einerlei Funkzionszeichen, also wenn man $fx = \frac{a^2 x - x^3}{b + x}$ setzt, so ist $fy = \frac{a^2 y - y^3}{b + y}$.

Ueberhaupt ist zu bemerken, daß, wenn einmal für irgend eine bestimmte Funkzion ein Zeichen gewählt ist, dasselbe bei eben der Rechnung nicht für eine andere als die ihr ähnliche gelten kann.

Auch dann noch, wenn einmal das Funkzionszeichen festgesetzt ist, kann man dasselbe zur Bezeichnung beibehalten, wenn die veränderlichen Größen bestimmte Werthe annehmen, welche alsdann **besondere Werthe** der Funkzion heißen. Setzt man in dem Ausdruck: $fx = \frac{a^2 x - x^3}{b + x}$, den besondern Werth b statt x, so wird: $fb = \frac{a^2 b - b^3}{b + b} = \frac{a^2 - b^2}{2}$ und eben so, wenn man a statt x setzt: $fa = 0$.

In denjenigen Fällen, wo man die veränderliche Größe $= 0$ setzt, pflegt man das Funkzionszeichen ohne allen Beisatz zu gebrauchen. Wäre

$$fx = \frac{a^2 + x^2}{b + x},$$

so erhält man für $x = 0$

$$f0 = \frac{a^2}{b} \text{ oder kürzer } f = \frac{a^2}{b}.$$

Auf gleiche Art erhält man aus der gegebenen oder ursprünglichen Funkzion

$$fx = \frac{a^2 x - x^3}{b + x},$$

die **besondern Werthe** derselben:

$$f4 = \frac{4a^2 - 64}{b + 4};$$

$$f1 = \frac{a^2 - 1}{b + 1};$$

$$f(-1) = \frac{-a^2 - 1}{b - 1}.$$

Auch ist, wenn $x + c$; $x - c$ oder $\frac{x}{a}$ statt x gesetzt wird:

$$f(x + c) = \frac{a^2 (x + c) - (x + c)^3}{b + x + c};$$

$$f(x - c) = \frac{a^2 (x - c) - (x - c)^3}{b + x - c};$$

$$f\frac{x}{a} = \frac{a^2 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}}{b + \frac{x}{a}} = \frac{a^4 x - x^3}{a^3 b + a^2 x} \text{ und}$$

$$f0 \text{ oder } f = \frac{0}{b} = 0.$$

§. 4.

Zusatz. Aus $fx = \frac{a^2 + x^2}{b + x}$ erhält man ferner wenn x^2 statt x gesetzt wird:

$$f(x^2) = \frac{a^2 + x^4}{b + x^2}.$$

Wird aber fx zur zweiten Potenz erhoben, so wird

$$(fx)^2 = \left(\frac{a^2 + x^2}{b + x}\right)^2 = \frac{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}{b^2 + 2bx + x^2}.$$

Es müssen daher die Ausdrücke $f(x^2)$ und $(fx)^2$ sehr wohl von einander unterschieden werden, da überhaupt $f(x^r)$ nur andeutet, daß x^r statt x in fx gesetzt werden soll, wogegen $(fx)^r$ anzeigt, daß fx auf die $r$te Potenz erhoben werden soll. Zur Vereinfachung dieser Bezeichnung wird in der Folge

$$fx^r \text{ statt } f(x^r)$$

gesetzt werden, welches mit $(fx)^r$ nicht zu verwechseln ist, weil man für diesen Fall die Klammern beibehält.

Wird $x + h$ statt x in $(fx)^r$ gesetzt, so giebt dies $[f(x + h)]^r$. Soll hingegen $(x + h)^r$ statt $x + h$ in $f(x + h)$ gesetzt werden, so giebt dies eigentlich $f[(x + h)^r]$, welches man aber ebenfalls der Kürze wegen durch $f(x + h)^r$ bezeichnen kann.

Man pflegt auch wohl $(fx)^r$ durch $f^r x$ zu bezeichnen; welches aber deshalb hier nicht angenommen wird, um Verwechselungen mit den Bezeichnungen der abgeleiteten Funkzionen zu vermeiden.

§. 5.

Eine Funkzion heißt **einförmig** (*uniformis*), wenn sie für jeden bestimmten Werth der veränderlichen Größe, nicht mehr als einen einzigen Werth erhält. Es sind daher die rationalen ganzen und gebrochenen Funkzionen, einförmig. Erhält die Funkzion für einen Werth der veränderlichen Größe, zwei verschiedene Werthe, so heißt sie **zweiförmig**, erhält sie drei Werthe, **dreiförmig**, u. s. w. Ueberhaupt wenn eine Funkzion für einen bestimmten Werth der veränderlichen Größe, mehr als einen Werth erhält, so heißt sie eine **vielförmige** Funkzion (*multiformis*).

Enthält eine ganze Funkzion eine oder mehrere veränderliche Größen, so heißt die Funkzion **gleichartig** (*homogenea*), wenn die Summe der Exponenten von den veränderlichen Größen eines jeden Gliedes, gleich groß ist. Eine gebrochene Funkzion ist gleichartig, wenn sowohl Zähler als Nenner derselben ganze Funkzionen sind, ohne daß jedoch die Summe der Exponenten eines jeden Gliedes des Zählers, denen des Nenners gleich seyn darf. So sind

$$axy^3 + bx^2y^2 + cy^4 \text{ und}$$

$$axy + y^2 + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^6 + xy^4}{x^3 - y^3}$$

gleichartige Funkzion, die erste von vier, die zweite von zwei Abmessungen.

Sind die Abmessungen oder die Summen der Exponenten der veränderlichen Größen in den einzelnen Gliedern einer Funkzion ungleich, so heißt sie eine **ungleichartige** Funkzion (*heterogenea*).

Funkzionen von mehreren veränderlichen Größen lassen sich auf eine ähnliche Weise wie Funkzionen von einer veränderlichen Größe bezeichnen. Wäre z. B. $u = a + bx - cxy + y^2$ gegeben, so kann man auch $f(x;y) = a + bx - cxy + y^2$ schreiben, wodurch zugleich eine einfache Bezeichnung der besondern Werthe dieser Funkzion entsteht. Hiernach wird

$$f(a;y) = a + a^2 - acy + y^2$$
$$f(x;a) = a + bx - acx + a^2$$
$$f(a;b) = a + ab - abc + b^2$$
$$f(o;y) = a + y^2$$
$$f(x;o) = a + bx$$
$$f(o;o) = a$$

u. s. w.

§. 6.

Eine Reihe Faktoren, welche wie die Glieder einer gemeinen arithmetischen Reihe gleiche Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden Gliedern haben, heißen eine **Fakultät** oder **Faktorenfolge**. So ist in der Faktorenfolge

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)(a+5b)(a+6b)$$

der Unterschied oder die **Differenz** b, ihr erster Faktor a und ihr letzter $a + 6b$. Der erste Faktor heißt die **Grundzahl** oder **Basis**, und die Anzahl der Glieder, der **Exponent** der Fakultät, welcher nach der hier gegebenen Erklärung eine ganze Zahl ist. Fakultäten mit negativen oder gebrochenen Exponenten werden in der Folge näher untersucht werden.

Dergleichen Fakultäten mit ganzen Exponenten lassen sich dadurch bezeichnen, daß man rechts oben neben die Grundzahl den Exponenten, neben diesen den Unterschied und zwischen diese beiden Zahlen ein Semikolon oder Komma setzt. So wird die vorstehende Fakultät durch

$$a^{7;b}$$

bezeichnet. Auf ähnliche Art ist:

$$a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+nb) = a^{n+1;b}$$
$$5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 = 5^{8;2}$$
$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 = 1^{12;1}$$
$$a(a-b)(a-2b)\ldots\ldots\ldots(a-nb) = a^{n+1;-b}$$

Die Fakultäten der natürlichen Zahlen, deren Grundzahl 1 ist, kann man auch kürzer dadurch bezeichnen, daß der letzte Faktor zwischen zwei Klammern und hinter denselben ein Ausrufungszeichen gesetzt wird, oder wenn keine Zweideutigkeit entsteht, unmittelbar hinter diesen Faktor das Ausrufungszeichen gesetzt wird.

Hiernach erhält man:

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 1^{7;1} = [7]! = 7!$$
$$1 . 2 . 3 \ldots n - 1 . n = 1^{n;1} = [n]! = n!$$

Dieser letztern Bezeichnung wird man sich in der Folge gewöhnlich bedienen.

Die Benennung Fakultät hat zuerst **Kramp** in seiner *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strasbourg et Leipsic*, 1797. *Chap. III*, angenommen.

Nach

Nach **Vandermonde** (*Mémoires de l'acad. de Paris, Année* 1772, *p.* 489.) welcher dergleichen Faktorenfolgen zuerst bezeichnete, ist

$$a \cdot (a-1)(a-2) \ldots\ldots (a-n+1) = [a]^{n} \text{ also}$$

$$a(a-h)(a-2h) \ldots\ldots (a-nh+h) = h^n \left[\frac{a}{h}\right]^n$$

ohne daß er für positive Differenzen eine besondere Bezeichnung einführte. Noch ist zu bemerken, daß **Arbogast** (*Du calcul de dérivations, à Strasbourg* 1800, *p.* 364.) den Faktorenfolgen die Benennung **Faktoriellen** beilegt.

§. 7.

Eine Reihe auf einanderfolgender Werthe oder Glieder $A; B; C; D; E; F; G; H; \ldots$ läßt sich, zur bessern Uebersicht, auch auf folgende Art darstellen:

$$A;\ A_1;\ A_2;\ A_3;\ A_4;\ A_5;\ A_6;\ A_7;\ \ldots\ldots$$

wo die kleinen Zahlen 1, 2, 3, ... den Namen **Anzeiger**, **Stellenzahl** oder **Stellenzeiger** (*Index*) erhalten, weil sie dazu dienen die Stelle eines jeden Werths in der angenommenen Folge anzuzeigen. Diese Anzeiger, welche nicht mit Exponenten zu verwechseln sind, lassen sich besonders dann sehr bequem anwenden, wenn man irgend einen unbestimmten Werth in der Reihenfolge etwa den $n$ten, welcher nach dem ersten Gliede A folgt, bezeichnen will. Man hat in diesem Falle A_n, welches nicht so bequem bei den Buchstaben $A, B, C, \ldots$ ausgedrückt werden kann. Hätte man die Reihe veränderlicher Größen:

$$1;\ x;\ x^2;\ x^3;\ x^4;\ \ldots\ldots x^{n-1};\ x^n;\ x^{n+1};\ \ldots\ldots$$

und man will mit jeder dieser veränderlichen Größen, andere beständige Größen als Faktoren verbinden, so entsteht daraus wenn $A\ A_1\ A_2\ A_3 \ldots$ diese Faktoren sind, eine Reihe von Gliedern:

$$A;\ A_1 x;\ A_2 x^2;\ A_3 x^3;\ \ldots\ldots A_{n-1} x^{n-1};\ A_n x^n;\ A_{n+1} x^{n+1}\ \ldots\ldots$$

in welcher die Faktoren $A. A_1\ A_2\ A_3 \ldots\ldots$ die **Koeffizienten** der Reihe heißen. Durch die angenommene Bezeichnung der Koeffizienten entsteht zugleich der Vortheil, daß nicht leicht zusammengehörige Koeffizienten und Potenzen von x verwechselt werden. Auch läßt sich, wenn die Art und Weise bekannt ist, wie die auf einander folgenden Koeffizienten $A\ A_1\ A_2 \ldots$ aus A_n entstehen und wenn der Ausdruck $A_n x^n$ für den Anzeiger n gegeben ist, dadurch für jeden andern Anzeiger das entsprechende Glied darstellen, weshalb auch $A_n x^n$ das **allgemeine Glied** der vorstehenden Reihe genannt wird, so wie A_n der **allgemeine Koeffizient** dieser Reihe heißt.

§. 8.

Weil die veränderlichen Größen in einer Funkzion jeden Werth annehmen können, so kann dadurch, daß eine veränderliche Größe als Faktor im Nenner einer gebrochenen Funkzion verschwindet, ein Ausdruck entstehen, welcher unangeblich groß wird. Hätte man z. B. den Ausdruck $\frac{a}{x}$, und setzt $x = \frac{1}{1000}$, so wird $\frac{a}{x} = 1000\,a$; für $x = \frac{1}{1000000}$ wird $\frac{a}{x} = 1000000\,a$; u. s. w. Der Werth $\frac{a}{x}$ wächst desto mehr, je kleiner x wird; wenn daher x verschwindet oder $= 0$ wird,

so ist $\frac{a}{o}$ unangeblich groß oder, wie man sich auszudrücken pflegt, **unendlich groß**. Solche Größen welche alle angebliche Größen überschreiten, nur gedacht aber nicht angegeben werden können, erhalten das Zeichen ∞, welches man **Unendlich** ausspricht. So ist hienach, wenn a eine endliche Größe bedeutet, $\frac{a}{o} = \infty$ eine, jede angebliche, überschreitende Größe. Diese Größen lassen sich eben so wenig darstellen als die Tangente eines rechten Winkels, und sie haben auch hier keine andere Bedeutung, als daß sie größer sind als jede angebliche Größe von derselben Art.

Weil x veränderlich ist und daher jeden negativen Werth eben so wohl als jeden positiven erhalten kann, so setze man $x = -\frac{1}{1000}$ alsdann wird $\frac{a}{x} = -1000\,a$; für $x = -\frac{1}{1000000}$ wird $\frac{a}{x} = -1000000\,a$; u. s. w., wenn daher x, negativ genommen, fortwährend verkleinert und zuletzt $= o$ wird, so erhält man $\frac{a}{o} = -\infty$; woraus folgt, daß hier $\frac{a}{o}$ einen doppelten Werth hat und daß man allgemein $\frac{a}{o} = \pm\infty$ findet, wenn $x = o$ in $\frac{a}{x}$ gesetzt wird.

Eben so wird aus $fx = \frac{1}{a-x}$, wenn man $x = a$ setzt, $fa = \frac{1}{o} = \pm\infty$. Wäre hingegen mit $fx = \frac{1}{a-x}$ die besondere Bedingung verbunden, daß x durchaus **nicht größer als** a werden darf, so erhält man, (§. 3.) wenn m eine sehr große Zahl bedeutet, $f\left(a - \frac{1}{m}\right) = m$, also wenn m ohne Ende wächst, $fa = \frac{1}{o} = +\infty$.

Darf x durchaus **nicht kleiner als** a **werden**, so wird $f\left(a + \frac{1}{m}\right) = -m$, also wenn m ohne Ende wächst, in diesem Falle $fa = \frac{1}{o} = -\infty$.

Hieraus folgt, daß die Vorzeichen, welche ein Ausdruck $\frac{a}{o} = \infty$ erhält, einer sorgfältigen Bestimmung bedürfen.

Hätte man z. B. $fx = \frac{a}{(b-x)^2}$, so wird $f\left(b + \frac{1}{m}\right) = +am^2$ und $f\left(b - \frac{1}{m}\right) = +am^2$. Nun läßt sich zwar m ohne Ende vergrößern, aber man erhält doch nur $fb = \frac{a}{o} = +\infty$, und es läßt sich kein Werth für x angeben, welcher hier $\frac{a}{o}$ in $-\infty$ verwandelt.

Aus den vorstehenden Entwickelungen geht hervor, daß zwar der unbestimmte Ausdruck $\frac{a}{o}$ unendlich groß ist, daß aber nur mittelst der ursprünglichen Funkzion, aus welcher derselbe entstanden ist, angegeben werden kann, ob derselbe positiv oder negativ, oder beides zugleich ist. Hienach entsteht die folgende Aufgabe.

Ueber den richtigen Gebrauch von $\pm$ bei analytischen Ausdrücken, sehe man:
F. G. Busse, Neue Erörterungen über Plus und Minus. Cöthen, 1801.

§. 9.

Aufgabe. In der gebrochenen Funkzion $\frac{Fx}{fx}$ werde für $x = a$ der Nenner $fa = 0$, der Zähler Fa erhalte aber alsdann einen endlichen Werth; man soll die Vorzeichen von $\frac{Fa}{0} = \infty$ bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet h eine äußerst kleine Größe, welche nach Willkühr bis $h = 0$ verkleinert werden kann, so wird $a + h$ einen nächst größern und $a - h$ einen nächst kleinern Werth als a bezeichnen. Entwickelt man nun aus $\frac{Fx}{fx}$ den Werth $\frac{F(a \pm h)}{f(a \pm h)}$, und man findet, daß derselbe positiv, negativ oder beides zugleich ist, so wird nach §. 8. alsdann auch $\frac{Fa}{0}$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$ oder $\pm\infty$ werden.

Bei der anzustellenden Prüfung, welche Vorzeichen $\frac{F(a \pm h)}{f(a \pm h)}$ erhalten muß, ist wohl zu erwägen, daß durch die Verkleinerung von h jede Größe, welche h zum Faktor hat, kleiner werden muß als diejenige, welcher dieser Faktor fehlt. So ist offenbar a größer als bh, weil, wenn auch a noch so klein und b noch so groß ist, doch h so äußerst klein angenommen werden kann, daß a größer als bh wird.

1. **Beispiel.** $\frac{Fx}{fx} = \frac{a + bx}{cx + dx^2 + ex^3}$ giebt für $x = 0$, $\frac{F0}{f0} = \frac{a}{0}$. Es ist aber $\frac{F(0 \pm h)}{f(0 \pm h)} = \frac{a \pm bh}{(\pm c + dh \pm eh^2)h}$. Weil nun h so klein angenommen werden kann, daß a größer als bh, und c größer als $dh + eh^2$ wird, so behält der Quotient die Zeichen $\pm$ und man findet hier

$$\frac{F0}{0} = \frac{a}{0} = \pm\infty.$$

2. **Beispiel.** $\frac{Fx}{fx} = \frac{Fx}{a + bx}$ giebt für $x = -\frac{a}{b}$, $\frac{F\left(-\frac{a}{b}\right)}{0}$, wobei zugleich vorausgesetzt wird, daß $F\left(-\frac{a}{b}\right)$ ein endlicher positiver oder negativer Werth ist. Es wird aber $\frac{F\left(-\frac{a}{b} \pm h\right)}{f\left(-\frac{a}{b} \pm h\right)} = \frac{F\left(-\frac{a}{b} \pm h\right)}{\pm bh}$. Wird nun der Zähler entweder positiv oder negativ, so muß doch der Quotient die Zeichen $\pm$ erhalten, daher wird hier

$$\frac{F\left(-\frac{a}{b}\right)}{0} = \pm\infty.$$

3. **Beispiel.** $\frac{Fx}{fx} = \frac{a + bx}{c - dx^2}$, giebt für $x = \pm\sqrt{\frac{c}{d}}$, $\frac{F\left(\pm h \pm \sqrt{\frac{c}{d}}\right)}{f\left(\pm h \pm \sqrt{\frac{c}{d}}\right)} = \frac{a \pm b\sqrt{\frac{c}{d}} \pm bh}{2h\sqrt{cd} + dh^2}$. Hier bleibt der Nenner positiv, daher wird das Zeichen

des Quotienten nur allein durch den Zähler bestimmt. Ist nun a größer als $b\sqrt{\frac{c}{d}}$, so bleibt der Zähler positiv, und man erhält

$$\frac{F\left(\pm\sqrt{\frac{c}{d}}\right)}{0} = +\infty.$$

Wird aber $b\sqrt{\frac{c}{d}}$ größer als a, so erhält man

$$\frac{F\left(\pm\sqrt{\frac{c}{d}}\right)}{0} = \pm\infty.$$

Wenn daher $\frac{Fx}{fx} = \frac{9 + 2x}{3 - 4x^2}$ gegeben ist, und man setzt $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, so wird $\frac{F(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})}{f(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{9 \pm \sqrt{3} \pm 2h}{4h\sqrt{3} + 4h^2}$ positiv, also $\frac{9 \pm \sqrt{3}}{0} = +\infty$ folglich

$$\frac{F(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3})}{0} = +\infty.$$

Wenn aber $\frac{Fx}{fx} = \frac{1 + 2x}{3 - 4x^2}$ gegeben wäre, so wird $\frac{F(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})}{f(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \pm 2h}{4h\sqrt{3} + 4h^2}$ positiv und negativ, daher $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{0} = \pm\infty$, folglich hier

$$\frac{F(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}}{0} = \pm\infty.$$

§. 10.

Wird in dem Ausdrucke $\frac{a}{x}$ der Werth x fortwährend vermehrt, so muß $\frac{a}{x}$ desto kleiner werden, je größer man x annimmt. So lange x noch einen angeblichen Werth hat, kann zwar $\frac{a}{x}$ nie $= 0$ werden, aber es nähert sich 0 desto mehr, je größer man x annimmt. Ueberschreitet daher x jede angebliche Größe, oder man setzt $x = \infty$, so kann $\frac{a}{\infty}$ keinen angeblichen Werth behalten, weil jeder angebliche Werth von $\frac{a}{x}$ auch einem bestimmten Werth von x entspricht, daher muß in diesem Falle $\frac{a}{\infty} = 0$ seyn, und man erhält, wenn a eine endliche Größe bedeutet:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

So oft daher ein Faktor im Nenner eines Bruchs unendlich groß wird und der Zähler einen bestimmten Werth behält, so ist der Werth des Bruchs $= 0$.

Hienach lassen sich auch die Werthe der Funkzionen bestimmen, wenn in denselben mehrere Glieder unendlich groß werden. Hätte man z. B.

$$y = \frac{a + bx}{c + dx},$$

so wird für $x = \infty$

$$y = \frac{a + b\infty}{c + d\infty},$$

woraus sich zwar nichts bestimmen läßt. Es ist aber

$$y = \frac{\frac{a}{x} + b}{\frac{c}{x} + d},$$

also für $x = \infty$

$$y = \frac{\frac{a}{\infty} + b}{\frac{c}{\infty} + d},$$

und weil sowohl $\frac{a}{\infty}$ als $\frac{c}{\infty} = 0$ ist, so erhält man

$$y = \frac{b}{d} \text{ für } x = \infty.$$

Hieraus folgt zugleich, daß sich der Werth von $y = \frac{a + bx}{c + dx}$ immer mehr der **Grenze** $\frac{b}{d}$ nähert, je größer man x annimmt, daß aber y diese Grenze nie erreichen kann, so lange x noch einen endlichen Werth hat. Man nennt daher $\frac{b}{d}$ einen **Grenzwerth** von y, für $x = \infty$.

Setzt man $x = 0$ in $y = \frac{a + bx}{c + dx}$, so wird $y = \frac{a}{c}$. Es ist alsdann $\frac{a}{c}$ ein **Grenzwerth** von y für $x = 0$, und es giebt keinen endlichen Werth für x, durch welchen dieser Grenzwerth erreicht werden könnte.

§. 11.

Hat man eine gebrochene Funkzion $\frac{Fx}{fx}$, und man findet, daß für irgend einen Werth $x = a$ sowol der Zähler als der Nenner verschwinden, so läßt sich dies dadurch bezeichnen, daß man $\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$ setzt. Hieraus darf man aber noch nicht schließen, daß der Ausdruck $\frac{Fa}{fa}$ nicht einen bestimmten Werth haben könnte; ob gleich $\frac{0}{0}$ für sich ganz unbestimmt ist und hier nur anzeigt, daß eine gebrochene Funkzion im Zähler und Nenner zu Null geworden ist, indem man für x irgend einen Werth a setzte. Ist man im Stande die Funkzion $\frac{Fx}{fx}$ noch auf eine andere Weise so auszudrücken, daß alsdann, wenn a statt x gesetzt wird, der Zähler und Nenner der gegebenen Funkzion bestimmte Werthe erhalten, so ist dadurch der Werth des Ausdrucks $\frac{0}{0}$ gefunden.

Wäre z. B. $\frac{Fx}{fx} = \frac{a^3 - x^3}{a - x}$ gegeben, so erhält man für $x = a$

$\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$. Es ist aber $a^3 - x^3 = (a^2 + ax + x^2)(a - x)$, daher

$\frac{Fx}{fx} = \frac{a^3 - x^3}{a - x} = a^2 + ax + x^2$; also für $x = a$

$\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0} = 3a^2$.

ten alsdann auch einerlei Funkzionszeichen, also wenn man $fx = \frac{a^2x - x^3}{b + x}$ setzt, so ist $fy = \frac{a^2y - y^3}{b + y}$.

Ueberhaupt ist zu bemerken, daß, wenn einmal für irgend eine bestimmte Funkzion ein Zeichen gewählt ist, dasselbe bei eben der Rechnung nicht für eine andere als die ihr ähnliche gelten kann.

Auch dann noch, wenn einmal das Funkzionszeichen festgesetzt ist, kann man dasselbe zur Bezeichnung beibehalten, wenn die veränderlichen Größen bestimmte Werthe annehmen, welche alsdann **besondere Werthe** der Funkzion heißen. Setzt man in dem Ausdruck: $fx = \frac{a^2x - x^3}{b + x}$, den besondern Werth b statt x, so wird: $fb = \frac{a^2b - b^3}{b + b} = \frac{a^2 - b^2}{2}$ und eben so, wenn man a statt x setzt: $fa = 0$.

In denjenigen Fällen, wo man die veränderliche Größe $= 0$ setzt, pflegt man das Funkzionszeichen ohne allen Beisatz zu gebrauchen. Wäre

$$fx = \frac{a^2 + x^2}{b + x},$$

so erhält man für $x = 0$

$$f0 = \frac{a^2}{b} \text{ oder kürzer } f = \frac{a^2}{b}.$$

Auf gleiche Art erhält man aus der gegebenen oder ursprünglichen Funkzion

$$fx = \frac{a^2x - x^3}{b + x},$$

die **besondern Werthe** derselben:

$$f4 = \frac{4a^2 - 64}{b + 4};$$

$$f1 = \frac{a^2 - 1}{b + 1};$$

$$f(-1) = \frac{-a^2 - 1}{b - 1}.$$

Auch ist, wenn $x + c$; $x - c$ oder $\frac{x}{a}$ statt x gesetzt wird:

$$f(x + c) = \frac{a^2(x + c) - (x + c)^3}{b + x + c};$$

$$f(x - c) = \frac{a^2(x - c) - (x - c)^3}{b + x - c};$$

$$f\frac{x}{a} = \frac{a^2\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}}{b + \frac{x}{a}} = \frac{a^4x - x^3}{a^3b + a^2x} \text{ und}$$

$$f0 \text{ oder } f = \frac{0}{b} = 0.$$

§. 4.

Zusatz. Aus $fx = \frac{a^2 + x^2}{b + x}$ erhält man ferner wenn x^2 statt x gesetzt wird:

$$f(x^2) = \frac{a^2 + x^4}{b + x^2}.$$

Wird aber fx zur zweiten Potenz erhoben, so wird

$$(fx)^2 = \left(\frac{a^2 + x^2}{b + x}\right)^2 = \frac{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}{b^2 + 2bx + x^2}.$$

Es müssen daher die Ausdrücke $f(x^2)$ und $(fx)^2$ sehr wohl von einander unterschieden werden, da überhaupt $f(x^r)$ nur andeutet, daß x^r statt x in fx gesetzt werden soll, wogegen $(fx)^r$ anzeigt, daß fx auf die $r$te Potenz erhoben werden soll. Zur Vereinfachung dieser Bezeichnung wird in der Folge

$$fx^r \text{ statt } f(x^r)$$

gesetzt werden, welches mit $(fx)^r$ nicht zu verwechseln ist, weil man für diesen Fall die Klammern beibehält.

Wird $x + h$ statt x in $(fx)^r$ gesetzt, so giebt dies $[f(x + h)]^r$. Soll hingegen $(x + h)^r$ statt $x + h$ in $f(x + h)$ gesetzt werden, so giebt dies eigentlich $f[(x + h)^r]$, welches man aber ebenfalls der Kürze wegen durch $f(x + h)^r$ bezeichnen kann.

Man pflegt auch wohl $(fx)^r$ durch $f^r x$ zu bezeichnen; welches aber deshalb hier nicht angenommen wird, um Verwechselungen mit den Bezeichnungen der abgeleiteten Funkzionen zu vermeiden.

§. 5.

Eine Funkzion heißt **einförmig** (*uniformis*), wenn sie für jeden bestimmten Werth der veränderlichen Größe, nicht mehr als einen einzigen Werth erhält. Es sind daher die rationalen ganzen und gebrochenen Funkzionen, einförmig. Erhält die Funkzion für einen Werth der veränderlichen Größe, zwei verschiedene Werthe, so heißt sie **zweiförmig**, erhält sie drei Werthe, **dreiförmig**, u. s. w. Ueberhaupt wenn eine Funkzion für einen bestimmten Werth der veränderlichen Größe, mehr als einen Werth erhält, so heißt sie eine **vielförmige** Funkzion (*multiformis*).

Enthält eine ganze Funkzion eine oder mehrere veränderliche Größen, so heißt die Funkzion **gleichartig** (*homogenea*), wenn die Summe der Exponenten von den veränderlichen Größen eines jeden Gliedes, gleich groß ist. Eine gebrochene Funkzion ist gleichartig, wenn sowohl Zähler als Nenner derselben ganze Funkzionen sind, ohne daß jedoch die Summe der Exponenten eines jeden Gliedes des Zählers, denen des Nenners gleich seyn darf. So sind

$$axy^2 + bx^2y^2 + cy^4 \text{ und}$$

$$axy + y^2 + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^6 + xy^4}{x^3 - y^3}$$

gleichartige Funkzion, die erste von vier, die zweite von zwei Abmessungen.

Sind die Abmessungen oder die Summen der Exponenten der veränderlichen Größen in den einzelnen Gliedern einer Funkzion ungleich, so heißt sie eine **ungleichartige** Funkzion (*heterogenea*).

Funkzionen von mehreren veränderlichen Größen lassen sich auf eine ähnliche Weise wie Funkzionen von einer veränderlichen Größe bezeichnen. Wäre z. B. $u = a + bx - cxy + y^2$ gegeben, so kann man auch $f(x;y) = a + bx - cxy + y^2$ schreiben, wodurch zugleich eine einfache Bezeichnung der besondern Werthe dieser Funkzion entsteht. Hiernach wird

$$f(a;y) = a + a^2 - acy + y^2$$
$$f(x;a) = a + bx - acx + a^2$$
$$f(a;b) = a + ab - abc + b^2$$
$$f(o;y) = a + y^2$$
$$f(x;o) = a + bx$$
$$f(o;o) = a$$

u. s. w.

§. 6.

Eine Reihe Faktoren, welche wie die Glieder einer gemeinen arithmetischen Reihe gleiche Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden Gliedern haben, heißen eine **Fakultät** oder **Faktorenfolge**. So ist in der Faktorenfolge

$$a(a + b)(a + 2b)(a + 3b)(a + 4b)(a + 5b)(a + 6b)$$

der Unterschied oder die **Differenz** b, ihr erster Faktor a und ihr letzter $a + 6b$. Der erste Faktor heißt die **Grundzahl** oder **Basis**, und die Anzahl der Glieder, der **Exponent** der Fakultät, welcher nach der hier gegebenen Erklärung eine ganze Zahl ist. Fakultäten mit negativen oder gebrochenen Exponenten werden in der Folge näher untersucht werden.

Dergleichen Fakultäten mit ganzen Exponenten lassen sich dadurch bezeichnen, daß man rechts oben neben die Grundzahl den Exponenten, neben diesen den Unterschied und zwischen diese beiden Zahlen ein Semikolon oder Komma setzt. So wird die vorstehende Fakultät durch

$$a^{7;b}$$

bezeichnet. Auf ähnliche Art ist:

$$a(a + b)(a + 2b) \ldots . (a + nb) = a^{n+1;b}$$
$$5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 = 5^{8;2}$$
$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 = 1^{12;1}$$
$$a(a - b)(a - 2b) \ldots \ldots (a - nb) = a^{n+1;-b}$$

Die Fakultäten der natürlichen Zahlen, deren Grundzahl 1 ist, kann man auch kürzer dadurch bezeichnen, daß der letzte Faktor zwischen zwei Klammern und hinter denselben ein Ausrufungszeichen gesetzt wird, oder wenn keine Zweideutigkeit entsteht, unmittelbar hinter diesen Faktor das Ausrufungszeichen gesetzt wird.

Hiernach erhält man:

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 1^{7;1} = [7]! = 7!$$
$$1 . 2 . 3 \ldots n - 1 . n = 1^{n;1} = [n]! = n!$$

Dieser letztern Bezeichnung wird man sich in der Folge gewöhnlich bedienen.

Die Benennung Fakultät hat zuerst Kramp in seiner *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strasbourg et Leipsic, 1797. Chap. III*, angenommen.

Nach

Nach **Vandermonde** (*Mémoires de l'acad. de Paris, Année* 1772, *p.* 489.) welcher dergleichen Faktorenfolgen zuerst bezeichnete, ist

$$a.(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1)=[a]^n \text{ also}$$

$$a(a-h)(a-2h)\ldots\ldots(a-nh+h)=h^n\left[\frac{a}{h}\right]^n$$

ohne daß er für positive Differenzen eine besondere Bezeichnung einführte. Noch ist zu bemerken, daß **Arbogast** (*Du calcul de dérivations, à Strasbourg* 1800, *p.* 364.) den Faktorenfolgen die Benennung **Faktoriellen** beilegt.

§. 7.

Eine Reihe auf einanderfolgender Werthe oder Glieder A; B; C; D; E; F; G; H; ... läßt sich, zur bessern Uebersicht, auch auf folgende Art darstellen:

$$A;\ A_1;\ A_2;\ A_3;\ A_4;\ A_5;\ A_6;\ A_7;\ \ldots\ldots$$

wo die kleinen Zahlen 1, 2, 3, ... den Namen **Anzeiger**, **Stellenzahl** oder **Stellenzeiger** (*Index*) erhalten, weil sie dazu dienen die Stelle eines jeden Werths in der angenommenen Folge anzuzeigen. Diese Anzeiger, welche nicht mit Exponenten zu verwechseln sind, lassen sich besonders dann sehr bequem anwenden, wenn man irgend einen unbestimmten Werth in der Reihenfolge etwa den $n$ten, welcher nach dem ersten Gliede A folgt, bezeichnen will. Man hat in diesem Falle A_n, welches nicht so bequem bei den Buchstaben $A, B, C, \ldots$ ausgedrückt werden kann. Hätte man die Reihe veränderlicher Größen:

$$1;\ x;\ x^2;\ x^3;\ x^4;\ \ldots\ x^{n-1};\ x^n;\ x^{n+1};\ \ldots$$

und man will mit jeder dieser veränderlichen Größen, andere beständige Größen als Faktoren verbinden, so entsteht daraus wenn $A\ A_1\ A_2\ A_3\ldots$ diese Faktoren sind, eine Reihe von Gliedern:

$$A;\ A_1x;\ A_2x^2;\ A_3x^3;\ \ldots\ A_{n-1}x^{n-1};\ A_nx^n;\ A_{n+1}x^{n+1}\ \ldots$$

in welcher die Faktoren $A.A_1\ A_2\ A_3\ldots$ die **Koeffizienten** der Reihe heißen. Durch die angenommene Bezeichnung der Koeffizienten entsteht zugleich der Vortheil, daß nicht leicht zusammengehörige Koeffizienten und Potenzen von x verwechselt werden. Auch läßt sich, wenn die Art und Weise bekannt ist, wie die auf einander folgenden Koeffizienten $A\ A_1\ A_2\ldots$ aus A_n entstehen und wenn der Ausdruck A_nx^n für den Anzeiger n gegeben ist, dadurch für jeden andern Anzeiger das entsprechende Glied darstellen, weshalb auch A_nx^n das **allgemeine Glied** der vorstehenden Reihe genannt wird, so wie A_n der **allgemeine Koeffizient** dieser Reihe heißt.

§. 8.

Weil die veränderlichen Größen in einer Funkzion jeden Werth annehmen können, so kann dadurch, daß eine veränderliche Größe als Faktor im Nenner einer gebrochenen Funkzion verschwindet, ein Ausdruck entstehen, welcher unangeblich groß wird. Hätte man z. B. den Ausdruck $\frac{a}{x}$, und setzt $x=\frac{1}{1000}$, so wird $\frac{a}{x}=1000\,a$; für $x=\frac{1}{1000000}$ wird $\frac{a}{x}=1000000\,a$; u. s. w. Der Werth $\frac{a}{x}$ wächst desto mehr, je kleiner x wird; wenn daher x verschwindet oder $=0$ wird,

so ist $\frac{a}{o}$ unangeblich groß oder, wie man sich auszudrücken pflegt, **unendlich groß**. Solche Größen welche alle angebliche Größen überschreiten, nur gedacht aber nicht angegeben werden können, erhalten das Zeichen ∞, welches man **Unendlich** ausspricht. So ist hienach, wenn a eine endliche Größe bedeutet, $\frac{a}{o} = \infty$ eine, jede angebliche, überschreitende Größe. Diese Größen lassen sich eben so wenig darstellen als die Tangente eines rechten Winkels, und sie haben auch hier keine andere Bedeutung, als daß sie größer sind als jede angebliche Größe von derselben Art.

Weil x veränderlich ist und daher jeden negativen Werth eben so wohl als jeden positiven erhalten kann, so setze man $x = -\frac{1}{1000}$ alsdann wird $\frac{a}{x} = -1000\,a$; für $x = -\frac{1}{1000000}$ wird $\frac{a}{x} = -1000000\,a$; u. s. w., wenn daher x, negativ genommen, fortwährend verkleinert und zuletzt $= o$ wird, so erhält man $\frac{a}{o} = -\infty$; woraus folgt, daß hier $\frac{a}{o}$ einen doppelten Werth hat und daß man allgemein $\frac{a}{o} = \pm\infty$ findet, wenn $x = o$ in $\frac{a}{x}$ gesetzt wird.

Eben so wird aus $fx = \frac{1}{a-x}$, wenn man $x = a$ setzt, $fa = \frac{1}{o} = \pm\infty$. Wäre hingegen mit $fx = \frac{1}{a-x}$ die besondere Bedingung verbunden, daß x durchaus **nicht größer als** a werden darf, so erhält man, (§. 3.) wenn m eine sehr große Zahl bedeutet, $f\left(a - \frac{1}{m}\right) = m$, also wenn m ohne Ende wächst, $fa = \frac{1}{o} = +\infty$.

Darf x durchaus **nicht kleiner als** a werden, so wird $f\left(a + \frac{1}{m}\right) = -m$, also wenn m ohne Ende wächst, in diesem Falle $fa = \frac{1}{o} = -\infty$.

Hieraus folgt, daß die Vorzeichen, welche ein Ausdruck $\frac{a}{o} = \infty$ erhält, einer sorgfältigen Bestimmung bedürfen.

Hätte man z. B. $fx = \frac{a}{(b-x)^2}$, so wird $f\left(b + \frac{1}{m}\right) = +am^2$ und $f\left(b - \frac{1}{m}\right) = +am^2$. Nun läßt sich zwar m ohne Ende vergrößern, aber man erhält doch nur $fb = \frac{a}{o} = +\infty$, und es läßt sich kein Werth für x angeben, welcher hier $\frac{a}{o}$ in $-\infty$ verwandelt.

Aus den vorstehenden Entwickelungen geht hervor, daß zwar der unbestimmte Ausdruck $\frac{a}{o}$ unendlich groß ist, daß aber nur mittelst der ursprünglichen Funkzion, aus welcher derselbe entstanden ist, angegeben werden kann, ob derselbe positiv oder negativ, oder beides zugleich ist. Hienach entsteht die folgende Aufgabe.

Ueber den richtigen Gebrauch von $\pm$ bei analytischen Ausdrücken, sehe man:
F. G. Busse, Neue Erörterungen über Plus und Minus. Cöthen, 1801.

§. 9.

Aufgabe. In der gebrochenen Funkzion $\frac{Fx}{fx}$ werde für $x = a$ der Nenner $fa = 0$, der Zähler Fa erhalte aber alsdann einen endlichen Werth; man soll die Vorzeichen von $\frac{Fa}{0} = \infty$ bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet h eine äußerst kleine Größe, welche nach Willkühr bis $h = 0$ verkleinert werden kann, so wird $a + h$ einen nächst größern und $a - h$ einen nächst kleinern Werth als a bezeichnen. Entwickelt man nun aus $\frac{Fx}{fx}$ den Werth $\frac{F(a \pm h)}{f(a \pm h)}$, und man findet, daß derselbe positiv, negativ oder beides zugleich ist, so wird nach §. 8. alsdann auch $\frac{Fa}{0}$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$ oder $\pm\infty$ werden.

Bei der anzustellenden Prüfung, welche Vorzeichen $\frac{F(a \pm h)}{f(a \pm h)}$ erhalten muß, ist wohl zu erwägen, daß durch die Verkleinerung von h jede Größe, welche h zum Faktor hat, kleiner werden muß als diejenige, welcher dieser Faktor fehlt. So ist offenbar a größer als bh, weil, wenn auch a noch so klein und b noch so groß ist, doch h so äußerst klein angenommen werden kann, daß a größer als bh wird.

1. **Beispiel.** $\frac{Fx}{fx} = \frac{a + bx}{cx + dx^2 + ex^3}$ giebt für $x = 0$, $\frac{F0}{f0} = \frac{a}{0}$. Es ist aber $\frac{F(0 \pm h)}{f(0 \pm h)} = \frac{a \pm bh}{(\pm c + dh \pm eh^2)\,h}$. Weil nun h so klein angenommen werden kann, daß a größer als bh, und c größer als $dh + eh^2$ wird, so behält der Quotient die Zeichen $\pm$ und man findet hier

$$\frac{F0}{0} = \frac{a}{0} = \pm\infty.$$

2. **Beispiel.** $\frac{Fx}{fx} = \frac{Fx}{a + bx}$ giebt für $x = -\frac{a}{b}$, $\frac{F\left(-\frac{a}{b}\right)}{0}$, wobei zugleich vorausgesetzt wird, daß $F\left(-\frac{a}{b}\right)$ ein endlicher positiver oder negativer Werth ist. Es wird aber $\frac{F\left(-\frac{a}{b} \pm h\right)}{f\left(-\frac{a}{b} \pm h\right)} = \frac{F\left(-\frac{a}{b} \pm h\right)}{\pm bh}$. Wird nun der Zähler entweder positiv oder negativ, so muß doch der Quotient die Zeichen $\pm$ erhalten, daher wird hier

$$\frac{F\left(-\frac{a}{b}\right)}{0} = \pm\infty.$$

3. **Beispiel.** $\frac{Fx}{fx} = \frac{a + bx}{c - dx^2}$, giebt für $x = \pm\sqrt{\frac{c}{d}}$, $\frac{F\left(\pm h \pm \sqrt{\frac{c}{d}}\right)}{f\left(\pm h \pm \sqrt{\frac{c}{d}}\right)} = \frac{a \pm b\sqrt{\frac{c}{d}} \pm bh}{2h\sqrt{cd} + dh^2}$. Hier bleibt der Nenner positiv, daher wird das Zeichen

des Quotienten nur allein durch den Zähler bestimmt. Ist nun a größer als $b\sqrt{\frac{c}{d}}$, so bleibt der Zähler positiv, und man erhält

$$\frac{F\left(\pm\sqrt{\frac{c}{d}}\right)}{0} = +\infty.$$

Wird aber $b\sqrt{\frac{c}{d}}$ größer als a, so erhält man

$$\frac{F\left(\pm\sqrt{\frac{c}{d}}\right)}{0} = \pm\infty.$$

Wenn daher $\frac{Fx}{fx} = \frac{9 + 2x}{3 - 4x^2}$ gegeben ist, und man setzt $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, so wird $\frac{F(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})}{f(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{9 \pm \sqrt{3} \pm 2h}{4h\sqrt{3} + 4h^2}$ positiv, also $\frac{9 \pm \sqrt{3}}{0} = +\infty$ folglich

$$\frac{F(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3})}{0} = +\infty.$$

Wenn aber $\frac{Fx}{fx} = \frac{1 + 2x}{3 - 4x^2}$ gegeben wäre, so wird $\frac{F(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})}{f(\pm h \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \pm 2h}{4h\sqrt{3} + 4h^2}$ positiv und negativ, daher $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{0} = \pm\infty$, folglich hier

$$\frac{F(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3})}{0} = \pm\infty.$$

§. 10.

Wird in dem Ausdrucke $\frac{a}{x}$ der Werth x fortwährend vermehrt, so muß $\frac{a}{x}$ desto kleiner werden, je größer man x annimmt. So lange x noch einen angeblichen Werth hat, kann zwar $\frac{a}{x}$ nie $= 0$ werden, aber es nähert sich 0 desto mehr, je größer man x annimmt. Ueberschreitet daher x jede angebliche Größe, oder man setzt $x = \infty$, so kann $\frac{a}{\infty}$ keinen angeblichen Werth behalten, weil jeder angebliche Werth von $\frac{a}{x}$ auch einem bestimmten Werth von x entspricht, daher muß in diesem Falle $\frac{a}{x} = 0$ seyn, und man erhält, wenn a eine endliche Größe bedeutet:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

So oft daher ein Faktor im Nenner eines Bruchs unendlich groß wird und der Zähler einen bestimmten Werth behält, so ist der Werth des Bruchs $= 0$.

Hienach lassen sich auch die Werthe der Funkzionen bestimmen, wenn in denselben mehrere Glieder unendlich groß werden. Hätte man z. B.

$$y = \frac{a + bx}{c + dx},$$

so wird für $x = \infty$

$$y = \frac{a + b\infty}{c + d\infty},$$

woraus sich zwar nichts bestimmen läßt. Es ist aber

$$y = \frac{\frac{a}{x} + b}{\frac{c}{x} + d},$$

also für $x = \infty$

$$y = \frac{\frac{a}{\infty} + b}{\frac{c}{\infty} + d},$$

und weil sowohl $\frac{a}{\infty}$ als $\frac{c}{\infty} = 0$ ist, so erhält man

$$y = \frac{b}{d} \text{ für } x = \infty.$$

Hieraus folgt zugleich, daß sich der Werth von $y = \frac{a + bx}{c + dx}$ immer mehr der **Grenze** $\frac{b}{d}$ nähert, je größer man x annimmt, daß aber y diese Grenze nie erreichen kann, so lange x noch einen endlichen Werth hat. Man nennt daher $\frac{b}{d}$ einen **Grenzwerth** von y, für $x = \infty$.

Setzt man $x = 0$ in $y = \frac{a + bx}{c + dx}$, so wird $y = \frac{a}{c}$. Es ist alsdann $\frac{a}{c}$ ein **Grenzwerth** von y für $x = 0$, und es giebt keinen endlichen Werth für x, durch welchen dieser Grenzwerth erreicht werden könnte.

§. 11.

Hat man eine gebrochene Funkzion $\frac{Fx}{fx}$, und man findet, daß für irgend einen Werth $x = a$ sowol der Zähler als der Nenner verschwinden, so läßt sich dies dadurch bezeichnen, daß man $\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$ setzt. Hieraus darf man aber noch nicht schließen, daß der Ausdruck $\frac{Fa}{fa}$ nicht einen bestimmten Werth haben könnte; ob gleich $\frac{0}{0}$ für sich ganz unbestimmt ist und hier nur anzeigt, daß eine gebrochene Funkzion im Zähler und Nenner zu Null geworden ist, indem man für x irgend einen Werth a setzte. Ist man im Stande die Funkzion $\frac{Fx}{fx}$ noch auf eine andere Weise so auszudrücken, daß alsdann, wenn a statt x gesetzt wird, der Zähler und Nenner der gegebenen Funkzion bestimmte Werthe erhalten, so ist dadurch der Werth des Ausdrucks $\frac{0}{0}$ gefunden.

Wäre z. B. $\frac{Fx}{fx} = \frac{a^3 - x^3}{a - x}$ gegeben, so erhält man für $x = a$

$\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$. Es ist aber $a^3 - x^3 = (a^2 + ax + x^2)(a - x)$, daher

$\frac{Fx}{fx} = \frac{a^3 - x^3}{a - x} = a^2 + ax + x^2$; also für $x = a$

$\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0} = 3a^2$.

Wenn nun gleich hier $\frac{0}{0} = 3a^2$ gefunden worden, so gilt dies doch nur für die bestimmte Einschränkung, daß $\frac{0}{0}$ aus $\frac{a^3 - x^3}{a - x}$ entstanden ist, und man hätte offenbar für eine andere gebrochene Funkzion, auch einen andern Werth für $\frac{0}{0}$ erhalten. Wenn daher der Ausdruck $\frac{0}{0}$ vorkommt, so bezeichnet er lediglich, daß eine gebrochene Funkzion im Zähler und Nenner verschwunden, und wenn alsdann $\frac{0}{0}$ nicht unbestimmt bleiben soll, so muß bekannt seyn, aus welcher Funkzion dieser Ausdruck entstanden ist.

Wäre z. B. bekannt, daß $\frac{0}{0}$ aus $\frac{Fx}{fx} = \frac{\sin x}{tg\, x}$ dadurch entstanden wäre, daß man $x = 0$ setzte, so weiß man daß $\frac{\sin x}{tg\, x} = \cos x$ ist; man erhält daher

$\frac{Fx}{fx} = \frac{\sin x}{tg\, x} = \cos x$, also für $x = 0$

$$\frac{F}{f} = \frac{0}{0} = 1,$$

weil der Cosinus von 0 Grad = 1 ist.

Wie man für jede gegebene Funkzion den besondern Werth finden kann, wenn solche $\frac{0}{0}$ wird, läßt sich erst in der Folge ganz allgemein angeben. Hier ist es zureichend zu übersehen, daß die Ausdrücke $\frac{0}{0}$, einem bestimmten Werthe entsprechen können.

Es sey ferner der Ausdruck $\frac{Fx}{fx} = \frac{1 - \sin x + a \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ gegeben.

Für $x = 90°$ wird $\sin x = 1$; $\cos x = 0$, also $\frac{F90°}{f90°} = \frac{0}{0}$.

Es ist aber:

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{1 - \sin x + a\sqrt{(1 - \sin x^2)}}{\sin x - 1 + \sqrt{(1 - \sin x^2)}} = \frac{1 - \sin x + a\sqrt{[(1 - \sin x)(1 + \sin x)]}}{\sin x - 1 + \sqrt{[(1 - \sin x)(1 + \sin x)]}} = \frac{\sqrt{(1 - \sin x)} + a\sqrt{(1 + \sin x)}}{\sqrt{(1 + \sin x)} - \sqrt{(1 - \sin x)}},$$

also für $x = 90°$

$$\frac{F90°}{f90°} = \frac{0}{0} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a.$$

Welche absurde Resultate entstehen, wenn man unbedingt zwei Nullen einander gleich setzt, ohne auf die Größen Rücksicht zu nehmen, aus welchen diese Nullen entstanden sind, beweisen folgende Schlüsse. Es ist

$$3 - 3 = 5 - 5 \text{ oder}$$
$$3\,(1 - 1) = 5\,(1 - 1).$$

Auf beiden Seiten mit $(1 - 1)$ dividirt, giebt

$$3 = 5,$$

welches absurd ist.

§. 12.

So wie der Ausdruck $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Größe bezeichnet, welche nur alsdann einen bestimmten Werth erhält, wenn man die Funkzion kennt aus welcher dieser Ausdruck entstanden ist, so müssen auch die Ausdrücke $\infty - \infty$ als noch näher zu bestimmende Größen angesehen werden, deren Werth mit Hülfe der Funkzionen, aus welchen sie entstanden sind, jedesmal bestimmt werden muß. Wäre z. B.

$$fx = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$ gegeben, so erhält man für $x = 1$,

$$f1 = \frac{1}{0} - \frac{2}{0} = \infty - \infty.$$

Es ist aber $(1-x)(1+x) = 1 - x^2$, daher

$$fx = \frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x}.$$

Für $x = 1$ wird $f1 = -\frac{1}{2}$ daher erhält man

$$f1 = \infty - \infty = -\tfrac{1}{2}.$$

Wie der Werth solcher Ausdrücke in jedem besondern Falle aus der ursprünglichen Funkzion gefunden werden kann, wird im siebenten Kapitel näher bestimmt.

§. 13.

Die Potenzen der veränderlichen Größen erfordern eine besondere Betrachtung, wenn die Wurzel derselben Null wird oder verschwindet. Wäre in dem allgemeinen Ausdruck x^n, die veränderliche Größe x als Wurzel zur $n$ten Potenz erhoben, wo n irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl oder auch Null bedeuten mag, so darf man nicht unbedingt, wenn $x = 0$ wird, auch $0^n = 0$ setzen, weil dies nur alsdann gelten kann, wenn n eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist.

Wäre $n = -r$ also negativ, so wird $x^n = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$, daher

$$0^n = 0^{-r} = \frac{1}{0} = \pm \infty.$$

Weil $x^0 = \frac{x}{x} = 1$, so wird für $n = 0$

$x^n = x^0 = 1$ und für $x = 0$

$0^n = 0^0 = 1.$

Hieraus folgt daß der Ausdruck 0^n drei verschiedene Werthe haben kann. Ist nemlich

(*I*) n eine positive ganze oder gebrochene Zahl, so wird $0^n = 0$;

(*II*) n eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so wird $0^n = \pm \infty$ und

(*III*) $n = 0$, so wird $0^n = 1$.

So lange daher in einem allgemeinen Ausdruck 0^n, der Exponent n noch nicht näher bestimmt ist, darf man 0^n aus der Rechnung nicht weglassen, sondern muß denselben so lange beibehalten bis n einen bestimmten Werth erhalten hat.

§. 14.

Sehr leicht überzeugt man sich, daß jeder Ausdruck, welcher aus möglichen oder reellen, und unmöglichen oder imaginären Größen zusammengesetzt ist, die Gestalt

$$o = M + N\sqrt{-1}$$

erhalten kann, wo M und N nur mögliche Größen enthalten.

Wäre z. B. $P = (a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) - (g + h\sqrt{-1})$ gegeben, so erhält man auch

$$P = (a + c - g) + (b + d - h)\sqrt{-1}.$$

Für $P = (a + b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})$ wird

$$P = (ac + bd) + (bc - ad)\sqrt{-1}.$$

Für $P = \frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}}$ wird

$$P = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})}{(c + d\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\sqrt{-1}}{c^2 + d^2} \text{ oder}$$

$$P = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}.$$

Alle diejenigen Ausdrücke, welche unter der Gestalt $o = M + N\sqrt{-1}$ vorkommen, berechtigen zu einer merkwürdigen Folgerung. Denn da keine unmögliche Größe eine mögliche Größe vernichten kann, so muß, wenn $M + N\sqrt{-1} = o$ seyn soll, sowol $M = o$ als auch $N = o$ seyn, weil nur in diesem Falle der vorstehende Ausdruck gelten kann. Man erhält daher aus

$$o = M + N\sqrt{-1},$$

wenn M und N nur mögliche Größen enthalten,

$$M = o \text{ und } N = o.$$

Wegen des vielfachen Gebrauchs der verschiedenen Potenzen von $\sqrt{-1}$ ist zu bemerken, daß weil

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^2 &= \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} &&= -1 \\
(\sqrt{-1})^3 &= (\sqrt{-1})^2\,\sqrt{-1} &&= -1\,.\,\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^4 &= (\sqrt{-1})^2\,(\sqrt{-1})^2 &&= -1\,.\,-1 = +1 \\
(\sqrt{-1})^5 &= (\sqrt{-1})^4\,\sqrt{-1} &&= +1\,.\,\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^6 &= (\sqrt{-1})^4\,(\sqrt{-1})^2 &&= -1 \\
(\sqrt{-1})^7 &= (\sqrt{-1})^6\,\sqrt{-1} &&= -1\,.\,\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

u. s. w. ist, so erhält man ganz allgemein, wenn n jede ganze positive Zahl oder o bedeutet

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-1})^{4n+1} &= +\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^{4n+2} &= -1 \\
(\sqrt{-1})^{4n+3} &= -\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^{4n+4} &= +1.
\end{aligned}$$

Der Kürze wegen kann man den Ausdruck $\sqrt{-1}$ durch den Buchstab i bezeichnen.

Wie

Wie unmögliche Größen, welche in den analytischen Ausdrücken vorkommen, einander aufheben können, und diese Ausdrücke nach gehöriger Entwickelung dennoch einen reellen oder möglichen Werth erhalten, davon werden in der Folge mehrere Fälle vorkommen.

§. 15.

Ueber den Gebrauch des Zeichens $>$ oder $<$ wird es nicht undienlich seyn, einiges anzumerken, weil man sonst leicht ohne die erforderliche Behutsamkeit, absurde Resultate erhält. Wird nemlich, wie dies durchgängig vorausgesetzt wird, jede negative Zahl kleiner als eine positive und jede größere negative Zahl, kleiner als eine kleinere negative Zahl angenommen, also $+5 > 0$; $+5 > -3$; $+5 > -12$; $-3 > -20$; $0 > -3$ u. s. w., so wird die hier angedeutete Ungleichheit auch dann noch bestehen, wenn auf beiden Seiten des Ungleichheitszeichens gleiche Zahlen addirt oder subtrahirt werden. So folgt aus $+5 > -12$, wenn auf beiden Seiten die Zahl 8 addirt wird, $+13 > -4$, oder, wenn diese Zahl subtrahirt wird, $-3 > -20$. Aber man darf nicht unbedingt eben so schließen, daß die größere Größe auch alsdann noch größer bleibt, wenn man auf beiden Seiten mit gleicher Zahl multiplizirt oder dividirt. Denn wenn gleich das Vielfache ungleicher Größen auch noch in eben dem Verhältniß ungleich bleibt, so gilt dies doch nicht, wenn man diese Größen in einer entgegengesetzten Bedeutung vielfach nimmt, weil dadurch auch ihre Beziehung auf einander entgegengesetzt wird. Hieraus folgt, daß man ungleiche Größen auf beiden Seiten des Ungleichheitszeichens mit einer gleichen positiven Zahl multipliziren oder dividiren kann, ohne die vorher bestandene Ungleichheit zu ändern; daß es aber nicht erlaubt ist die einzelnen Glieder mit negativen Zahlen zu multipliziren oder zu dividiren. So ist z. B.

$$+5 > -8; \quad -3 > -7; \quad +3 > 0;$$

wenn man aber jedes Glied mit -1 multiplizirt oder dividirt, so erhält man dadurch

$$-5 > +8; \quad +3 > +7; \quad -3 > 0;$$

welches absurd ist.

Die Vorsicht, daß man beim Ungleichheitszeichen die Multiplikation oder Division mit negativen Größen vermeiden muß, ist besonders bei allgemeinen Ausdrücken zu empfehlen, wenn die Buchstaben noch keine Zahlenwerthe erhalten haben. Hätte man z. B. den allgemeinen Ausdruck $nx < n + 1$, und wollte daraus n entwickeln, so erhält man alsdann

$$nx - n < 1 \text{ oder } n(x - 1) < 1.$$

Hieraus darf man aber nicht unbedingt schließen, daß

$$n < \frac{1}{x - 1}$$

ist, weil nur in dem Fall die Division mit $x - 1$ erlaubt ist, wenn man weiß, daß $x - 1$ eine positive Größe wird, d. h. wenn $x > 1$ ist.

Wäre hingegen $x < 1$, so erhält man $0 < n - nx + 1$ oder $0 < n(1 - x) + 1$ oder $-1 < n(1 - x)$, und hieraus $\frac{-1}{1 - x} < n$ oder $\frac{1}{x - 1} < n$, also $n > \frac{1}{x - 1}$. Hieraus folgt, daß, wenn $nx < n + 1$, so erhält man für $x > 1$

$$n < \frac{1}{x - 1}$$

und für $x < 1$

$$n > \frac{1}{x-1}.$$

Sollte es unangemessen scheinen, $-7 < -3$ zu setzen, weil man $+7 > +3$ hat, so erwäge man, daß bei diesen Vergleichungen nur derjenige Werth größer als ein anderer angesehen wird, welcher mehr positive Einheit als der andere enthält, daß sich also alle diese Vergleichungen auf die positive Einheit beziehen. Nun fehlen bei -7 noch 8 positive Einheiten damit diese Größe $= +1$ werde, bei -3 aber nur 4 dieser Einheiten, daher ist offenbar hienach -3 größer als -7.

Ueberhaupt ist jede positive Größe größer und jede negative Größe kleiner als Null. Findet man daher für irgend einen zusammengesetzten Ausdruck, welcher hier durch y bezeichnet werden soll, $y > 0$, so muß y positiv seyn, so wie aus $y < 0$ umgekehrt folgt, daß der Werth von y negativ seyn muß.

§. 16.

Stellt man sich vor, daß von den beiden Größen A und B die eine A durch allmählige Veränderung ihres Zustandes der Größe B gleich wird, so kann dies auf verschiedene Weise geschehen, und man nennt die Werthe, in welche sich A nach und nach verwandelt bis B erreicht ist, die **Zwischenwerthe** von A und B, welche hier **Grenzwerthe** dieser Zwischenwerthe heißen können. Sind die Zwischenwerthe von der Beschaffenheit, daß A dadurch in B übergeht, wenn A allmählig und nur allein durch Wachsen oder nur allein durch allmähliges Abnehmen B erreicht, so sagt man der Uebergang von A zu B geschieht **gleichförmig**. Wenn aber die Zwischenwerthe von der Beschaffenheit sind, daß A theils wachsen theils abnehmen muß um B zu erreichen, so ist der Uebergang von A nach B **ungleichförmig**.

Ist der Uebergang von A nach B gleichförmig, und diese Grenzwerthe haben einerlei Zeichen, so muß jeder Zwischenwerth größer als der kleinste Grenzwerth seyn, auch behalten alsdann alle Zwischenwerthe einerlei Zeichen. Wenn aber die Zeichen der Grenzwerthe verschieden sind, so muß ein Zwischenwerth $= 0$ seyn. Auch müssen sich bei diesem Durchgange durch 0 die Zeichen der Zwischenwerthe ändern.

Z. B. $+5$; $+4$; $+3$; $+2$; $+1$; 0; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; wo $+5$ und -7 die Grenzwerthe sind. Zur Abkürzung sind hier die Zwischenwerthe nur in ganzen Zahlen vorgestellt.

Erfolgt der Uebergang von A nach B **ungleichförmig**, so daß die Zwischenwerthe theils wachsen, theils abnehmen, so kann der Uebergang auf sehr verschiedene Weise geschehen, wenn auch, wie hier vorausgesetzt wird, alle Zwischenwerthe nicht mehr als einmal wachsen und abnehmen, ob sich gleich sehr wohl denken läßt, daß dies Wachsen und Abnehmen sehr oft wiederholt werden kann.

I. Haben die Grenzwerthe einerlei Zeichen, so kann man unter der vorstehenden Voraussetzung sechs verschiedene Uebergänge unterscheiden.

a. wenn die Zwischenwerthe wachsend anfangen,

α. endliche Größen bleiben und einerlei Zeichen behalten,

β. bis ∞ gehen und einerlei Zeichen behalten,

b. wenn die Zwischenwerthe abnehmend anfangen

α. endliche Größen bleiben und einerlei Zeichen behalten,

β. endliche Größen bleiben und ein Zwischenwerth = o wird ohne die Zeichen zu wechseln,

γ. endliche Größen bleiben, zwei Zeichenwechsel entstehen und die Zwischenwerthe zweimal = o werden,

δ. bis ∞ gehen, zwei Zeichenwechsel entstehen und die Zwischenwerthe zweimal = o werden.

Als Beispiele für positive Grenzwerthe + 5 und + 7 dient folgende Zusammenstellung.

(*a. α.*) +5; +6; +7; +8; +9; +10; +11; +12; +13; +12; +11; +10; +9; +8; +7.

(*a. β.*) +5; +6; +7; +8; +9; +10; ..... + ∞; ...... +10; + 9; +8; +7.

(*b. α.*) +5; +4; +3; +2; +3; +4; + 5; +6; + 7.

(*b. β.*) +5; +4; +3; +2; +1; +0; + 1; + 2; + 3; + 4; + 5; + 6; +7.

(*b. γ.*) +5; +4; +3; +2; +1; 0; −1; − 2; −3; −2; −1; 0; + 1; + 2; +3; +4; +5; +6; +7.

(*b. δ.*) +5; +4; +3; +2; +1; 0; −1; −2; −3; ... −∞; ... −3; −2; −1; 0; +1; +2; ... +7.

II. Haben die Grenzwerthe verschiedene Zeichen, so kann man unter der vorstehenden Voraussetzung vier verschiedene Uebergänge unterscheiden:

a. wenn die Zwischenwerthe wachsend anfangen,

α. endliche Größen bleiben, ein Zeichenwechsel entsteht und ein Zwischenwerth = o wird,

β. bis ∞ gehen, ein Zeichenwechsel entsteht und ein Zwischenwerth = o wird;

b. wenn die Zwischenwerthe abnehmend anfangen,

α. endliche Größen bleiben, ein Zeichenwechsel entsteht und ein Zwischenwerth = o wird,

β. bis ∞ gehen, ein Zeichenwechsel entsteht und ein Zwischenwerth = o wird.

Als Beispiel für Grenzwerthe mit verschiedenen Zeichen, + 5 und − 7 dient folgende Zusammenstellung:

(*a. α.*) + 5; + 6; + 7; + 8; + 7; + 6; + 5; + 4; + 3; + 2; + 1; 0; −1; −2; −3; .... −7;

(*a. β.*) + 5; + 6; + 7; .... + ∞; ... + 3; + 2; + 1; 0; −1; −2; −3; −4; −5; −6; −7;

(*b. α.*) + 5; + 4; + 3; + 2; + 1; 0; −1; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8; −9; −10; −9; −8; −7;

(*b. β.*) + 5; + 4; + 3; + 2; + 1; 0; −1; −2; −3; −4; ..... − ∞; .... −9; −8; −7.

III. Bei den vorstehenden ungleichförmigen Uebergängen ist angenommen worden, daß solche nur allmählig ohne Sprung geschehen, allein aus §. 9. ist bekannt, daß Größen, welche allmählig wachsen oder zunehmen zugleich + ∞ und − ∞ werden können. Für diesen Fall kann daher, auch wenn der Grenzwerth A in B durch ∞ übergeht, ein Sprung aus + ∞ in − ∞ oder umgekehrt erfolgen, und man kann daher noch folgende vier verschiedene Fälle unterscheiden, wenn zugleich vorausgesetzt wird, daß alle Zwischenwerthe nur einmal wachsen oder abnehmen:

a. wenn die Grenzwerthe einerlei Zeichen haben,

α. die Zwischenwerthe wachsend anfangen, durch ± ∞ und o gehen und zwei Zeichenwechsel entstehen,

β. die Zwischenwerthe abnehmend anfangen, durch o und $\pm\infty$ gehen und zwei Zeichenwechsel entstehen;

b. wenn die Grenzwerthe verschiedene Zeichen haben,

α. die Zwischenwerthe wachsend anfangen, durch $\pm\infty$ gehen und ein Zeichenwechsel entsteht,

β. die Zwischenwerthe abnehmend anfangen, durch o; $\pm\infty$ und o gehen und drei Zeichenwechsel entstehen.

Folgende Zusammenstellungen für die Grenzwerthe $+5$; $+7$ und $+5$; -7 können zur Erläuterung dienen.

($a.\alpha$.) $+5; +6; +7; +8; +9; +\ldots+\infty; -\infty; \ldots -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; \ldots +7;$

($a.\beta$.) $+5; +4; +3; +2; +1; 0; -1; -2; -3; \ldots -\infty; +\infty; \ldots +9; +8; +7;$

($b.\alpha$.) $+5; +6; +7; +8; +9; \ldots +\infty; -\infty; \ldots -12; -11; -10; -9; -8; -7;$

($b.\beta$.) $+5; +4; +3; +2; +1; 0; -1; -2; -3; \ldots -\infty; +\infty; \ldots +3; +2; +1; 0; -1; -2; \ldots -7.$

Unter den Grenz- und Zwischenwerthen zweier Größen können auch unmögliche Werthe vorkommen, und es lassen sich für diese Fälle ähnliche Betrachtungen anstellen.

Bezeichnet $y = fx$ irgend eine Funkzion von x, und es wird $y = A$ für $x = a$ und $y = B$ für $x = b$, also $fa = A$ und $fb = B$, wo a, b, A, B alle mögliche Größen bedeuten können. Werden nun alle Zahlen zwischen a und b, welche aus dem gleichförmigen Uebergange von a nach b entstehen, statt x in $y = fx$ gesetzt, so nennt man alle dadurch für y entstehenden Werthe **Zwischenwerthe der Funkzion** für die **Grenzwerthe** A und B derselben.

Eine Funkzion, deren Zwischenwerthe innerhalb gegebener Grenzen durchgängig endliche reelle Größen sind, heißt eine **stetige Funkzion**, und wenn einer oder mehrere Zwischenwerthe unendlich groß oder unmöglich werden, eine **unstetige Funkzion**, weil dadurch die Stetigkeit der Zwischenwerthe unterbrochen wird.

Wäre z. B. $fx = \frac{5 + 12x}{1 + x}$ gegeben, so wird $fo = 5$ und $f\infty = 12$ (§. 8.), und weil man hier für alle zwischen $x = o$ bis $x = \infty$ liegende Werthe, wenn solche statt x in fx gesetzt werden, angebliche Werthe für fx, also nur reelle endliche Zwischenwerthe erhält, so ist fx eine stetige Funkzion für $x = o$ bis $x = \infty$.

Für eben dieselbe Funkzion ist $fo = 5$ und $f-2 = 19$, allein es wird $f-1 = \mp\infty$ (§. 9.), daher ist fx für $x = o$ bis $x = -2$ eine unstetige Funkzion. Auch geht hieraus hervor, daß diese Funkzion zwischen $x = +\infty$ bis $-\infty$ unstetig, aber von $x = +\infty$ bis -1 und von $x = -1$ bis $-\infty$ stetig ist.

§. 17.

Sehr oft weiß man, daß eine unbekannte Größe kleiner als eine bekannte und zugleich größer als eine zweite bekannte Größe ist; alsdann kann man zwar den wahren Werth der unbekannten Größe hienach nicht bestimmen, es läßt sich aber hieraus ein Näherungswerth und zugleich die Grenze des Fehlers bestimmen, welcher aus der Annahme des Näherungswerthes entsteht.

Es sey Q eine unbekannte Größe und zugleich bekannt, daß

(I) $\begin{cases} Q < A + a \text{ und} \\ Q > A \text{ ist, wo } A \text{ und } a \text{ bekannte Größen sind.} \end{cases}$

Wäre Q' der gesuchte Näherungswerth und die Grenze des Fehlers oder der größtmögliche Fehler $= q$, so ist offenbar, daß der wahre Werth von Q zwischen $A + a$ und A liegen muß. Nimmt man daher die Hälfte von der Summe der beiden gegebenen Größen A und $A + a$, so wird der Näherungswerth

$$Q' = A + \tfrac{1}{2} a.$$

Weil nun Q nicht größer als $A + a$ und nicht kleiner als A werden kann, so sind offenbar $(A + a) - Q'$ und $Q' - A$ die größtmöglichen Fehler, welche aus der Annahme von $Q' = A + \frac{1}{2} a$ entstehen können. Nun ist $A + a - Q' = \frac{1}{2} a$ und $Q' - A = \frac{1}{2} a$, daher wird für die Annahme $Q' = A + \frac{1}{2} a$ der größtmögliche Fehler

$$q = \tfrac{1}{2} a$$

Wäre hingegen

(II) $\begin{cases} Q < B \text{ und} \\ Q > C \end{cases}$ gegeben, so findet man nach (I), wenn $B = A + a$ und $C = A$ gesetzt wird, $a = B - C$, daher der Näherungswerth

$$Q' = \frac{B + C}{2}$$

und der größtmögliche Fehler

$$q = \frac{B - C}{2}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren findet man für

(III) $\begin{cases} Q < A + a \\ Q > A - a \end{cases}$

$Q' = A$ und $q = a$.

Aus der Voraussetzung, daß

(IV) $\begin{Bmatrix} Q < B \\ Q > C \end{Bmatrix}$, aber Q näher bei B als bei C liegt, folgt, daß Q zwischen B und $\frac{B + C}{2}$ liegen muß, oder es ist $Q < B$ und $Q > \frac{B + C}{2}$, daher nach (II)

$$Q' = \frac{B + (\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C)}{2} = \frac{3B + C}{4},$$

und der größtmögliche Fehler

$$q = \frac{B - \frac{B + C}{2}}{2} = \frac{B - C}{4}.$$

Für $a = 0$ in (III) wird

(V) $\begin{Bmatrix} Q < A \\ Q > A \end{Bmatrix}$, also $Q = A$.

Eben so erhält man für

$$\left.\begin{matrix} Q < 0 \\ Q > 0 \end{matrix}\right\} Q = 0.$$

Wegen allgemeiner Bestimmungen der Näherungs- oder Mittelwerthe gegebener Größen, s. m. §. 998. u. f.

Zweites Kapitel.

Der binomische Lehrsatz.

§. 18.

Jeder aus zwei Gliedern bestehende Ausdruck, wie $a + b$, heißt ein Binomium, oder kurz: ein **Binom**; und derjenige allgemeine Ausdruck, durch welchen man in den Stand gesetzt wird, die einzelnen Glieder von jeder Potenz einer zweitheiligen Größe anzugeben, der **binomische Lehrsatz**. Das Gesetz nach welchem die Glieder für jeden Exponenten eines Binoms fortschreiten, hat zuerst **Newton** gefunden, weshalb man diesen Lehrsatz, welcher von der größten Wichtigkeit in der Analysis ist, auch das **newtonische Binomialtheorem** nennt. Auf dem Grabe Newtons in der Westmünsterabtei findet man diese Entdeckung eingegraben. Für Exponenten welche ganze Zahlen sind findet man durch die Multiplication, wenn man $1 + b$ auf verschiedene Potenzen erhebt:

$$(1 + b)^2 = 1 + 2b + b^2$$
$$(1 + b)^3 = 1 + 3b + 3b^2 + b^3$$
$$(1 + b)^4 = 1 + 4b + 6b^2 + 4b^3 + b^4$$

u. s. w.

Eine weit ausgeführte Berechnung dieser **Binomial-Koeffizienten**, wenn die Exponenten ganze positive Zahlen sind, ist in **Lambert's** Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, Berlin, 1770, *Tab. XXXVI.* Seite 196. enthalten, wovon einige nach der Reihe, wie sie auf einander folgen, hier angeführt sind.

1. 2. 1
1. 3. 3. 1
1. 4. 6. 4. 1
1. 5.10. 10. 5. 1
1. 6.15. 20. 15. 6. 1
1. 7.21. 35. 35. 21. 7. 1
1. 8.28. 56. 70. 56. 28. 8. 1
1. 9.36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1
1.10.45.120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1
1.11.55.165. 330. 462. 462. 330. 165. 55. 11. 1
1.12.66.220. 495. 792. 924. 792. 495. 220. 66. 12. 1
1.13.78.286. 715.1287.1716.1716.1287. 715. 286. 78.13. 1
1.14.91.364.1001.2002.3003.3432.3003.2002.1001.364.91.14.1

§. 19.

Zusatz. Mit Hinweglassung des ersten Gliedes der vorstehenden Binomial-Koeffizienten, bemerkt man leicht, daß solche auch auf nachstehende Art geschrieben werden könnten:

$\frac{2}{1}$; $\frac{2(2-1)}{1.2}$

$\frac{3}{1}$; $\frac{3(3-1)}{1.2}$; $\frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}$

$\frac{4}{1}$; $\frac{4(4-1)}{1.2}$; $\frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}$; $\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4}$

$\frac{5}{1}$; $\frac{5(5-1)}{1.2}$; $\frac{5(5-1)(5-2)}{1.2.3}$; $\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1.2.3.4}$; $\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1.2.3.4.5}$;

u. s. w.

§. 20.

Zur Vermeidung der häufigen Parenthesen, werde $p.p-1.p-2.p-3.p-4$ statt $p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)$ geschrieben, auch zur Abkürzung, wenn p irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bedeutet, folgende Bezeichnung durchgängig hier beibehalten:

$$p_1 = \frac{p}{1};$$

$$p_2 = \frac{p.p-1}{1.2};$$

$$p_3 = \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3};$$

$$p_4 = \frac{p.p-1.p-2.p-3}{1.2.3.4};$$

$$p_5 = \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4}{1.2.3.4.5};$$

und wenn r eine ganze Zahl bedeutet,

$$p_{r-1} = \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \ldots\ldots p-r+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r-1};$$

$$p_r = \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \ldots\ldots p-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r};$$

wo der Anzeiger (Index) r in p_r, welcher mit dem Exponenten einer Potenz nicht verwechselt werden darf, zugleich die Anzahl der Faktoren des Zählers bezeichnet.

Eben so bedeutet:

$$(-p)_1 = \frac{-p}{1};$$

$$(-p)_2 = \frac{-p \cdot -p-1}{1 \cdot 2} = \frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2};$$

$$(-p)_3 = \frac{-p \cdot -p-1 \cdot -p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{p \cdot p+1 \cdot p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$(-p)_4 = \frac{-p \cdot -p-1 \cdot -p-2 \cdot -p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \cdot p+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$(-p)_r = \frac{-p \cdot -p-1 \cdot -p-2 \ldots\ldots -p-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}.$$

Ferner wenn q ebenfalls jede ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl bedeutet:

$$\left(\frac{p}{q}\right)_1 = \frac{\frac{p}{q}}{1};$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)_2 = \frac{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}-1}{1 \cdot 2};$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)_3 = \frac{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}-1 \cdot \frac{p}{q}-2}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)_r = \frac{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}-1 \cdot \frac{p}{q}-2 \ldots\ldots \frac{p}{q}-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}$$

und eben so

$$(p+q)_1 = \frac{p+q}{1};$$

$$(p+q)_2 = \frac{p+q \cdot p+q-1}{1 \cdot 2};$$

$$(p+q)_3 = \frac{p+q \cdot p+q-1 \cdot p+q-2}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$(p+q)_r = \frac{p+q \cdot p+q-1 \cdot p+q-2 \ldots\ldots p+q-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r};$$

u. s. w.

Nach

Nach eben dieser Bezeichnung wird:

$$5_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$9_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$(-2)_3 = \frac{-2 \cdot -3 \cdot -4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)_3 = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

u. s. w.

Durch die vorstehende Bezeichnung wird man in den Stand gesetzt, die wichtigsten analytischen Sätze kurz und bequem auszudrücken. Schon Newton (*Methodus differentialis. Opuscula etc. Tom. I. Laus. 1744. pag. 274.*) bediente sich der hier gebrauchten Anzeiger, um die Stellen der verschiedenen Differenzen zu bezeichnen. Vorzüglich aber hat Hindenburg das Verdienst, die Nothwendigkeit einer zweckmäßigen Bezeichnung in diesen und andern Fällen gezeigt, und mit deren Hülfe die schwierigsten analytischen Untersuchungen ausgeführt zu haben, wovon man sich besonders durch die Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, herausgegeben von C. F. Hindenburg, 1ste Samml. Leipzig 1796. 2te Samml. 1800. überzeugen kann. Anstatt der Hindenburgschen Bezeichnung hat man hier, der mehreren Einfachheit wegen, die vorstehende eingeführt. Zur leichtern Vergleichung der hier gewählten mit der Hindenburgschen Bezeichung, dient folgende Zusammenstellung.

$$p_1 = {}^p\mathfrak{A};\ \ p_2 = {}^p\mathfrak{B};\ \ p_3 = {}^p\mathfrak{C};\ \ p_4 = {}^p\mathfrak{D};\ \ldots\ p_8 = {}^p\mathfrak{H};\ \ldots$$

$$q_1 = {}^q\mathfrak{A};\ \ q_2 = {}^q\mathfrak{B};\ \ldots\ \left(\frac{p}{q}\right)_1 = {}^{\overset{p}{q}}\mathfrak{A};\ \left(\frac{p}{q}\right)_2 = {}^{\overset{p}{q}}\mathfrak{B};\ \ldots$$

$$(p+q)_1 = {}^{p+q}\mathfrak{A};\ (p+q)_6 = {}^{p+q}\mathfrak{F};\ (p+q)_{10} = {}^{p+q}\mathfrak{K};\ \ldots$$

Um p_n oder p_m zu bezeichnen dient ein $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{M}$ mit schwabacher Schrift; nemlich

$$p_n = {}^p\mathfrak{N};\ p_{n-1} = {}^p\overset{-1}{\mathfrak{N}};\ p_{n+1} = {}^p\overset{+1}{\mathfrak{N}};$$

$p_{n+r} = {}^p\overset{+r}{\mathfrak{N}}$, wo r der Distanzexponent heißt. Auch bedient man sich folgender Bezeichnung.

$$p_n = {}^p\overset{n-1}{\mathfrak{A}}.$$

§. 21.

1\. Zusatz. Es ist $p_r = \frac{p \cdot p-1 \ldots p-r+1}{1 \cdot 2 \ldots r}$, und wenn man nach einander $r+1$, $r+2$, ... statt r setzt:

$$p_{r+1} = \frac{p \ldots p-r+1 \cdot p-r}{1 \ldots r \cdot r+1};$$

$$p_{r+2} = \frac{p \ldots p-r \cdot p-r-1}{1 \ldots r+1 \cdot r+2};\ \text{u. s. w.}$$

Bedeutet nun n hier eine positive ganze Zahl, und man setzt $p = r = n$, so wird:

$$n_n = \frac{n \,.\, n-1 \ldots\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots n-2 \,.\, n-1 \,.\, n}, \text{ daher:}$$

$$(I) \quad n_n = 1.$$

Ferner
$$n_{n+1} = \frac{n \ldots\ldots 1 \,.\, 0}{1 \ldots\ldots n \,.\, n+1} = 0;$$

$$n_{n+2} = \frac{n \ldots\ldots 0 \,.\, -1}{1 \ldots\ldots n+1 \,.\, n+2} = 0;$$

$$n_{n+3} = \frac{n \ldots\ldots 0 \,.\, -1 \,.\, -2}{1 \ldots\ldots n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3} = 0; \text{ u. s. w. daher überhaupt}$$

$$(II) \quad n_{n+r} = 0.$$

Weil $n_r = \frac{n \ldots\ldots n-r+1}{1 \ldots\ldots r}$ ist, so findet man, wenn nach einander $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... statt r gesetzt wird

$$n_{n-1} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots\ldots 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-3 \,.\, n-2 \,.\, n-1};$$

$$n_{n-2} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots\ldots 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-4 \,.\, n-3 \,.\, n-2};$$

$$n_{n-3} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots\ldots 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-5 \,.\, n-4 \,.\, n-3}; \text{ u. s. w.}$$

Die Faktoren, welche sich aufheben, weggelassen, giebt:

$$n_{n-1} = \frac{n}{1} = n_1;$$

$$n_{n-2} = \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2} = n_2;$$

$$n_{n-3} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = n_3; \text{ u. s. w. folglich}$$

$$(III) \quad n_{n-r} = n_r.$$

Wegen
$$p_n = \frac{p \,.\, p-1 \,.\, p-2 \ldots\ldots p-n+2 \,.\, p-n+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-1 \,.\, n}$$

und
$$p_{n-1} = \frac{p \,.\, p-1 \,.\, p-2 \ldots\ldots p-n+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-1} \text{ wird}$$

$$p_n = \frac{p-n+1}{n} p_{n-1}, \text{ daher}$$

$$(IV) \quad n\, p_n = (p - n + 1)\, p_{n-1}.$$

Hierin $n = 1$ gesetzt giebt $p = p \,.\, p_0$ oder

$$(V) \quad p_0 = 1.$$

In (IV) werde $n - r$ statt n gesetzt, so erhält man
$(n - r)\, p_{n-r} = (p - n - r + 1)\, p_{n-r-1}$ oder für $n = 0$,
$-r\, p_{-r} = (p - r + 1)\, p_{-r-1}$. Hierin nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt r gesetzt, giebt

$$0 \cdot p_0 = (p+1)p_{-1} \text{ also } p_{-1} = 0$$
$$-p_{-1} = p \cdot p_{-2} \text{ also } p_{-2} = 0$$
$$-2p_{-2} = (p-1)p_{-3} \text{ also } p_{-3} = 0 \text{ u. s. w. folglich}$$
$$(VI)\quad p_{-r} = 0,$$
und wenn in (*V*) $p = 0$ gesetzt wird, so erhält man
$$(VII)\quad 0_0 = 1;$$
es ist daher 0_0 mit 0^0 einerlei (§. 13.), dagegen wird
$$(VIII)\quad 0_r = 0.$$

§. 22.

2. **Zusatz.** Wenn p und q jede mögliche positive oder negative Zahl bedeuten, so ist $n p_n = (p-n+1)\, p_{n-1}$ und $m q_m = (q-m+1)\, q_{m-1}$, also
$$n\, p_n q_m = (p-n+1)\, p_{n-1} q_m \text{ und}$$
$$m\, p_n q_m = (q-m+1)\, p_n q_{m-1}\text{, daher}$$
$$(I)\quad (n+m)\, p_n q_m = (p-n+1)\, p_{n-1} q_m + (q-m+1)\, p_n q_{m-1}.$$
Hierin nach einander $r, r-1, r-2, \ldots\ldots 3, 2, 1, 0$ statt n, und $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots r-2, r-1, r$ statt m gesetzt giebt:
$$r p_r = (p-r+1)\, p_{r-1}$$
$$r p_{r-1} q_1 = (p-r+2)\, p_{r-2} q_1 + q \cdot p_{r-1}$$
$$r p_{r-2} q_2 = (p-r+3)\, p_{r-3} q_2 + (q-1)\, p_{r-2} q_1$$
$$r p_{r-3} q_3 = (p-r+4)\, p_{r-4} q_3 + (q-2)\, p_{r-3} q_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r p_2 q_{r-2} = (p-1)\, p_1 q_{r-2} + (q-r+3)\, p_2 q_{r-3}$$
$$r p_1 q_{r-1} = p \cdot q_{r-1} + (q-r+2)\, p_1 q_{r-2}$$
$$r\, q_r = + (q-r+1)\, q_{r-1}$$
Durch Summirung dieser einzelnen Glieder erhält man, wenn die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen werden,
$$r(p_r + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + \ldots + p_1 q_{r-1} + q_r) = (p+q-r+1)(p_{r-1} + p_{r-2}q_1 + \ldots + p_1 q_{r-2} + q_{r-1})$$
oder
$$p_r + p_{r-1}q_1 + \ldots\ldots q_r = \frac{p+q-r+1}{r}(p_{r-1} + p_{r-2}q_1 + \ldots\ldots + q_{r-1}).$$
Nach einander hierin $r-1, r-2, r-3, \ldots\ldots 3, 2, 1$ statt r gesetzt, giebt:
$$p_{r-1} + p_{r-2}q_1 + \ldots\ldots + q_{r-1} = \frac{p+q-r+2}{r-1}(p_{r-2} + p_{r-3}q_1 + \ldots\ldots + q_{r-2});$$
$$p_{r-2} + p_{r-3}q_1 + \ldots\ldots + q_{r-2} = \frac{p+q-r+3}{r-2}(p_{r-3} + p_{r-4}q_1 + \ldots\ldots + q_{r-3});$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_2 + p_1 q_1 + q_2 = \frac{p+q-1}{2}(p_1 + q_1);$$
$$p_1 + q_1 = \frac{p+q}{1}.$$

Jeder dieser Ausdrücke auf der linken Seite ist ein Faktor des unmittelbar darüber stehenden auf der rechten Seite, daher erhält man durch die Multiplikation der über einander stehenden Ausdrücke:

$$p_r + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + \dots + p_1 q_{r-1} + q_r = \frac{p+q-r+1}{r} \cdot \frac{p+q-r+2}{r-1} \cdot \frac{p+q-r+3}{r-2} \cdots \cdots \frac{p+q-1}{2} \cdot \frac{p+q}{1}.$$

oder weil der letzte Ausdruck $= (p+q)_r$ ist (§. 20.), so erhält man

$$(II)\ (p+q)_r = p_r + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + p_{r-3}q_3 + \dots + p_2 q_{r-2} + p_1 q_{r-1} + q_r.$$

Hienach ist:

$$(p+q)_1 = p_1 + q_1;$$
$$(p+q)_2 = p_2 + p_1 q_1 + q_2;$$
$$(p+q)_3 = p_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_3;$$
$$(p+q)_4 = p_4 + p_3 q_1 + p_2 q_2 + p_1 q_3 + q_4;$$

u. s. w.

Für $p = 5$, $q = 6$ und $r = 3$ wird

$$(5+6)_3 = 5_3 + 5_2 6_1 + 5_1 6_2 + 6_3 \text{ oder}$$

$$\frac{11.10.9}{1.2.3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{6}{1} + \frac{5}{1} \cdot \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.$$

§. 23.

Bedeutet sowohl p als q irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, und wird die unbekannte Summe der folgenden Reihe:

$$1;\ p_1 b;\ p_2 b^2;\ p_3 b^3;\ p_4 b^4;\ \dots\ p_{r-1} b^{r-1};\ p_r b^r;\ \dots$$

welche ohne Ende fortgehen mag, durch fp bezeichnet, weil solche als eine Funktion von p anzusehen ist, so giebt dies:

$$(I)\ fp = 1 + p_1 b + p_2 b^2 + p_3 b^3 + p_4 b^4 + \dots + p_{r-1} b^{r-1} + p_r b^r + \dots$$

In diesen Ausdruck q statt p gesetzt, so wird (§. 8.)

$$fq = 1 + q_1 b + q_2 b^2 + q_3 b^3 + q_4 b^4 + \dots + q_{r-1} b^{r-1} + q_r b^r + \dots$$

und wenn fp mit fq multiplizirt wird,

$$fp \cdot fq = 1 + \left.\begin{array}{l} p_1 \\ q_1 \end{array}\right| b + \left.\begin{array}{l} p_2 \\ p_1 q_1 \\ q_2 \end{array}\right| b^2 + \left.\begin{array}{l} p_3 \\ p_2 q_1 \\ p_1 q_2 \\ q_3 \end{array}\right| b^3 + \dots + \left.\begin{array}{l} p_{r-1} \\ p_{r-2} q_1 \\ p_{r-3} q_2 \\ \dots\dots \\ p_2 q_{r-3} \\ p_1 q_{r-2} \\ q_{r-1} \end{array}\right| b^{r-1} + \left.\begin{array}{l} p_r \\ p_{r-1} q_1 \\ p_{r-2} q_2 \\ \dots\dots \\ p_3 q_{r-3} \\ p_2 q_{r-2} \\ p_1 q_{r-1} \\ q_r \end{array}\right| b^r + \dots$$

oder wenn man die Summe der zusammengehörigen Glieder eines jeden Koeffizienten nach (§. 22.) (II) ausdrückt, erhält man:

$$fp \cdot fq = 1 + (p+q)_1 b + (p+q)_2 b^2 + \dots + (p+q)_r b^r + \dots$$

Es ist aber auch, wenn $p + q$ statt p in (I) gesetzt wird,

$$f(p+q) = 1 + (p+q)_1 b + (p+q)_2 b^2 + \dots + (p+q)_r b^r + \dots$$

woraus folgt:

$$(II)\ f(p + q) = fp \cdot fq.$$

Für $q = p$ wird $f(2p) = fp \cdot fp = (fp)^2$;
Für $q = 2p$ wird $f(3p) = fp\, f(2p) = (fp)^3$;
Für $q = 3p$ wird $f(4p) = fp\, f(3p) = (fp)^4$; u. s. w. daher wenn g jede ganze positive Zahl bedeutet:

$$(III)\ (fp)^g = f(gp).$$

In (I) und (III) werde 1 statt p gesetzt, so erhält man

$$f1 = 1 + b \text{ und } fg = (f1)^g \text{ also } fg = (1 + b)^g.$$

Nach (I) ist aber, wenn g statt p gesetzt wird

$$fg = 1 + g_1 b + g_2 b^2 + \ldots + g_r b^r + \ldots \text{ folglich}$$

$$(IV)\ (1 + b)^g = 1 + g_1 b + g_2 b^2 + g_3 b^3 + \ldots + g_r b^r + \ldots$$

wo der Exponent g jede positive ganze Zahl bedeuten kann.

Man setze $p = \frac{h}{g}$, wo g und h positive ganze Zahlen sind, welche außer der Einheit, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist (III)

$$\left(f\frac{h}{g}\right)^g = f\left(g \cdot \frac{h}{g}\right) = fh.$$

Wird h statt g in (IV) gesetzt, so ist $fh = (1 + b)^h$, daher

$$\left(f\frac{h}{g}\right)^g = (1 + b)^h, \text{ also } (1 + b)^{\frac{h}{g}} = f\frac{h}{g}; \text{ oder, weil nach } (I)$$

$$f\frac{h}{g} = 1 + \left(\frac{h}{g}\right)_1 b + \left(\frac{h}{g}\right)_2 b^2 + \ldots \text{ so wird}$$

$$(V)\ (1 + b)^{\frac{h}{g}} = 1 + \left(\frac{h}{g}\right)_1 b + \left(\frac{h}{g}\right)_2 b^2 + \ldots + \left(\frac{h}{g}\right)_r b^r + \ldots$$

so daß der Satz (IV) auch für jede positive gebrochene Zahl $\frac{h}{g}$ gilt.

Bedeutet nun m jede positive ganze oder gebrochene Zahl, so ist allgemein bewiesen, daß

$$fm = (1 + b)^m.$$

Für $m = 0$ wird $f0 = (1 + b)^0 = 1$, also $f0 = 1$.

In (II) werde $p = m$ und $q = -m$ gesetzt, so ist
$fm \cdot f(-m) = f(m - m) = f0$; aber $f0 = 1$ daher

$$fm \cdot f(-m) = 1 \text{ oder } f(-m) = \frac{1}{fm} = \frac{1}{(1 + b)^m} = (1 + b)^{-m}.$$

Nach (I) ist aber $f(-m) = 1 + (-m)_1 b + (-m)_2 b^2 + \ldots$ folglich

$$(1 + b)^{-m} = 1 + (-m)_1 b + (-m)_2 b^2 + \ldots + (-m)_r b^r + \ldots$$

so daß die Sätze (IV) und (V) auch für jede ganze oder gebrochene negative Zahl gelten.

Bedeutet daher der Exponent n irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so ist allgemein erwiesen, daß

$$(VI)\ (1+b)^n = 1 + n_1 b + n_2 b^2 + n_3 b^3 + n_4 b^4 + \ldots + n_r b^r + \ldots\ldots$$

ist, wodurch man ein Mittel erhält, jedes Binom $1 + b$ auf die $n$te Potenz zu erheben.

Wäre n eine irrationale Zahl, etwa $n = \sqrt[r]{m}$, so läßt sich allemal irgend ein Bruch angeben, welcher dieser irrationalen Zahl so nahe kommt, als erfordert wird. Da nun der Satz (VI) auch gilt wenn n ein Bruch ist, so muß er auch für jeden irrationalen Exponenten gelten. Für den Fall, daß m negativ und r gerade wird, erhält man für n eine unmögliche Größe (§. 14.), daher muß auch der Satz (VI) noch gelten, wenn der Exponent n eine unmögliche Größe ist.

§. 24.

Es giebt verschiedene, theils mehr theils minder strenge Beweise für den binomischen Lehrsatz. **Euler** hat zuerst im neunzehnten Bande der neuen Petersburger Commentarien vom Jahr 1774, in der Abhandlung: *Demonstratio theorematis Neutoniani etc.* (S. 130.) einen Beweis geführt, dessen Gang wesentlich mit dem im vorigen §. gewählten überein kommt. In dem Eulerschen Beweise sowohl als in einem spätern von **Segner** (*Demonstratio universalis Theorematis binomialis Neutoni. — Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin, Année 1777. p. 37.*), wird der zur Grundlage dienende Satz, daß $f(p+q) = fp \,.\, fq$ ist, nicht allgemein bewiesen, welches aber von Hn. v. **Busse** (Kleine Beiträge zur Mathematik und Physik. *I.* Theil. Leipzig 1786. S. 17.) und von Hn. **Rothe**. (*Theórema binomiale ex simplic. Anal. finit. fontibus univers. demonstratum. Lipsiae* 1796.) geschehen ist. Der Hülfssatz §. 22. ist nach **Klügel** (Mathemat. Wörterbuch, *I.* Theil, S. 319.) vorgetragen.

§. 25.

Wäre n jede ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so ist §. 23. allgemein bewiesen, daß alsdann:

$$(1+b)^n = 1 + \frac{n}{1}b + \frac{n.n-1}{1.2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3 + \ldots + \frac{n\ldots n-r+1}{1\ldots r}b^r + \ldots\ldots$$

Man setzt $\frac{x}{a}$ statt b, und multiplizire hienächst die Gleichung auf beiden Seiten mit a^n, so wird

$$a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n\ldots n-r+1}{1\ldots r}a^{n-r}x^r + \ldots$$

oder man erhält, weil $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = (a+x)^n$ ist,

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + \ldots + \frac{n.n-1\ldots n-r+1}{1.2\ldots r}a^{n-r}x^r + \ldots$$

Wird $-x$ statt x gesetzt, so erhält man auch

$$(a-x)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + \ldots \pm \frac{n.n-1\ldots n-r+1}{1.2\ldots r}a^{n-r}x^r \mp \ldots$$

wo die obern Zeichen für ein gerades und die untern für ein ungerades r gelten.

Ganz allgemein wird hienach, wenn nur die obern oder nur die untern Zeichen gelten:

$$(a \pm x)^n$$
$$= a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}x^2 \pm \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}x^4 \pm \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^{n-5}x^5 + \ldots$$

Diese Reihe muß abbrechen, wenn n eine ganze positive Zahl ist; aber ohne Ende fort laufen, wenn n ein Bruch oder negativ ist.

Bedient man sich der §. 20. eingeführten Bezeichnung, so wird

$$(a \pm x)^n = a^n \pm n_1 a^{n-1}x + n_2 a^{n-2}x^2 \pm n_3 a^{n-3}x^3 + n_4 a^{n-4}x^4 \pm \ldots.$$

und wenn man den Koeffizienten des ersten Gliedes nicht mit zählt, so heißt n_1 der erste und überhaupt n_r der $r$te Binomialkoeffizient.

Nach dieser Bezeichnung ist alsdann:

$$n_1 = \frac{n}{1};$$
$$n_2 = \frac{n.n-1}{1.2};$$
$$n_3 = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_{r-1} = \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-r+3.n-r+2}{1.2.3\ldots\ldots r-2.r-1};$$
$$n_r = \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-r+2.n-r+1}{1.2.3\ldots\ldots r-1.r};$$
$$n_{r+1} = \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-r+1.n-r}{1.2.3\ldots\ldots r.r+1};$$

u. s. w. wo r eine positive ganze Zahl, n aber jede ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bedeutet.

§. 26.

1. Zusatz. Hieraus übersieht man leicht, daß der letzte Faktor im Zähler eines Binomialkoeffizienten gefunden wird, wenn man vom ersten Faktor des Zählers, den letzten Faktor des Nenners abzieht und dazu die Zahl 1 addirt. Eben so findet man für jeden willkührlichen Faktor des Nenners, den zugehörigen Faktor des Zählers, wenn der Faktor des Nenners vom ersten Faktor des Zählers abgezogen und dazu 1 addirt wird, vorausgesetzt, daß der willkührlich angenommene Faktor des Nenners, eine ganze zwischen 1 und dem letzten Faktor des Nenners enthaltene Zahl sey. Wäre z. B. $m > 1$ und $m < r$ so erhält man im Binomialkoeffizienten n_r für den Faktor des Nenners m, den zugehörigen Faktor des Zählers $= n - m + 1$, oder

$$n_r = \frac{n.n-1\ldots.n-m+1\ldots.n-r+1}{1.2\ldots.m\ldots.r}.$$

Wäre umgekehrt irgend ein Faktor des Zählers gegeben, so findet man den zugehörigen Faktor des Nenners, wenn der gegebene Faktor vom ersten Faktor des Zählers abgezogen und zum Rest die Zahl 1 addirt wird, vorausgesetzt daß der gegebene Faktor zwischen dem ersten und letzten Faktor des Zählers enthalten ist. So ist für den Binomialkoeffizienten n_r wenn m irgend

ein Faktor des Zählers ist, der zugehörige Faktor des Nenners $= n - m + 1$, oder

$$n_r = \frac{n \,.\, n-1 \ldots\ldots m \ldots\ldots n-r+1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots n-m+1 \ldots\ldots r}.$$

§. 27.

2. **Zusatz.** Weil $n_{n-r} = n_r$ (§. 21. *III.*), so folgt hieraus, daß wenn n eine positive ganze Zahl ist, so müssen die von beiden Enden der Reihe gleich weit abstehenden Binomialkoeffizienten, einander gleich seyn, oder es ist:

$$(a+x)^n = a^n + n_1 a^{n-1}x + n_2 a^{n-2}x^2 + n_3 a^{n-3}x^3 + \ldots + n_3 a^3 x^{n-3} + n_2 a^2 x^{n-2} + n_1 a x^{n-1} + x^n$$

und eben so:

$$(a-x)^n = a^n - n_1 a^{n-1}x + n_2 a^{n-2}x^2 - n_3 a^{n-3}x^3 + \ldots \pm n_2 a^2 x^{n-2} \mp n_1 a x^{n-1} \pm x^n;$$

wo die obern Zeichen für ein gerades und die untern, für ein ungerades n gelten.

§. 28.

3. **Zusatz.** Wird der Koeffizient des ersten Gliedes einer Binomialreihe nicht mit gezählt (§. 25.), so gehört zum $r+1$ten Gliede der Reihe, der $r$te Binomialkoeffizient und zum $r$ten Gliede der $r-1$te Binomialkoeffizient.

Nun sey n eine ganze positive Zahl, so besteht die Binomialreihe aus $n+1$ Gliedern, in welcher die von beiden Enden gleich weit ab stehenden Koeffizienten einander gleich sind. Ist alsdann n eine gerade Zahl, so ist die Anzahl der Glieder ungerade und alle Koeffizienten, bis auf den mittelsten, sind Paarweise vorhanden. Der mittelste Koeffizient, welcher nur einfach vorkommt, gehört zum $\frac{1}{2}n+1$ten Gliede, ist also der $\frac{1}{2}n$te Binomialkoeffizient. Man findet daher, wenn n eine gerade ganze Zahl ist, den Koeffizienten des mittelsten Gliedes der Binomialreihe, oder

$$n_{\frac{1}{2}n} = \frac{n \,.\, n-1 \ldots\ldots \frac{1}{2}n+2 \,.\, \frac{1}{2}n+1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots \frac{1}{2}n-1 \,.\, \frac{1}{2}n}.$$

Wäre n ungerade, so ist die Anzahl der Glieder oder $n+1$ eine gerade Zahl, also die Koeffizienten der beiden mittlern Glieder oder des $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}+1$ten einander gleich. Es sind alsdann auch die $\frac{n+1}{2}-1 = \frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ten Binomialkoeffizienten einander gleich, und man findet daher, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist, für jedes der beiden mittlern Reihenglieder, den zugehörigen Binomialkoeffizienten

$$n_{\frac{n-1}{2}} = \frac{n \,.\, n-1 \ldots\ldots \frac{1}{2}(n+5) \,.\, \frac{1}{2}(n+3)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots \frac{1}{2}(n-3) \,.\, \frac{1}{2}(n-1)}.$$

So ist z. B. für $n = 10$, $\frac{1}{2}n+1 = 6$ also der mittelste Binomialkoeffizient

$$\frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 252$$

und für $n = 11$ wird $\frac{1}{2}(n+3) = 7$ also einer von den beiden Koeffizienten der mittlern Reihenglieder

$$\frac{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 462.$$

§. 29.

Setzt man $-n$ statt n (§. 25.), so wird:

$$\frac{1}{(a\pm x)^n}=\frac{1}{a^n}\mp\frac{n}{1}\frac{x}{a^{n+1}}\pm\frac{n.n+1}{1.\ 2}\frac{x^2}{a^{n+2}}\mp\frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2\ .\ 3}\frac{x^3}{a^{n+3}}\pm\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\frac{x^4}{a^{n+4}}\mp\ldots.$$

Durch ähnliche Vertauschungen erhält man

$$(a\pm x)^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{n}{m}}\left[1\pm\frac{n}{m}\frac{x}{a}-\frac{n}{m}\frac{m-n}{2m}\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{n}{m}\frac{m-n}{2m}\frac{2m-n}{3m}\frac{x^3}{a^3}-\frac{n}{m}\frac{m-n}{2m}\frac{2m-n}{3m}\frac{3m-n}{4m}\frac{x^4}{a^4}\pm\ldots\right]$$

$$\sqrt[n]{(a\pm x)}=\sqrt[n]{a}\left[1\pm\frac{1}{n}\frac{x}{a}-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{2n-1}{3n}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{2n-1}{3n}\frac{3n-1}{4n}\frac{x^4}{a^4}\pm\ldots\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(a\pm x)}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left[1\mp\frac{1}{n}\frac{x}{a}+\frac{1}{n}\frac{n+1}{2n}\frac{x^2}{a^2}\mp\frac{1}{n}\frac{n+1}{2n}\frac{2n+1}{3n}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1}{n}\frac{n+1}{2n}\frac{2n+1}{3n}\frac{3n+1}{4n}\frac{x^4}{a^4}\mp\ldots\right]$$

Nach der eingeführten Bezeichnung kann man auch den zuerst gefundenen Ausdruck auf folgende Art darstellen:

$$\frac{1}{(a\pm x)^n}=\frac{1}{a^n}\mp n_1\frac{x}{a^{n+1}}+(n+1)_2\frac{x^2}{a^{n+2}}\mp(n+2)_3\frac{x^3}{a^{n+3}}+(n+3)_4\frac{x^4}{a^{n+4}}\mp\ldots.$$

wo durchgängig entweder nur die obern oder nur die untern Zeichen gelten.

§. 30.

Die einzelnen Glieder der Reihen im vorigen §. werden unter übrigens gleichen Umständen desto größer, je größer x und je kleiner a wird. Es ist aber oft sehr wichtig, daß diese Glieder schnell kleiner werden, daher kann man zu diesem Zwecke folgende Umänderung bewirken.

Für $z=\frac{x}{a+x}$ ist $x=\frac{az}{1-z}$; $(a+x)=\frac{a}{1-z}$ und $(a+x)^n=a^n(1-z)^{-n}$. Aber §. 25.

$$(1-z)^{-n}=1-(-n)_1 z+(-n)_2 z^2-(-n)_3 z^3+\ldots.\ \text{oder}$$

$$(1-z)^{-n}=1+\frac{n}{1}z+\frac{n\ .\ n+1}{1\ .\ 2}z^2+\frac{n\ .\ n+1\ .\ n+2}{1\ .\ 2\ .\ 3}z^3+\ldots.$$

daher erhält man, wenn in der Reihe $\frac{x}{a+x}$ statt z gesetzt und auf beiden Seiten mit a^n multiplizirt wird, einen zweiten Ausdruck für jede Potenz einer zweitheiligen Größe, oder

$$(a+x)^n=a^n\left[1+\frac{n}{1}\frac{x}{a+x}+\frac{n.n+1}{1.\ 2}\frac{x^2}{(a+x)^2}+\frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2\ .\ 3}\frac{x^3}{(a+x)^3}+\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\frac{x^4}{(a+x)^4}+\ldots\right]$$

Wird nach einander $\frac{n}{m}$; $\frac{1}{n}$; $-n$; $-\frac{1}{n}$ statt n gesetzt, so entstehen folgende Ausdrücke:

$$(a+x)^{\frac{n}{m}}$$
$$=a^{\frac{n}{m}}\left[1+\frac{n}{m}\frac{x}{a+x}+\frac{n}{m}\frac{n+m}{2m}\frac{x^2}{(a+x)^2}+\frac{n}{m}\frac{n+m}{2m}\frac{n+2m}{3m}\frac{x^3}{(a+x)^3}+\frac{n}{m}\frac{n+m}{2m}\frac{n+2m}{3m}\frac{n+3m}{4m}\frac{x^4}{(a+x)^4}+\ldots\right]$$

$$\sqrt[n]{(a+x)}$$
$$=\sqrt[n]{a}\left[1+\frac{1}{n}\frac{x}{a+x}+\frac{1}{n}\frac{1+n}{2n}\frac{x^2}{(a+x)^2}+\frac{1}{n}\frac{1+n}{2n}\frac{1+2n}{3n}\frac{x^3}{(a+x)^3}+\frac{1}{n}\frac{1+n}{2n}\frac{1+2n}{3n}\frac{1+3n}{4n}\frac{x^4}{(a+x)^4}+\ldots\right]$$

$$\frac{1}{(a+x)^n}$$
$$=\frac{1}{a^n}\left[1-\frac{n}{1}\frac{x}{a+x}+\frac{n.n-1}{1.\ 2}\frac{x^2}{(a+x)^2}-\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2\ .\ 3}\frac{x^3}{(a+x)^3}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\frac{x^4}{(a+x)^4}-\ldots\ldots\right]$$
$$\frac{1}{\sqrt[n]{(a+x)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left[1-\frac{1}{n}\frac{x}{a+x}-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{x^2}{(a+x)^2}-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{2n-1}{3n}\frac{x^3}{(a+x)^3}-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}\frac{2n-1}{3n}\frac{3n-1}{4n}\frac{x^4}{(a+x)^4}-\ldots\right]$$

§. 31.

Giebt man den Größen n und m, §. 29. und 30. bestimmte Zahlenwerthe, so findet man

$$\frac{1}{a\pm x}=\frac{1}{a}\mp\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}\mp\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}\mp\frac{x^5}{a^6}+\ldots$$
$$\frac{1}{(a\pm x)^2}=\frac{1}{a^2}\mp\frac{2x}{a^3}+\frac{3x^2}{a^4}\mp\frac{4x^3}{a^5}+\frac{5x^4}{a^6}\mp\frac{6x^5}{a^7}+\ldots$$
$$\frac{1}{(a\pm x)^3}=\frac{1}{a^3}\mp\frac{3}{1}\frac{x}{a^4}+\frac{3.4}{1.2}\frac{x^2}{a^5}\mp\frac{4.5}{1.2}\frac{x^3}{a^6}+\frac{5.6}{1.2}\frac{x^4}{a^7}\mp\frac{6.7}{1.2}\frac{x^5}{a^8}+\ldots\ldots$$
$$\sqrt{(a\pm x)}=\sqrt{a}\left[1\pm\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\frac{x^4}{a^4}\pm\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\frac{x^5}{a^5}-\frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}\frac{x^6}{a^6}\pm\ldots\right]$$
$$\sqrt{(a+x)}=\sqrt{a}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{a+x}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{(a+x)^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{(a+x)^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^4}{(a+x)^4}+\ldots\right]$$
$$\sqrt[3]{(a\pm x)}=\sqrt[3]{a}\left[1\pm\frac{1}{3}\frac{x}{a}-\frac{1.2}{3.6}\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{1.2.5}{3.6.9}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\frac{x^4}{a^4}\pm\frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15}\frac{x^5}{a^5}-\ldots\ldots\right]$$
$$\sqrt[3]{(a+x)}=\sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1}{3}\frac{x}{a+x}+\frac{1.4}{3.6}\frac{x^2}{(a+x)^2}+\frac{1.4.7}{3.6.9}\frac{x^3}{(a+x)^3}+\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}\frac{x^4}{(a+x)^4}+\ldots\ldots\right]$$
$$\sqrt[3]{(a\pm x)^2}=\sqrt[3]{a^2}\left[1\pm\frac{2}{3}\frac{x}{a}-\frac{2.1}{3.6}\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{2.1.4}{3.6.9}\frac{x^3}{a^3}-\frac{2.1.4.7}{3.6.9.12}\frac{x^4}{a^4}\pm\frac{2.1.4.7.10}{3.6.9.12.15}\frac{x^5}{a^5}-\ldots\ldots\right]$$
$$\frac{1}{\sqrt{(a\pm x)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[1\mp\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{a^2}\mp\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^4}{a^4}\mp\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{x^5}{a^5}+\ldots\ldots\right]$$
$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{x}{a+x}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{(a+x)^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{(a+x)^3}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\frac{x^4}{(a+x)^4}-\ldots\ldots\right]$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a\pm x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left[1\mp\frac{1}{3}\frac{x}{a}+\frac{1.4}{3.6}\frac{x^2}{a^2}\mp\frac{1.4.7}{3.6.9}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}\frac{x^4}{a^4}\mp\frac{1.4.7.10.13}{3.6.9.12.15}\frac{x^5}{a^5}+\ldots\ldots\right]$$

§. 32.

Bezeichnet n jede mögliche und r irgend eine ganze positive Zahl, so ist (§. 25.) der $r$te Binomialkoeffizient

$$(I)\ n_r=\frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-r+2.n-r+1}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ r-1\ .\ r}.$$

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung für die Binomialkoeffizienten, setze man $-n$ statt n, so findet man

$$(-n)_r=\frac{-n.-n-1.-n-2\ldots\ldots-n-r+2.-n-r+1}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ r-1\ .\ r}\ \text{oder}$$

$$(II)\ (-n)_r = \pm \frac{n.n+1.n+2\ldots\ldots n+r-2.n+r-1}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ r-1\ .\ r},$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Wird $\frac{n}{m}$ statt n in (I) gesetzt, so wird

$$\left(\frac{n}{m}\right)_r = \frac{\frac{n}{m}.\frac{n}{m}-1.\frac{n}{m}-2\ldots\frac{n}{m}-r+2.\frac{n}{m}-r+1}{1\ .\ 2\ \ .\ 3\ \ \ldots\ \ r-1\ \ .\ \ r}$$

$$= \frac{n.n-m.n-2m\ldots\ldots n-mr+2m.n-mr+m}{m.\ 2m.\ 3m\ \ldots\ldots(r-1)m\ \ .\ \ rm} \text{ oder}$$

$$(III)\ \left(\frac{n}{m}\right)_r = \mp \frac{n.m-n.2m-n\ldots\ldots(r-2)m-n.(r-1)m-n}{m.\ 2m\ .\ 3m\ \ \ldots\ldots(r-1)m\ \ .\ \ rm}$$

In diesen Ausdruck $-n$ statt n gesetzt, giebt

$$(IV)\ \left(-\frac{n}{m}\right)_r = \pm \frac{n.m+n.2m+n\ldots\ldots(r-2)m+n.(r-1)m+n}{m.\ 2m\ .\ 3m\ \ \ldots\ldots(r-1)m\ \ .\ \ rm}$$

und wenn man in (III) und (IV) zuerst $n = 1$ und dann $m = n$ setzt, so wird

$$(V)\ \left(\frac{1}{n}\right)_r = \mp \frac{1.n-1.2n-1\ldots\ldots(r-2)n-1.(r-1)n-1}{n.\ 2n\ .\ 3n\ \ \ldots\ldots(r-1)n\ \ .\ \ rn}$$

$$(VI)\ \left(-\frac{1}{n}\right)_r = \pm \frac{1.n+1.2n+1\ldots\ldots(r-2)n+1.(r-1)n+1}{n.\ 2n\ .\ 3n\ \ \ldots\ldots(r-1)n\ \ .\ \ rn},$$

wo durchgängig die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades r gelten.

Die Werthe der vorstehenden Ausdrücke für $r = 0$, findet man nach §. 21. (V).

§. 33.

1. **Zusatz.** In (II) werde nach einander 1, 2, 3, ... statt n gesetzt, so erhält man:

$$(-1)_r = \pm \frac{1.2.3\ldots\ldots r-1.r}{1.2.3\ldots\ldots r-1.r} = \pm 1 = (-1)^r$$

$$(-2)_r = \pm \frac{2.3.4\ldots\ldots r.r+1}{1.2.3\ldots\ldots r-1.r} = \pm \frac{r+1}{1}$$

$$(-3)_r = \pm \frac{3.4.5\ldots\ldots r+1.r+2}{1.2.3\ldots\ldots r-1\ .\ r} = \pm \frac{r+1.r+2}{1\ .\ 2}$$

$$(-4)_r = \pm \frac{4.5.6\ldots\ldots r+2.r+3}{1.2.3\ldots\ldots r-1\ .\ r} = \pm \frac{r+1.r+2.r+3}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

und überhaupt:

$$(-n)_r = \pm \frac{r+1.r+2.r+3\ \ldots\ldots r+n-2.r+n-1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ \ldots\ldots n-2\ \ .\ n-1}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades und das untere für ein ungerades r gilt.

Vergleicht man hiemit den im vorigen §. für $(-n)_r$ gefundenen Werth, so folgt daraus, wenn n und r ganze Zahlen sind:

$$\frac{n.n+1\ldots\ldots n+r-2.n+r-1}{1.\ 2\ \ldots\ldots r-1\ \ .\ \ r} = \frac{r+1.r+2\ldots\ldots r+n-2.r+n-1}{1\ .\ 2\ \ \ldots\ldots\ n-2\ \ .\ n-1}$$

Für $n = 5$ und $r = 9$ erhält man z. B.

$$\frac{5.6.7.8.9.10.11.12.13}{1.2.3.4.5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} = \frac{10.11.12.13}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

§. 34.

2. **Zusatz.** In (V) werde nach einander 2, 3, 4, . . . statt n gesetzt, so erhält man:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_r = \mp \frac{1.1.3.5.7\ldots.2r-5.2r-3}{2.4.6.8.10\ldots.2(r-1).\ 2r};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)_r = \mp \frac{1.2.5.\ 8.11\ldots.3r-7.3r-4}{3.6.9.12.15\ldots.3(r-1).\ 3r};$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)_r = \mp \frac{1.3.\ 7.11.15\ldots.4r-9.4r-5}{4.8.12.16.20\ldots.4(r-1).\ 4r};$$

u. s. w.

Verfährt man eben so mit (VI) so wird:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_r = \pm \frac{1.3.5.7.\ 9\ldots.2r-3.2r-1}{2.4.6.8.10\ldots.2(r-1).\ 2r};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)_r = \pm \frac{1.4.7.10.13\ldots.3r-5.3r-2}{3.6.9.12.15\ldots.3(r-1).\ 3r};$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)_r = \pm \frac{1.5.\ 9.13.17\ldots.4r-7.4r-3}{4.8.12.16.20\ldots.4(r-1).\ r};$$

u. s. w. wo durchgängig die obern Zeichen für ein gerades, und die untern für ein ungerades r gelten.

§. 35.

3. **Zusatz.** Werden die Zahlen 1, 2, 3, . . . statt r in §. 32. gesetzt, so erhält man:

$(-n)_1 = -\frac{n}{1}$	$(-1)_1 = -1$	$(-2)_1 = -2$	$(-3)_1 = -\frac{2.3}{1.2}$
$(-n)_2 = +\frac{n.n+1}{1.\ 2}$	$(-1)_2 = +1$	$(-2)_2 = +3$	$(-3)_2 = +\frac{3.4}{1.2}$
$(-n)_3 = -\frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2.\ 3}$	$(-1)_3 = -1$	$(-2)_3 = -4$	$(-3)_3 = -\frac{4.5}{1.2}$
$(-n)_4 = +\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	$(-1)_4 = +1$	$(-2)_4 = +5$	$(-3)_4 = +\frac{5.6}{1.2}$
. . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .

$\left(\frac{n}{m}\right)_1 = +\frac{n}{m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)_1 = +\frac{2}{3}$
$\left(\frac{n}{m}\right)_2 = -\frac{n}{m}.\frac{m-n}{2m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)_2 = -\frac{2.1}{3.6}$
$\left(\frac{n}{m}\right)_3 = +\frac{n}{m}.\frac{m-n}{2m}.\frac{2m-n}{3m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)_3 = +\frac{2.1.4}{3.6.9}$
$\left(\frac{n}{m}\right)_4 = -\frac{n}{m}.\frac{m-n}{2m}.\frac{2m-n}{3m}.\frac{3m-n}{4m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)_4 = -\frac{2.1.4.7}{3.6.9.12}$
. . . .	. . . .

$\left(-\frac{n}{m}\right)_1 = -\frac{n}{m}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)_1 = -\frac{2}{3}$
$\left(-\frac{n}{m}\right)_2 = +\frac{n}{m}\cdot\frac{m+n}{2m}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)_2 = +\frac{2\,.\,5}{3\,.\,6}$
$\left(-\frac{n}{m}\right)_3 = -\frac{n}{m}\cdot\frac{m+n}{2m}\cdot\frac{2m+n}{3m}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)_3 = -\frac{2\,.\,5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9}$
$\left(-\frac{n}{m}\right)_4 = +\frac{n}{m}\cdot\frac{m+n}{2m}\cdot\frac{2m+n}{3m}\cdot\frac{3m+n}{4m}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)_4 = +\frac{2\,.\,5\,.\,8\,.\,11}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}$
. . . .	. . . .

$\left(\frac{1}{n}\right)_1 = +\frac{1}{n}$	$\left(\frac{1}{2}\right)_1 = +\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)_1 = +\frac{1}{3}$
$\left(\frac{1}{n}\right)_2 = -\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}$	$\left(\frac{1}{2}\right)_2 = -\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}$	$\left(\frac{1}{3}\right)_2 = -\frac{1\,.\,2}{3\,.\,6}$
$\left(\frac{1}{n}\right)_3 = +\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{3n}$	$\left(\frac{1}{2}\right)_3 = +\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)_3 = +\frac{1\,.\,2\,.\,5}{3\,.\,6\,.\,9}$
$\left(\frac{1}{n}\right)_4 = -\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{3n}\cdot\frac{3n-1}{4n}$	$\left(\frac{1}{2}\right)_4 = -\frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}$	$\left(\frac{1}{3}\right)_4 = -\frac{1\,.\,2\,.\,5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}$
. . . .	. . . .	. . . .

$\left(-\frac{1}{n}\right)_1 = -\frac{1}{n}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)_1 = -\frac{1}{2}$
$\left(-\frac{1}{n}\right)_2 = +\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2n}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)_2 = +\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}$
$\left(-\frac{1}{n}\right)_3 = -\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{3n}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)_3 = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}$
$\left(-\frac{1}{n}\right)_4 = +\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{3n}\cdot\frac{3n+1}{4n}$	$\left(-\frac{1}{3}\right)_4 = +\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}$
. . . .	. . . .

§. 36.

Nachstehende Tafeln enthalten die auf einander folgenden Binomialkoeffizienten für verschiedene ganze positive und negative Exponenten, wobei zu bemerken ist, daß in den Tafeln für negative Exponenten, die in der zweiten Vertikalspalte stehenden Zeichen, für alle folgende Glieder der wagerechten Zeile gelten. Diese zweite Tafel läßt sich mittelst der ersten noch weiter fortsetzen, weil man leicht die Uebereinstimmung der unter einander stehenden Zahlen in beiden Tafeln bemerkt. (M. s. §. 38. *XXVII.*)

				n_r					
n	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 7$	$r = 8$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770
23	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314
24	1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471
25	1	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575

	n_r					
n	$r = 9$	$r = 10$	$r = 11$	$r = 12$	$r = 13$	$r = 14$
9	1	0	0	0	0	0
10	10	1	0	0	0	0
11	55	11	1	0	0	0
12	220	66	12	1	0	0
13	715	286	78	13	1	0
14	2002	1001	364	91	14	1
15	5005	3003	1365	455	105	15
16	11440	8008	4368	1820	560	120
17	24310	19448	12376	6188	2380	680
18	48620	43758	31824	18564	8568	3060
19	92378	92378	75582	50388	27132	11628
20	167960	184756	167960	125970	77520	38760
21	293930	352716	352716	293930	203490	116280
22	497420	646646	705432	646646	497420	319770
23	817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190
24	1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256
25	2042975	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400

n	$r = 15$	$r = 16$	$r = 17$	$r = 18$	$r = 19$	$r = 20$
15	1	0	0	0	0	0
16	16	1	0	0	0	0
17	136	17	1	0	0	0
18	816	153	18	[illegible]	0	0
19	3876	969	171	19	1	0
20	15504	4845	1140	190	20	1
21	54264	20349	5985	1330	210	21
22	170544	74613	26334	7315	1540	231
23	490314	245157	100947	33649	8855	1771
24	1307504	735471	346104	134596	42504	10626
25	3268760	2042975	1081575	480700	177100	53130

$(-n)_r$								
r	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
0	+ 1	1	1	1	1	1	1	1
1	— 1	2	3	4	5	6	7	8
2	+ 1	3	6	10	15	21	28	36
3	— 1	4	10	20	35	56	84	120
4	+ 1	5	15	35	70	126	210	330
5	— 1	6	21	56	126	252	462	792
6	+ 1	7	28	84	210	462	924	1716
7	— 1	8	36	120	330	792	1716	3432
8	+ 1	9	45	165	495	1287	3003	6435
9	— 1	10	55	220	715	2002	5005	11440
10	+ 1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
11	— 1	12	78	364	1365	4368	12376	31824
12	+ 1	13	91	455	1820	6188	18564	50388

$(-n)_r$					
r	$n=9$		$n=10$	$n=11$	$n=12$
0	+	1	1	1	1
1	—	9	10	11	12
2	+	45	55	66	78
3	—	165	220	286	364
4	+	495	715	1001	1365
5	—	1287	2002	3003	4368
6	+	3003	5005	8008	12376
7	—	6435	11440	19448	31824
8	+	12870	24310	43758	75582
9	—	24310	28620	92378	167960
10	+	43758	92378	184756	352716
11	—	75582	167960	352716	705432
12	+	125970	293930	646646	1352078

r	$(\frac{1}{2})_r$		r	$(-\frac{1}{2})_r$		r	$(\frac{1}{3})_r$	
1	+ 0,5		1	— 0,5		1	+ 0,33333	33333
2	— 0,125		2	+ 0,375		2	— 0,11111	11111
3	+ 0,0625		3	— 0,3125		3	+ 0,06172	83915
4	— 0,03906	25	4	+ 0,27343	75	4	— 0,04115	22634
5	+ 0,02734	375	5	— 0,24609	375	5	+ 0,03017	83265
6	— 0,02050	78125	6	+ 0,22558	59375	6	— 0,02347	20317
7	+ 0,01611	32813	7	— 0,20947	26563	7	+ 0,01900	11685
8	— 0,01309	20410	8	+ 0,19638	06152	8	— 0,01583	43071
9	+ 0,01091	00342	9	— 0,18547	05811	9	+ 0,01348	84838
10	— 0,00927	35291	10	+ 0,17619	70520	10	— 0,01169	00193

In der Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln von J. C. Schulze, Berlin, 1778. 2. Band, S. 296. und 297. findet man für alle Hunderttheile die entsprechenden Binomialkoeffizienten, von 0,01 bis 1,00 auf 7 Dezimalstellen, bis $r = 6$, berechnet.

§. 37.

Mittelst der Binomialreihe kann man auch den Werth der Potenz eines Bruchs angeben, wenn der Exponent desselben unendlich groß wird.

Sei der Bruch $\frac{r}{m}$ gegeben, wo r und m rationale oder irrationale Zahlen bedeuten und $m > r$ vorausgesetzt wird. Sucht man nun den besondern Werth von $\left(\frac{r}{m}\right)^n$ für $n = \infty$, so setze man $m = r + h$, dann wird, wegen §. 25.,

$$\left(\frac{r}{m}\right)^n = \left(\frac{r}{r+h}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^n} = \frac{1}{1 + n\frac{h}{r} + n_2\frac{h^2}{r^2} + n_3\frac{h^3}{r^3} + \ldots},$$

daher, wenn man $n = \infty$ setzt (§. 10.), $\left(\frac{r}{m}\right)^n = o$.

Behalten r und m die gegebene Bedeutung, so wird ferner:

$$\left(\frac{m}{r}\right)^n = \left(\frac{r+h}{r}\right)^n = \left(1+\frac{h}{r}\right)^n = 1 + n\frac{h}{r} + n_2\frac{h^2}{r^2} + n_3\frac{h^3}{r^3} + \ldots,$$

daher $\left(\frac{m}{r}\right)^n = \infty$, für $n = \infty$.

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{r}{m}\right)^n = o \\ \left(\frac{m}{r}\right)^n = \infty\end{array}\right\} \text{für } n = \infty \text{ und } m > r.$$

§. 38.

Der vielfältige Gebrauch der Binomialkoeffizienten macht es nothwendig, noch mehrere ihrer Eigenschaften kennen zu lernen, weshalb hier verschiedene Vergleichungen derselben folgen. Es wird hiebei vorausgesetzt, daß m, k, n, r, t, nur positive ganze Zahlen, a, b, h, aber auch Brüche bedeuten können; so wie $m > r$, und $n > t$ vorausgesetzt ist.

Nach §. 20. und 26. wird

$$(a+m)_n = \frac{a+m.a+m-1 \ldots a+r+1.a+r \quad \ldots a-n+m+1}{1 \;.\; 2 \quad \ldots m-r.m-r+1 \ldots \quad n}$$

$$(a+r)_{n-t} = \frac{a+r.a+r-1 \ldots a-n+m+1. \quad a-n+m \ldots a-n+r+t+1}{1 \;.\; 2 \quad \ldots n-m+r \quad .n-m+r+1 \ldots \quad n-t}$$

Nun ist $a+m.a+m-1 \ldots a+r+1 = (a+m)_{m-r}[m-r]!$ nach der §. 6. und 20. angenommenen Bezeichnung; daher, wenn die Glieder welche sich aufheben, weggelassen werden:

$$\frac{(a+m)_n}{(a+r)_{n-t}} = \frac{(a+m)_{m-r}\,[m-r]!}{(a-n+m)_{m-r-t}\,[m-r-t]!\,n_t\,[t]!}. \text{ Aber}$$

$$\frac{[m-r]!}{[m-r-t]!\,[t]!} = \frac{1.2 \ldots m-r-t.m-r-t+1 \ldots m-r}{1.2 \ldots m-r-t. \quad 1 \quad \ldots \quad t} = (m-r)_t$$

folglich

$$(I)\; \frac{(a+m)_n}{(a+r)_{n-t}} = \frac{(a+m)_{m-r}\,(m-r)_t}{(a-n+m)_{m-r-t}\;n_t}.$$

Es ist ferner, wenn $m > r$,

$$(a+r)_n = \frac{a+r.a+r-1 \ldots a-n+m+t+1.a-n+m+t \quad \ldots a-n+r+1}{1 \;.\; 2 \quad \ldots n-m+r-t \quad .n-m+r-t+1 \ldots \quad n}$$

$$(a+m)_{n-t} = \frac{a+m.a+m-1 \ldots a+r+1.a+r \quad \ldots a-n+m+t+1}{1 \;.\; 2 \quad \ldots m-r \quad .m-r+1 \ldots \quad n-t}$$

daher $\dfrac{(a+r)_n}{(a+m)_{n-t}} = \dfrac{(a-n+m+t)_{m-r+t}\,[m-r+t]!}{(a+m)_{m-r}\,[m-r]!\,n_t\,[t]!}$; aber

$$\frac{[m-r+t]!}{[m-r]!\,[t]!} = \frac{1.2 \ldots m-r.m-r+1 \ldots m-r+t}{1.2 \ldots m-r. \quad 1 \quad \ldots \quad t} = (m-r+t)_t, \text{ folglich}$$

$$(II)\; \frac{(a+r)_n}{(a+m)_{n-t}} = \frac{(a-n+m+t)_{m-r+t}\,(m-r+t)_t}{(a+m)_{m-r}\;n_t}.$$

Weil $m > r$ und $r > -k$ ist, so kann man auch r statt m und $-k$ statt r in (I) setzen; dies giebt:

$$(III)\; \frac{(a+r)_n}{(a-k)_{n-t}} = \frac{(a+r)_{k+r}\,(k+r)_t}{(a-n+r)_{k+r-t}\;n_t}.$$

Weil $m > r$ und $k > -r$ ist, so kann man auch k statt m und $-r$ statt r in (II) setzen; dies giebt:

$$(IV)\; \frac{(a-r)_n}{(a+k)_{n-t}} = \frac{(a-n+k+t)_{k+r+t}\,(k+r+t)_t}{(a+k)_{k+r}\;n_t}.$$

Weil $m > r$ also $-r > -m$ ist (§. 15.), so kann man auch $-r$ statt m und $-m$ statt r in (II) setzen; dies giebt:

$$(V)\ \frac{(a-m)_n}{(a-r)_{n-t}} = \frac{(a-n-r+t)_{m-r+t}}{(a-r)_{m-r}} \frac{(m-r+t)_t}{n_t}.$$

In (III) und (IV) werde $k = o$ gesetzt, so findet man

$$(VI)\ \frac{(a+r)_n}{a_{n-t}} = \frac{(a+r)_r}{(a-n+r)_{r-t}} \frac{r_t}{n_t}.$$

In dem letzten Ausdruck werde $r = t$ gesetzt, so erhält man

$$(VII)\ \frac{(a+t)_n}{a_{n-t}} = \frac{(a+t)_t}{n_t}.$$

$$(VIII)\ \frac{(a-r)_n}{a_{n-t}} = \frac{(a-n+t)_{r+t}}{a_r} \frac{(r+t)_t}{n_t}.$$

Hierin $r = o$ gesetzt, giebt

$$(IX)\ \frac{a_n}{a_{n-t}} = \frac{(a-n+t)_t}{n_t}$$

und für $t = 1$,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a-n+1}{n}.$$

In (IX) werde $n - r$ statt t gesetzt, so ist, weil $n_{n-r} = n_r$ (§. 21.)

$$(X)\ \frac{a_n}{a_r} = \frac{(a-r)_{n-r}}{n_r}.$$

Auch erhält man für $n + t$ statt n in (IX)

$$(XI)\ \frac{a_{n+t}}{a_n} = \frac{(a-n)_t}{(n+t)_t}.$$

Hierin $a + n$ statt a gesetzt, giebt

$$(XII)\ \frac{(a+n)_{n+t}}{(a+n)_n} = \frac{a_t}{(n+t)_t}.$$

In (VI) werde $r = t = 1$ gesetzt, so ist

$$(XIII)\ \frac{(a+1)_n}{a_{n-1}} = \frac{a+1}{n} \text{ oder auch}$$

$$\frac{a_n}{(a-1)_{n-1}} = \frac{a}{n}.$$

Hierin r statt n und $a + n$ statt a gesetzt, giebt auch

$$(XIV)\ \frac{(a+n)_r}{(a+n-1)_{r-1}} = \frac{a+n}{r}.$$

Wird ferner $t = o$ in (VI) und (VIII) gesetzt, so findet man:

$$(XV)\ \frac{(a+r)_n}{a_n} = \frac{(a+r)_r}{(a-n+r)_r} \text{ und}$$

$$(XVI)\ \frac{(a-r)_n}{a_n} = \frac{(a-n)_r}{a_r}.$$

In (XV) $r = n + r$ gesetzt, giebt

$$(XVII)\ \frac{(a+n+r)_n}{a_n} = \frac{(a+n+r)_{n+r}}{(a+r)_{n+r}}. \text{ Hierin } r = -r,$$

$$(XVIII)\ \frac{(a+n-r)_n}{a_n} = \frac{(a+n-r)_{n-r}}{(a-r)_{n-r}}.$$

In (XV) und (XVI) $a = a + n$ gesetzt, giebt

$$(XIX)\ \frac{(a+n+r)_n}{(a+n)_n} = \frac{(a+n+r)_r}{(a+r)_r} \text{ und}$$

$$(XX)\ \frac{(a+n-r)_n}{(a+n)_n} = \frac{a_r}{(a+n)_r}.$$

In den sechs zunächst vorstehenden Ausdrücken $r = 1$ gesetzt, giebt:

$$(XXI)\ \frac{(a+1)_n}{a_n} = \frac{a+1}{a-n+1}$$

$$(XXII)\ \frac{(a-1)_n}{a_n} = \frac{a-n}{a}$$

$$(XXIII)\ \frac{(a+n+1)_n}{a_n} = \frac{(a+n+1)_{n+1}}{(a+1)_{n+1}}$$

$$(XXIV)\ \frac{(a+n-1)_n}{a_n} = \frac{(a+n-1)_{n-1}}{(a-1)_{n-1}}$$

$$(XXV)\ \frac{(a+n+1)_n}{(a+n)_n} = \frac{a+n+1}{a+1} \text{ und}$$

$$(XXVI)\ \frac{(a+n-1)_n}{(a+n)_n} = \frac{a}{a+n}.$$

Ferner ist nach §. 32. (II)

$$(XXVII)\ (-a)_n = \pm (a+n-1)_n$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt. Hienach wird

$$(-a)_1 = -a$$
$$(-a)_2 = +(a+1)_2$$
$$(-a)_3 = -(a+2)_3$$
$$(-a)_4 = +(a+3)_4$$

u. s. w.

In (II) werde $m = r = n - 1$ gesetzt, so ist nach (XXVII)

$$(XXVIII)\quad \frac{(-a)_n}{(a+n-1)_{n-t}} = \pm \frac{(a+t-1)_t}{n_t}, \text{ und für } t = 1.$$

$$(XXIX)\quad \frac{(-a)_n}{(a+n-1)_{n-1}} = \pm \frac{a}{n}.$$

In (II) werde $t = 0$ und $m = n - 1$ gesetzt. Dies giebt, wegen (XXVII)

$$(XXX)\quad \frac{(a+r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{n-r-1}}{(a+n-1)_{n-r-1}}, \text{ und für } r = -r$$

$$(XXXI)\quad \frac{(a-r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{n+r-1}}{(a+n-1)_{n+r-1}}.$$

Setzt man in (I) $t = 0$, $r = n - 1$ und dann $m = n + r$, so wird

$$(XXXII)\quad \frac{(a+n+r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a+n+r)_{r+1}}{(a+r)_{r+1}}.$$

In (XXXI) werde $r = r - n$ gesetzt. Dies giebt

$$(XXXIII)\quad \frac{(a+n-r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{r-1}}{(a+n-1)_{r-1}}.$$

Für $r = 0$ in (XXXI) und (XXXII) wird

$$(XXXIV)\quad \frac{a_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{n-1}}{(a+n-1)_{n-1}} \text{ und}$$

$$(XXXV)\quad \frac{(a+n)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{a+n}{a}$$

und für $r = 2$ in (XXXIII) wird

$$(XXXVI)\quad \frac{(a+n-2)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{a-1}{a+n-1},$$

wo durchgängig die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten.

Anstatt a werde $-\frac{a}{b}$ in (XXVII) gesetzt, so erhält man

$$(XXXVII)\quad \left(\frac{a}{b}\right)_n = \pm \left(n - \frac{a}{b} - 1\right)_n$$

$\frac{a}{b}$ anstatt a in (X) und (XIII) gesetzt, giebt

$$(XXXVIII)\quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_{n-1}} = \frac{a - nb + b}{nb} \text{ und}$$

$$(XXXIX)\quad \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_{n-1}} = \frac{a+b}{nb}$$

$-\frac{a}{b}$ anstatt a in (XXXII) und (XXXIII) gesetzt, giebt

$$(XL)\quad \frac{\left(n-\frac{a}{b}+r\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n}=\pm\frac{\left(n-\frac{a}{b}+r\right)_{r+1}}{\left(r-\frac{a}{b}\right)_{r+1}} \text{ und}$$

$$(XLI)\quad \frac{\left(n-\frac{a}{b}-r\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n}=\pm\frac{\left(-\frac{a}{b}-1\right)_{r-1}}{\left(n-\frac{a}{b}-1\right)_{r-1}}$$

oder $r = 0$ in (XL) und $r = 2$ in (XLI) gesetzt, giebt

$$(XLII)\quad \frac{\left(n-\frac{a}{b}\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n}=\pm\frac{a-nb}{a} \text{ und}$$

$$(XLIII)\quad \frac{\left(n-\frac{a}{b}-2\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n}=\pm\frac{a+b}{a-nb+b}.$$

Man setze $\frac{a}{b}$ statt a in (XXI) (XXII) (XXV) und (XXVI), so wird

$$(XLIV)\quad \frac{\left(\frac{a}{b}+1\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n}=\frac{a+b}{a-nb+b}$$

$$(XLV)\quad \frac{\left(\frac{a}{b}-1\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n}=\frac{a-nb}{a}$$

$$(XLVI)\quad \frac{\left(n+\frac{a}{b}+1\right)_n}{\left(n+\frac{a}{b}\right)_n}=\frac{a+nb+b}{a+b} \text{ und}$$

$$(XLVII)\quad \frac{\left(n+\frac{a}{b}-1\right)_n}{\left(n+\frac{a}{b}\right)_n}=\frac{a}{a+nb}.$$

In (XXVII) werde $\frac{a}{b}+1$ statt a gesetzt, so erhält man

$$(XLVIII)\quad \left(-\frac{a}{b}-1\right)_n=\pm\left(n+\frac{a}{b}\right)_n.$$

$\frac{b}{a}$ statt a in (XXIX) und (XXXV) gesetzt, giebt

$$(XLIX)\quad \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)_n}{\left(n+\frac{a}{b}-1\right)_{n-1}} = \pm\frac{a}{nb} \text{ und}$$

$$(L)\quad \frac{\left(n+\frac{a}{b}\right)_n}{\left(-\frac{a}{b}\right)_n} = \pm\frac{a+nb}{a}.$$

Hierin $(a+rb)$ statt a gesetzt, giebt

$$(LI)\quad \frac{\left(n+\frac{a}{b}+r\right)_n}{\left(-\frac{a}{b}-r\right)_n} = \pm\frac{a+(n+r)b}{a+rb}.$$

Setzt man in (XXVI) $a = -\frac{a}{b} - n - r$, so wird

$$(LII)\quad \frac{\left(-\frac{a}{b}-r-1\right)_n}{\left(-\frac{a}{b}-r\right)_n} = \frac{a+(n+r)b}{a+rb}.$$

In (XXVII) werde $-a$ statt a gesetzt, so erhält man

$$(LIII)\quad a_n = \pm(n-a-1)_n.$$

Für $a = m = n$ in (XV) wird wegen §. 21. (I)

$$(LIV)\quad (m+r)_r = (m+r)_m$$

oder in (XV) $n = m - n$ und $r = n + r$, hienächst aber $a = m - n$ gesetzt, giebt

$$(LV)\quad (m+r)_{m-n} = (m+r)_{n+r}$$

also

$$m_{m-1} = m_1 \qquad\qquad m_{m-2} = m_2$$
$$(m+1)_{m-1} = (m+1)_2 \qquad\qquad (m+1)_{m-2} = (m+1)_3$$
$$(m+2)_{m-1} = (m+2)_3 \qquad\qquad (m+2)_{m-2} = (m+2)_4$$

u. s. w.   u. s. w.

Für $m = r$ wird

$$(2r)_{r-n} = (2r)_{r+n}$$

also

$$(2r)_{r-1} = (2r)_{r+1}$$
$$(2r)_{r-2} = (2r)_{r+2}$$

u. s. w.

In vorstehenden Ausdruck $-r$ statt r gesetzt, giebt

$$(LVI)\quad (m-r)_{m-n} = (m-r)_{n-r}$$

z. B. $(m-7)_{m-9} = (m-7)_2$ oder $(m-12)_{m-13} = m - 12$.

$m - r$ statt m in (LIV) gesetzt, giebt

$$(LVII)\quad m_r = m_{m-r} \text{ (wie §. 21.)}$$
$$(m+r)_r = (m+r)_{m-r}$$

Nach §. 33. ist

$$(LVIII)\quad (-m)_n = \pm (m+n-1)_{m-1} \text{ und nach } (XXVII)$$

$$(-m)_n = \pm (m+n-1)_n$$

daher, wenn man $m = n$ setzt,

$$(LIX)\quad (-n)_n = \pm (2n-1)_n = \pm (2n-1)_{n-1}$$

wo durchgängig die obern Zeichen für ein gerades und die untern für ein ungerades n gelten.

Weil $(a+m)_{n+r}$

$$= \frac{a+m\ldots a+1}{1\ldots m}\cdot\frac{a\ldots a+m-n-r+1 . a+m-n-r\ldots a-n+1}{m+1\ldots n+r \quad . \quad n+r+1\ldots n+m}\cdot\frac{n+r+1\ldots n+m}{a+m-n-r\ldots a-n+1}$$

$$= \frac{a+m\ldots a+1}{1\ldots m}\cdot\frac{a\ldots a-n+1}{m+1\ldots n+m}\cdot\frac{a-n\ldots a+m-n-r+1}{n+m+1\ldots n+r} \text{ ist,}$$

so findet man hienach

$$(a+m)_{n+r} = \frac{(a+m)_m\, a_n\, (n+m)_{m-r}}{(n+m)_n\,(a+m-n-r)_{m-r}} = \frac{(a+m)_m\, a_n\, (a-n)_{r-m}}{(n+m)_n\,(n+r)_{r-m}}$$

oder auch

$$(LX)\quad \frac{(a+m)_{n+r}}{a_n} = \frac{(a+m)_m\,(n+m)_{m-r}}{(a+m-n-r)_{m-r}\,(n+m)_m} = \frac{(a+m)_m\,(a-n)_{r-m}}{(n+m)_m\,(n+r)_{r-m}}$$

wo der erste Ausdruck für $m > r$ und der zweite für $r > m$ gilt.

Hienach oder nach (VI) (IX) und (XIII) findet man

$$(a+1)_n = \frac{a+1}{a-n+1}\, a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a-n}{n+1}\, a_n$$

$$(a+1)_{n+1} = \frac{a+1}{n+1}\, a_n$$

wodurch man leicht nachstehende Ausdrücke erhält:

$$(LXI)\quad a_{n+1} + a_n = \frac{a+1}{n+1}\, a_n = (a+1)_{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a-2n-1}{n+1}\, a_n = \frac{a-2n-1}{a+1}\,(a+1)_{n+1}$$

$$(LXII)\quad (a+1)_n + a_n = \frac{2a-n+2}{a-n+1}\, a_n = \frac{2a-n+2}{n}\, a_{n-1} = 2a_n + a_{n-1}$$

$$(a+1)_n - a_n = \frac{n}{a-n+1}\, a_n = \frac{n}{a+1}\,(a+1)_n = a_{n-1}$$

$$(LXIII)\quad (a+1)_{n+1} + a_n = \frac{a+n+2}{n+1}\, a_n = \frac{a+n+2}{a+1}\,(a+1)_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$$

$$(a+1)_{n+1} - a_n = \frac{a-n}{n+1}\, a_n = \frac{a-n}{a+1}\,(a+1)_{n+1} = a_{n+1}$$

$$(LXIV)\quad a_{n+1}b_n + a_n b_{n+1} = \frac{a+b-2n}{n+1}\, a_n b_n = \frac{a+b-2n}{a+1}\,(a+1)_{n+1}\, b_n$$

$$a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} = \frac{a-b}{n+1}\, a_n b_n = \frac{a-b}{a+1}\,(a+1)_{n+1}\, b_n$$

(LXV)

$$(LXV)\quad (a+1)_{n+1}\,b_n + a_n(b+1)_{n+1} = \frac{a+b+2}{n+1}\,a_n\,b_n = \frac{a+b+2}{a+1}\,(a+1)_{n+1}\,b_n$$

$$(a+1)_{n+1}\,b_n - a_n(b+1)_{n+1} = \frac{a-b}{n+1}\,a_n\,b_n = \frac{a-b}{a+1}\,(a+1)_{n+1}\,b_n$$

$$(LXVI)\quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a+b-2n}{n+1}\,\frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{a+b-2n}{a+1}\,\frac{(a+1)_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a-b}{n+1}\,\frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{a-b}{a+1}\,\frac{(a+1)_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$(LXVII)\quad \frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{2(a+1)(b+1) - n(a+b+2)}{(b+1)(a-n+1)}\,\frac{a_n}{b_n}$$

$$\frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{n(b-a)}{(b+1)(a-n+1)}\,\frac{a_n}{b_n} = \frac{b-a}{n+1}\,\frac{a_{n-1}}{(b+1)_{n+1}}.$$

$$(LXVIII)\quad \frac{(a+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a+b+2}{n+1}\,\frac{a_n}{(b+1)_{n+1}} = \frac{a+b+2}{a+1}\,\frac{(a+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}}$$

$$\frac{(a+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a-b}{n+1}\,\frac{a_n}{(b+1)_{n+1}} = \frac{a-b}{a+1}\,\frac{(a+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}}$$

$$(LXIX)\quad \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{a+1}{(a-n)\,a_n} = \frac{a+1}{(n+1)\,a_{n+1}} = \frac{a+1}{a\,(a-1)_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{2n-a+1}{(a-n)\,a_n} = \frac{2n-a+1}{(n+1)\,a_{n+1}}$$

$$(LXX)\quad \frac{1}{(a+1)_n} + \frac{1}{a_n} = \frac{2a-n+2}{(a+1)\,a_n} = \frac{2a-n+2}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

$$\frac{1}{(a+1)_n} - \frac{1}{a_n} = \frac{-n}{(a+1)\,a_n} = \frac{-n}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

$$(LXXI)\quad \frac{1}{(a+1)_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{a+n+2}{(a+1)\,a_n} = \frac{a+n+2}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

$$\frac{1}{(a+1)_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{n-a}{(a+1)\,a_n} = \frac{n-a}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

Es ist $1.2.3.4.5 \ldots . n . n+1 \ldots . 2n-2 . 2n-1 . 2n$
$= (1.3.5 \ldots . 2n-1).(2.4.6 \ldots . 2n)$
$= (1.3.5 \ldots . 2n-1).(1.2.3 \ldots . n)\,2^n$, also

$$2^n = \frac{1.2.3 \ldots . n . n+1 \ldots . 2n-1.2n}{(1.2.3 \ldots . n)(1.3.5 \ldots . 2n-1)}$$ folglich

$$(LXXII)\quad 2^n = \frac{n+1 . n+2 . n+3 \ldots 2n-1 . 2n}{1 . 3 . 5 \ldots 2n-3 . 2n-1}.$$

Nun ist $(2n)_n = \dfrac{2n . 2n-1 . 2n-2 \ldots n+1}{1 . 2 . 3 \ldots . n}$,

daher erhält man auch

$$\frac{(2n)_n}{2^n} = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ n}, \text{ oder auch}$$

$$(2n)_n = \frac{1.3.5.7\ldots 2n-1}{1.2.3.4\ldots\ n}\,.\,2^n.$$

Weil $\frac{a\,.\,a-h\,.\,a-2h\ldots a-nh+h}{1d\,.\,2d\,.\,3d\,\ldots\, nd} = \frac{\frac{a}{h}\,.\,\frac{a}{h}-1\ldots\frac{a}{h}-n+1}{1\,.\,2\,\ldots\, n}\,\frac{h^n}{d^n} = \left(\frac{a}{h}\right)_n \frac{h^n}{d^n}$ ist, so erhält man

$$(LXXIII)\quad \frac{a\,.\,a-h\,.\,a-2h\,.\,a-3h\ldots(a-nh+h)}{1d\,.\,2d\,.\,3d\,.\,4d\,\ldots\, nd} = \left(\frac{a}{h}\right)_n \frac{h^n}{d^n}.$$

Ferner ist $\frac{a\,.\,a+h\,.\,a+2h\ldots a+nh-h}{1d\,.\,2d\,.\,3d\,\ldots\, nd} = \frac{\frac{a}{h}\,.\,\frac{a}{h}+1\ldots\frac{a}{h}+n-1}{1\,.\,2\,\ldots\, n}\,.\,\frac{h^n}{d^n} = \frac{\frac{a}{h}+n-1\ldots\frac{a}{h}}{1\ldots n}\,.\,\frac{h^n}{d^n}$, daher wird auch

$$(LXXIV)\quad \frac{a\,.\,a+h\,.\,a+2h\,.\,a+3h\ldots a+nh-h}{1d\,.\,2d\,.\,3d\,.\,4d\,\ldots\, nd} = \left(\frac{a}{h}+n-1\right)_n \frac{h^n}{d^n};$$

hierin $a = d = 1$; $h = 2$, gesetzt, so wird

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ n} = (n-\tfrac{1}{2})_n\, 2^n$$

oder auch, wenn man hienächst $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... statt n setzt

$$1.3.5.7\ldots 2n-1 = n!\,(n-\tfrac{1}{2})_n\, 2^n$$
$$1.3.5.7\ldots 2n-3 = (n-1)!\,(n-\tfrac{3}{2})_{n-1}\, 2^{n-1}$$
$$1.3.5.7\ldots 2n-5 = (n-2)!\,(n-\tfrac{5}{2})_{n-2}\, 2^{n-2}$$
$$1.3.5.7\ldots 2n-7 = (n-3)!\,(n-\tfrac{7}{2})_{n-3}\, 2^{n-3}$$

u. s. w.

In vorstehenden Ausdruck $a+h$ statt a gesetzt, giebt:

$$(LXXV)\quad \frac{a+h\,.\,a+2h\,.\,a+3h\ldots a+nh}{1d\,.\,2d\,.\,3d\,\ldots\, nd} = \left(\frac{a}{h}+n\right)_n \frac{h^n}{d^n}$$

oder auch

$$\frac{a+h\,.\,a+2h\,.\,a+3h\ldots a+nh}{1h\,.\,2h\,.\,3h\,\ldots\, nh} = \left(\frac{a}{h}+n\right)_n.$$

Weil $(n+r)_{2r+1} = \frac{n+r\,.\,n+r-1\ldots n+2\,.\,n+1\,.\,n\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots n-r+1\,.\,n-r}{1\,.\,2\ldots r-1\,.\,r\,.\,r+1\,.\,r+2\,.\,r+3\ldots 2r\,.\,2r+1}$

und weil ferner

$$n+r\,.\,n-r = n^2-r^2$$
$$n+r-1\,.\,n-r+1 = n^2-(r-1)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n+2\,.\,n-2 = n^2-2^2$$
$$n+1\,.\,n-1 = n^2-1^2$$

so erhält man, wenn die auf jeder Seite des Gleichheitszeichens unter einander stehenden Werthe in einander multiplizirt werden,

$$(LXXVI)\quad \frac{(n+r)_{2r+1}}{n} = \frac{n^2-1^2 \,.\, n^2-2^2 \,.\, n^2-3^2 \,.\, n^2-4^2 \ldots\ldots n^2-r^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \ldots\ldots 2r+1}.$$

§. 39.

Die Reihen, deren Glieder aus Binomialkoeffizienten oder aus einer Verbindung derselben bestehen, dienen häufig zur Erleichterung der analytischen Untersuchungen, weshalb hier einige dieser Reihen folgen. Hiebei wird durchgängig vorausgesetzt, daß a, b, h. α, β, x alle mögliche ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen, dagegen n, m, r nur positive ganze Zahlen bedeuten.

Es ist nach §. 25.

$$(I)\quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \ldots\ldots$$

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 - \alpha_5 x^5 + \ldots\ldots$$

und die Reihen brechen ab, wenn α eine positive ganze Zahl wird. Für diesen Fall erhält man

$$(1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_1 x^{m-1} + 1 \,.\, x^m$$

$$(1-x)^m = 1 - m_1 x + m_2 x^2 - m_3 x^3 + \ldots \mp m_1 x^{m-1} \pm 1 \,.\, x^m$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades m gelten.

Für $x = 1$ wird

$$2^\alpha = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \ldots\ldots$$

$$2^m = 1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_2 + m_1 + 1$$

$$0 = 1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 + \ldots\ldots$$

$$0 = 1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 - \ldots \pm m_2 \mp m_1 \pm 1$$

Aus (I) wird ferner

$$(II)\quad \frac{(1+x)^\alpha + (1-x)^\alpha}{2} = 1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \alpha_8 x^8 + \alpha_{10} x^{10} + \ldots\ldots$$

$$\frac{(1+x)^m + (1-x)^m}{2} = 1 + m_2 x^2 + m_4 x^4 + m_6 x^6 + \ldots + m_4 x^{m-4} + m_2 x^{m-2} + 1 x^m.$$

Hierin $x = 1$ gesetzt, giebt

$$2^{\alpha-1} = 1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12} + \ldots\ldots$$

$$2^{m-1} = 1 + m_2 + m_4 + m_6 + \ldots + m_4 + m_2 + 1$$

Nach (I) wird

$$(III)\quad \frac{(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha}{2} = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 + \alpha_9 x^9 + \alpha_{11} x^{11} + \ldots\ldots$$

Hierin $x = 1$ gesetzt giebt

$$2^{\alpha-1} = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11} + \alpha_{13} + \ldots\ldots$$

In (I) $\alpha - 1$ statt α gesetzt, giebt

$$(1+x)^{\alpha-1} = 1 + (\alpha-1)_1 x + (\alpha-1)_2 x^2 + (\alpha-1)_3 x^3 + \ldots\ldots \text{ oder weil}$$

$$(\alpha-1)_n = \frac{n+1}{\alpha}\,\alpha_{n+1} \text{ (§. 38. } XIII\text{), so wird}$$

$(1+x)^{\alpha-1} = 1 + \frac{2}{\alpha}\alpha_2 x + \frac{3}{\alpha}\alpha_3 x^2 + \frac{4}{\alpha}\alpha_4 x^3 + \ldots$ oder mit αx multiplizirt, giebt

$$(IV)\quad \alpha x(1+x)^{\alpha-1} = \alpha_1 x + 2\alpha_2 x^2 + 3\alpha_3 x^3 + 4\alpha_4 x^4 + 5\alpha_5 x^5 + 6\alpha_6 x^6 + \ldots\ldots$$

Hierin $x = 1$, dann $x = -1$ gesetzt giebt:

$$\alpha.2^{\alpha-1} = 1.\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 + \ldots\ldots$$
$$o = 1.\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 4\alpha_4 + 5\alpha_5 - 6\alpha_6 + \ldots\ldots$$

Dieser letzte Ausdruck gilt für alle Werthe von α, nur nicht für $\alpha = 1$, weil alsdann $2^{\alpha-1} = 2^0 = 1$ und nicht $= o$ wird.

$$m.2^{m-1} = 1.m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + (m-2)m_2 + (m-1)m_1 + m.1$$
$$o = 1.m_1 - 2m_2 + 3m_3 - \ldots \mp (m-2)m_2 \pm (m-1)m_1 \mp m.1$$

In (IV) $\alpha - 1$ statt α gesetzt, so erhält man auf gleiche Weise

$$(V)\quad \alpha(\alpha-1)x^2(1+x)^{\alpha-2} = 1.2\alpha_2 x^2 + 2.3\alpha_3 x^3 + 3.4\alpha_4 x^4 + 4.5\alpha_5 x^5 + \ldots\ldots$$

$$\alpha(\alpha-1)2^{\alpha-2} = 1.2\alpha_2 + 2.3\alpha_3 + 3.4\alpha_4 + 4.5\alpha_5 + 5.6\alpha_6 + \ldots.$$
$$o = 1.2\alpha_2 - 2.3\alpha_3 + 3.4\alpha_4 - 4.5\alpha_5 + 5.6\alpha_6 - \ldots.$$

Aus den angeführten Gründen muß bei der Anwendung dieses Ausdrucks $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ ausgeschlossen bleiben.

Eben so findet man

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3(1+x)^{\alpha-3} = 1.2.3\alpha_3 x^3 + 2.3.4\alpha_4 x^4 + 3.4.5\alpha_5 x^5 + 4.5.6\alpha_6 x^6 + \ldots.$$

u. s. w.

In (IV) werde $\alpha - 1$ statt α gesetzt und die entstandene Reihe von (IV) abgezogen, so erhält man wegen §. 38. *LXII.* wenn durchgängig mit α multiplizirt wird

$$(VI)\quad \alpha x(\alpha x+1)(1+x)^{\alpha-2} = 1^2\alpha_1 x + 2^2\alpha_2 x^2 + 3^2\alpha_3 x^3 + 4^2\alpha_4 x^4 + 5^2\alpha_5 x^5 + \ldots.$$

Hierin $x = 1$ und dann $x = -1$ gesetzt, giebt

$$\alpha(\alpha+1)2^{\alpha-2} = 1^2\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + 3^2\alpha_3 + 4^2\alpha_4 + 5^2\alpha_5 + 6^2\alpha_6 + \ldots\ldots$$
$$o = 1^2\alpha_1 - 2^2\alpha_2 + 3^2\alpha_3 - 4^2\alpha_4 + 5^2\alpha_5 - 6^2\alpha_6 + \ldots\ldots$$

Nun war nach (IV) $\alpha = 1$ ausgeschlossen, daher muß bei der Anwendung dieses Ausdrucks $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ ausgeschlossen bleiben.

In (VI) wieder $\alpha - 1$ statt α gesetzt, findet man auf gleiche Weise

$$(VII)\begin{cases} \alpha x(\alpha^2x^2 + 3\alpha x - x + 1)(1+x)^{\alpha-3} \\ = 1^3\alpha_1 x + 2^3\alpha_2 x^2 + 3^3\alpha_3 x^3 + 4^3\alpha_4 x^4 + 5^3\alpha_5 x^5 + 6^3\alpha_6 x^6 + \ldots \end{cases}$$

$$\alpha^2(\alpha+3)2^{\alpha-3} = 1^3\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3 + 4^3\alpha_4 + 5^3\alpha^5 + \ldots\ldots$$
$$o = 1^3\alpha_1 - 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3 - 4^3\alpha_4 + 5^3\alpha_5 - \ldots\ldots$$

wo $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ und $\alpha = 3$ ausgeschlossen bleiben.

Eben so findet man

$$\alpha(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 1)2^{\alpha-4} = 1^4\alpha_1 + 2^4\alpha_2 + 3^4\alpha_3 + 4^4\alpha_4 + 5^4\alpha_5 + \ldots\ldots$$
$$o = 1^4\alpha_1 - 2^4\alpha_2 + 3^4\alpha_3 - 4^4\alpha_4 + 5^4\alpha_5 - \ldots\ldots$$

wo für α die besondern Werthe 1, 2, 3 ausgeschlossen bleiben.

Geht man auf diese Art weiter, so erhält man allgemein

$$(VIII) \quad o = 1^r \alpha_1 - 2^r \alpha_2 + 3^r \alpha_3 - 4^r \alpha_4 + 5^r \alpha_5 - 6^r \alpha_6 + 7^r \alpha_7 - \ldots.$$

$$o = 1^r m_1 - 2^r m_2 + 3^r m_3 - 4^r m_4 + \ldots \pm (m-1)^r m_1 \mp m^r . 1$$

oder auch

$$o = m^r - m_1 (m-1)^r + m_2 (m-2)^r - m_3 (m-3)^r + \ldots \pm m_2 2^r \mp m_1 1^r$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades m gelten, und für α sowohl als für m die besondern Werthe 1, 2, 3, . . . r ausgeschlossen bleiben, also $\alpha > r$ und $m > r$ ist.

Wegen $m = r$ sehe man §. 522.

Hienach findet man ferner, wenn $m > n$ und $n > r$ ist,

$$(IX) \quad o = m^r - n_1 (m-1)^r + n_2 (m-2)^r - n_3 (m-3)^r + \ldots. \mp n_1 (m-n+1)^r \pm 1 . (m-n)^r$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten.

Von der Richtigkeit dieses Ausdrucks überzeugt man sich, wenn die in Klammern befindlichen Ausdrücke nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt und nach den Potenzen von m geordnet werden. Dies giebt

$+1$	m^r				
$-n_1$	$+n . 1$	$r_1 m^{r-1} - n . 1^2$	$r_2 m^{r-2} + n . 1^3$	$r_3 m^{r-3} - \ldots. \mp n . 1^r$	r_r
$+n_2$	$-n_2 2$	$+n_2 2^2$	$-n_2 2^3$	$\pm n_2 2^r$	
$-n_3$	$+n_3 3$	$-n_3 3^2$	$+n_3 3^3$	$\mp n_3 3^r$	
$\ldots.$	$\ldots.$	$\ldots.$	$\ldots.$	$\ldots.$	
$\pm n_n$	$\mp n_n n$	$\pm n_n n^2$	$\mp n_n n^3$	$+ n_n n^r$	

Nun ist nach (I) und (VIII) die Summe der über einander stehenden Glieder jeder Spalte $= o$, daher auch der vorstehende Ausdruck $(IX) = o$.

Den Ausdruck (I) mit a und (IV) mit h multiplizirt, dann beide Ausdrücke addirt, giebt

$$(X) \quad (a + ax + \alpha h x)(1+x)^{\alpha-1} = a + (a+h)\alpha_1 x + (a+2h)\alpha_2 x^2 + (a+3h)\alpha_3 x^3 + (a+4h)\alpha_4 x^4 + \ldots$$

Hierin $x = 1$, dann $x = -1$ gesetzt, giebt

$$(2a + \alpha h) 2^{\alpha-1} = a + (a+h)\alpha_1 + (a+2h)\alpha_2 + (a+3h)\alpha_3 + (a+4h)\alpha_4 + \ldots.$$

$$o = a - (a+h)\alpha_1 + (a+2h)\alpha_2 - (a+3h)\alpha^3 + (a+4h)\alpha_4 - \ldots..$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Werthe von α, nur nicht für $\alpha = 1$.

$$(2a + mh) 2^{m-1} = a + (a+h) m_1 + (a+2h) m_2 + (a+3h) m_3 + \ldots + (a+mh-h) m_1 + (a+mh) 1.$$

$$o = a - (a+h) m_1 + (a+2h) m_2 - (a+3h) m_3 + \ldots \mp (a+mh-h) m_1 \pm (a+mh) . 1$$

In (X) werde $-\alpha$ statt α gesetzt, so findet man wegen $(-\alpha)_n = \pm (\alpha + n - 1)_n$ (§. 38. $XXVII.$)

$$(XI) \quad \frac{a + ax - ahx}{(1+x)^{\alpha+1}} = a - (a+h)\alpha_1 x + (a+2h)(\alpha+1)_2 x^2 - (a+3h)(\alpha+2)_3 x^3 + (a+4h)(\alpha+3)_4 x^4 - \ldots..$$

oder $-x$ statt x gesetzt, giebt

$$\frac{a - ax + ahx}{(1-x)^{\alpha+1}} = a + (a+h)\alpha_1 x + (a+2h)(\alpha+1)_2 x^2 + (a+3h)(\alpha+2)_3 x^3 + (a+4h)(\alpha+3)_4 x^4 + \ldots.$$

Hierin $\alpha = m + 1$ gesetzt, so wird wegen $(m+n)_n = (m+n)_m$ (§. 38. $LIV.$)

$$(XII)\ \frac{a-mh}{(1+x)^{m+1}}=a-(a+h)(m+1)_m x+(a+2h)(m+2)_m x^2-(a+3h)(m+3)_m x^3+\ldots\ldots$$

$$\frac{a(1-x)+(m+1)hx}{(1-x)^{m+2}}=a+(a+h)(m+1)_m x+(a+2h)(m+2)_m x^2+(a+3h)(m+3)_m x^3+\ldots.$$

Für $x=1$ und $x=-1$ wird

$$\frac{a-mh}{2^{m+1}}=a-(a+h)(m+1)_m+(a+2h)(m+2)_m-(a+3h)(m+3)_m+\ldots.$$

$$\frac{2a-(m+1)h}{(-2)^{m+2}}=a+(a+h)(m+1)_m+(a+2h)(m+2)_m+(a+3h)(m+3)_m+\ldots.$$

Nach (I) wird $(1+x)^{\alpha+r}=1+(\alpha+r)_1 x+(\alpha+r)_2 x^2+(\alpha+r)_3 x^3+\ldots$ oder $\frac{(1+x)^{\alpha+r}-1-(\alpha+r)_1 x-\ldots-(\alpha+r)_{r-1} x^{r-1}}{x^r}$

$$=(\alpha+r)_r+(\alpha+r)_{r+1} x+(\alpha+r)_{r+2} x^2+(\alpha+r)_{r+3} x^3+(\alpha+r)_{r+4} x^4+\ldots\ [I]$$

In (VII) §. 38. werde $t=r$ und $n=r+n$ gesetzt, so erhält man

$$(\alpha+r)_{r+n}=\frac{(\alpha+r)_r}{(r+n)_r}\,\alpha_n \text{ oder auch}$$

$$(\alpha+r)_{r+n}=\frac{\alpha+1.\alpha+2.\alpha+3\ldots\alpha+r}{1+n.2+n.3+n\ldots r+n}\,\alpha_n$$

Hierin nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt n gesetzt, die gefundenen Werthe mit den gleichgeltenden in $[I]$ vertauscht, und dann durch $\alpha+1.\alpha+2.\alpha+3\ldots\alpha+r$ dividirt, giebt:

$$(XIII)\ \frac{(1+x)^{\alpha+r}-1-(\alpha+r)_1 x-(\alpha+r)_2 x^2-\ldots-(\alpha+r)_{r-1} x^{r-1}}{\alpha+1.\alpha+2.\alpha+3\ldots\alpha+r.x^r}$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots r}+\frac{\alpha_1 x}{2.3\ldots r+1}+\frac{\alpha_2 x^2}{3.4\ldots r+2}+\frac{\alpha_3 x^3}{4.5\ldots r+3}+\frac{\alpha_4 x^4}{5.6\ldots r+4}+\ldots.$$

Nach einander hierin 1, 2, 3, ... statt r gesetzt, giebt

$$\frac{(1+x)^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)x}=1+\frac{\alpha_1 x}{2}+\frac{\alpha_2 x^2}{3}+\frac{\alpha_3 x^3}{4}+\frac{\alpha_4 x^4}{5}+\frac{\alpha_5 x^5}{6}+\frac{\alpha_6 x^6}{7}+\ldots.$$

$$\frac{(1+x)^{\alpha+2}-1-(\alpha+2)x}{\alpha+1.\alpha+2.x^2}=\frac{1}{1.2}+\frac{\alpha_1 x}{2.3}+\frac{\alpha_2 x^2}{3.4}+\frac{\alpha_3 x^3}{4.5}+\frac{\alpha_4 x^4}{5.6}+\frac{\alpha_5 x^5}{6.7}+\frac{\alpha_6 x^6}{7.8}+\ldots.$$

$$\frac{(1+x)^{\alpha+3}-1-(\alpha+3)x-(\alpha+3)_2 x^2}{\alpha+1.\alpha+2.\alpha+3.x^3}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{\alpha_1 x}{2.3.4}+\frac{\alpha_2 x^2}{3.4.5}+\frac{\alpha_3 x^3}{4.5.6}+\frac{\alpha_4 x^4}{5.6.7}+\frac{\alpha_5 x^5}{6.7.8}+\ldots$$

u. s. w.

Für $x=1$ wird:

$$\frac{2^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}=1+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_3}{4}+\frac{\alpha_4}{5}+\frac{\alpha_5}{6}+\frac{\alpha_6}{7}+\ldots.$$

$$\frac{2^{\alpha+2}-\alpha-3}{\alpha+1.\alpha+2}=\frac{1}{1.2}+\frac{\alpha_1}{2.3}+\frac{\alpha_2}{3.4}+\frac{\alpha_3}{4.5}+\frac{\alpha_4}{5.6}+\frac{\alpha_5}{6.7}+\frac{\alpha_6}{7.8}+\ldots.$$

$$\frac{2^{\alpha+3}-(\alpha+3)_2-\alpha-4}{\alpha+1.\alpha+2.\alpha+3}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{\alpha_1}{2.3.4}+\frac{\alpha_2}{3.4.5}+\frac{\alpha_3}{4.5.6}+\frac{\alpha_4}{5.6.7}+\frac{\alpha_5}{6.7.8}+\ldots$$

u. s. w.

Für $x = -1$ erhält man

$$\frac{1}{\alpha+1} = 1 - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} - \frac{\alpha_3}{4} + \frac{\alpha_4}{5} - \frac{\alpha_5}{6} + \frac{\alpha_6}{7} - \frac{\alpha_7}{8} + \ldots.$$

$$\frac{1}{\alpha+2} = \frac{1}{1.2} - \frac{\alpha_1}{2.3} + \frac{\alpha_2}{3.4} - \frac{\alpha_3}{4.5} + \frac{\alpha_4}{5.6} - \frac{\alpha_5}{6.7} + \frac{\alpha_6}{7.8} - \ldots.$$

$$\frac{1}{2(\alpha+3)} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{\alpha_1}{2.3.4} + \frac{\alpha_2}{3.4.5} - \frac{\alpha_3}{4.5.6} + \frac{\alpha_4}{5.6.7} - \frac{\alpha_5}{6.7.8} + \ldots.$$

$$\frac{1}{2.3(\alpha+4)} = \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{\alpha_1}{2.3.4.5} + \frac{\alpha_2}{3.4.5.6} - \frac{\alpha_3}{4.5.6.7} + \frac{\alpha_4}{5.6.7.8} - \ldots.$$

u. s. w.

Nach (I) wird

$$(1+2x)^\alpha = 1 + \alpha_1 2^1 x + \alpha_2 2^2 x^2 + \alpha_3 2^3 x^3 + \alpha_4 2^4 x^4 + \ldots.$$

Hierin nach §. 38. (LXXI) die 2^n entsprechenden Werthe gesetzt, giebt

$$(XIV)\ (1+2x)^\alpha = 1 + \frac{2}{1}\alpha_1 x + \frac{3.4}{1.3}\alpha_2 x^2 + \frac{4.5.6}{1.3.5}\alpha_3 x^3 + \frac{5.6.7.8}{1.3.5.7}\alpha_4 x^4 + \frac{6\ldots10}{1\ldots9}\alpha_5 x^5 + \ldots$$

und wenn $x = 1$, dann $x = -1$ gesetzt wird:

$$3^\alpha = 1 + \frac{2}{1}\alpha_1 + \frac{3.4}{1.3}\alpha_2 + \frac{4.5.6}{1.3.5}\alpha_3 + \frac{5.6.7.8}{1.3.5.7}\alpha_4 + \frac{6.7.8.9.10}{1.3.5.7.9}\alpha_5 + \ldots$$

$$(-1)^\alpha = 1 - \frac{2}{1}\alpha_1 + \frac{3.4}{1.3}\alpha_2 - \frac{4.5.6}{1.3.5}\alpha_3 + \frac{5.6.7.8}{1.3.5.7}\alpha_4 - \frac{6.7.8.9.10}{1.3.5.7.9}\alpha_5 + \ldots$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren erhält man:

$$(XV)\ \left(1 + \frac{x}{2}\right)^\alpha = 1 + \frac{1}{2}\alpha_1 x + \frac{1.3}{3.4}\alpha_2 x^2 + \frac{1.3.5}{4.5.6}\alpha_3 x^3 + \frac{1.3.5.7}{5.6.7.8}\alpha_4 x^4 + \ldots$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha = 1 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1.3}{3.4}\alpha_2 + \frac{1.3.5}{4.5.6}\alpha_3 + \frac{1.3.5.7}{5.6.7.8}\alpha_4 + \frac{1.3.5.7.9}{6.7.8.9.10}\alpha_5 + \ldots$$

$$\frac{1}{2^\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1.3}{3.4}\alpha_2 - \frac{1.3.5}{4.5.6}\alpha_3 + \frac{1.3.5.7}{5.6.7.8}\alpha_4 - \frac{1.3.5.7.9}{6.7.8.9.10}\alpha_5 + \ldots$$

Wird von der zweiten Reihe in (XIII) die darauf folgende dritte abgezogen, so findet man

$$(XVI)\ \frac{(\alpha+2)x(1+x)^{\alpha+1} - (1+x)^{\alpha+2} + 1}{(\alpha+1)(\alpha+2)x^2} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_1 x}{3} + \frac{\alpha_2 x^2}{4} + \frac{\alpha_3 x^3}{5} + \frac{\alpha_4 x^4}{6} + \frac{\alpha_5 x^5}{7} + \frac{\alpha_6 x^6}{8} + \ldots$$

und wenn man von der zweiten Reihe in (XIII) die darauf folgende dritte Reihe, doppelt genommen, abzieht, und dann die folgende vierte Reihe, doppelt genommen, addirt, so findet man

$$(XVII)\ \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)x^2(1+x)^{\alpha+1} - 2(\alpha+3)x(1+x)^{\alpha+2} + 2(1+x)^{\alpha+3} - 2}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)x^3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\alpha_1 x}{4} + \frac{\alpha_2 x^2}{5} + \frac{\alpha_3 x^3}{6} + \frac{\alpha_4 x^4}{7} + \frac{\alpha_5 x^5}{8} + \frac{\alpha_6 x^6}{9} + \ldots.$$

In den für $(a+x)^n$ (§. 30.) gefundenen Ausdruck werde $x-1$ statt x und $a = 1$, $n = \alpha$ gesetzt, so erhält man

$$(XVIII)\ x^\alpha = 1 + \alpha_1 \frac{x-1}{x} + (\alpha+1)_2\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + (\alpha+2)_3\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + (\alpha+3)_4\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + \ldots$$

Nach §. 29. wird ferner

$$(XIX)\ \frac{1}{a^{\alpha}} - \frac{1}{(a+x)^{\alpha}} = \frac{\alpha x}{a^{\alpha+1}} - \frac{(\alpha+1)_2 x^2}{a^{\alpha+2}} + \frac{(\alpha+2)_3 x^3}{a^{\alpha+3}} - \frac{(\alpha+3)_4 x^4}{a^{\alpha+4}} + \frac{(\alpha+4)_5 x^5}{a^{\alpha+5}} - \dots$$

§. 40.

Nach §. 38. (*LXVII*) wird $\frac{(\alpha-1)_r}{\beta_r} - \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}} = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha_r}{\beta_r}$. Hierin nach einander $r+1$; $r+2$; $r+3$; .... statt r gesetzt, giebt

$$\frac{(\alpha-1)_r}{\beta_r} - \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}} = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}\,\frac{\alpha_r}{\beta_r}$$

$$\frac{(\alpha-1)_{r+1}}{\beta_{r+1}} - \frac{(\alpha-1)_r}{\beta_r} = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}\,\frac{\alpha_{r+1}}{\beta_{r+1}}$$

$$\frac{(\alpha-1)_{r+2}}{\beta_{r+2}} - \frac{(\alpha-1)_{r+1}}{\beta_{r+1}} = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}\,\frac{\alpha_{r+2}}{\beta_{r+2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{(\alpha-1)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}} = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}\,\frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}}.$$

Die über einander stehenden Glieder addirt, und diejenigen welche sich aufheben weggelassen, dann mit $\frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}$ multiplizirt, wird

$$(I)\ \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\left(\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\left(\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{(\beta+1)\,\alpha_r}{\alpha\,(\beta+1)_r}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} + \frac{\alpha_{r+1}}{\beta_{r+1}} + \frac{\alpha_{r+2}}{\beta_{r+2}} + \frac{\alpha_{r+3}}{\beta_{r+3}} + \frac{\alpha_{r+4}}{\beta_{r+4}} + \dots + \frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}}.$$

Durchgängig $r-n$ statt r gesetzt, und die Reihenglieder in umgekehrter Ordnung geschrieben, giebt

$$(II)\ \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\left(\frac{(\alpha-1)_r}{\beta_r} - \frac{(\alpha-1)_{r-n-1}}{\beta_{r-n-1}}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} + \frac{\alpha_{r-1}}{\beta_{r-1}} + \frac{\alpha_{r-2}}{\beta_{r-2}} + \frac{\alpha_{r-3}}{\beta_{r-3}} + \frac{\alpha_{r-4}}{\beta_{r-4}} + \dots + \frac{\alpha_{r-n}}{\beta_{r-n}}$$

In (*I*) werde $-\alpha+r-1$ statt α gesetzt, so findet man, wegen $(-\alpha+r-1)_{r\pm n} = \pm(\alpha\pm n)_{r\pm n}$ (§. 38. *XXVII*).

$$(III)\ \frac{\alpha-r+1}{\alpha+\beta-r+2}\left(\frac{\alpha_{r-1}}{\beta_{r-1}} \pm \frac{(\alpha+1+n)_{r+n}}{\beta_{r+n}}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} - \frac{(\alpha+1)_{r+1}}{\beta_{r+1}} + \frac{(\alpha+2)_{r+2}}{\beta_{r+2}} - \frac{(\alpha+3)_{r+3}}{\beta_{r+3}} + \dots \pm \frac{(\alpha+n)_{r+n}}{\beta_{r+n}}.$$

Durchgängig mit ± 1 multiplizirt, dann $r-n$ statt r und $\alpha-n$ statt α gesetzt, giebt

$$(IV)\ \frac{\alpha-r+1}{\alpha+\beta-r+2}\left(\frac{(\alpha+1)_r}{\beta_r} \pm \frac{(\alpha-n)_{r-n-1}}{\beta_{r-n-1}}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} - \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}} + \frac{(\alpha-2)_{r-2}}{\beta_{r-2}} - \frac{(\alpha-3)_{r-3}}{\beta_{r-3}} + \dots \pm \frac{(\alpha-n)_{r-n}}{\beta_{r-n}}.$$

In (*I*) werde $-\beta+r-1$ statt β gesetzt, so findet man auf eine ähnliche Weise

$$(V)\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta-r}\left(\frac{(\alpha-1)_{r-1}}{(\beta-1)_{r-1}} \pm \frac{(\alpha-1)_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta-r}\left[\frac{\beta\cdot\alpha_r}{\alpha\cdot\beta_r} \pm \frac{(\alpha-1)_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}}\right] = \frac{\alpha_r}{\beta_r} - \frac{\alpha_{r+1}}{(\beta+1)_{r+1}} + \frac{\alpha_{r+2}}{(\beta+2)_{r+2}} - \frac{\alpha_{r+3}}{(\beta+3)_{r+3}} + \dots \pm \frac{\alpha_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}} \quad (VI)$$

$$(VI)\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta-r}\left(\frac{(\alpha-r)_r}{\beta_r} \pm \frac{(\alpha-1)_{r-n-1}}{(\beta-n-1)_{r-n-1}}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} - \frac{\alpha_{r-1}}{(\beta-1)_{r-1}} + \frac{\alpha_{r-2}}{(\beta-2)_{r-2}} - \frac{\alpha_{r-3}}{(\beta-3)_{r-3}} + \ldots \pm \frac{\alpha_{r-n}}{(\beta-n)_{r-n}}.$$

In (III) werde $-\beta + r - 1$ statt β gesetzt, so findet man wie vorhin

$$(VII)\ \frac{\alpha-r+1}{\alpha-\beta+1}\left(\frac{(\alpha+n+1)_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}} - \frac{\alpha_{r-1}}{(\beta-1)_{r-1}}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} + \frac{(\alpha+1)_{r+1}}{(\beta+1)_{r+1}} + \frac{(\alpha+2)_{r+2}}{(\beta+2)_{r+2}} + \frac{(\alpha+3)_{r+3}}{(\beta+3)_{r+3}} + \ldots + \frac{(\alpha+n)_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}}.$$

$$(VIII)\ \frac{\alpha-r+1}{\alpha-\beta+1}\left(\frac{(\alpha+1)_r}{\beta_r} - \frac{(\alpha-n)_{r-n-1}}{(\beta-n-1)_{r-n-1}}\right) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} + \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{(\beta-1)_{r-1}} + \frac{(\alpha-2)_{r-2}}{(\beta-2)_{r-2}} + \frac{(\alpha-3)_{r-3}}{(\beta-3)_{r-3}} + \ldots + \frac{(\alpha-n)_{r-n}}{(\beta-n)_{r-n}}.$$

In (V) (VI) (VII) und (VIII) werde $\beta = r$ gesetzt, so erhält man

$$(IX)\ (\alpha-1)_{r-1} \pm (\alpha-1)_{r+n} = \alpha_r - \alpha_{r+1} + \alpha_{r+2} - \alpha_{r+3} + \alpha_{r+4} - \alpha_{r+5} + \ldots \pm \alpha_{r+n}$$
$$(\alpha-r)_r \pm (\alpha-1)_{r-n-1} = \alpha_r - \alpha_{r-1} + \alpha_{r-2} - \alpha_{r-3} + \alpha_{r-4} - \alpha_{r-5} + \ldots \pm \alpha_{r-n}$$

$$(X)\ (\alpha+n+1)_{r+n} - \alpha_{r-1} = \alpha_r + (\alpha+1)_{r+1} + (\alpha+2)_{r+2} + (\alpha+3)_{r+3} + (\alpha+4)_{r+4} + \ldots + (\alpha+n)_{r+n}$$
$$(\alpha+1)_r - (\alpha-n)_{r-n-1} = \alpha_r + (\alpha-1)_{r-1} + (\alpha-2)_{r-2} + (\alpha-3)_{r-3} + (\alpha-4)_{r-4} + \ldots + (\alpha-n)_{r-n}$$

Für $r = 1$ in (IX) findet man, wenn hienächst $n - 1$ statt n gesetzt wird

$$\pm (\alpha-1)_n = 1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \ldots \pm \alpha_n$$

wenn daher das letzte Glied α_n positiv ist, so wird die ganze Summe positiv, und negativ, wenn das letzte Glied negativ ist.

In (III) (IV) (VII) und (VIII) werde $\alpha = r$ gesetzt, so findet man

$$(XI)\ \frac{\beta+1}{\beta+2}\left(\frac{1}{(\beta+1)_r} \pm \frac{1}{(\beta+1)_{r+n+1}}\right) = \frac{1}{\beta_r} - \frac{1}{\beta_{r+1}} + \frac{1}{\beta_{r+2}} - \frac{1}{\beta_{r+3}} + \frac{1}{\beta_{r+4}} - \frac{1}{\beta_{r+5}} + \ldots \pm \frac{1}{\beta_{r+n}}$$

$$\frac{\beta+1}{\beta+2}\left(\frac{1}{(\beta+1)_{r+1}} \pm \frac{1}{(\beta+1)_{r-n}}\right) = \frac{1}{\beta_r} - \frac{1}{\beta_{r-1}} + \frac{1}{\beta_{r-2}} - \frac{1}{\beta_{r-3}} + \frac{1}{\beta_{r-4}} - \frac{1}{\beta_{r-5}} + \ldots \pm \frac{1}{\beta_{r-n}}$$

$$(XII)\ \frac{\beta-r}{\beta-r-1}\left(\frac{1}{(\beta-1)_r} - \frac{1}{(\beta+n)_{r+n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\beta_r} + \frac{1}{(\beta+1)_{r+1}} + \frac{1}{(\beta+2)_{r+2}} + \frac{1}{(\beta+3)_{r+3}} + \frac{1}{(\beta+4)_{r+4}} + \ldots + \frac{1}{(\beta+n)_{r+n}}$$

$$\frac{\beta-r}{\beta-r-1}\left(\frac{1}{(\beta-n-1)_{r-n}} - \frac{1}{\beta_{r+1}}\right) = \frac{1}{\beta_r} + \frac{1}{(\beta-1)_{r-1}} + \frac{1}{(\beta-2)_{r-2}} + \frac{1}{(\beta-3)_{r-3}} + \frac{1}{(\beta-4)_{r-4}} + \ldots + \frac{1}{(\beta-n)_{r-n}}.$$

Nach §. 38. (LXII) ist $(\alpha+1)_{r+1} - \alpha_{r+1} = \alpha_r$. Hierin nach einander $\alpha+1$; $\alpha+2$; ... statt α gesetzt und eben so wie bei (I) verfahren, erhält man

$$(XIII)\ (\alpha+n+1)_{r+1} - \alpha_{r+1} = \alpha_r + (\alpha+1)_r + (\alpha+2)_r + (\alpha+3)_r + (\alpha+4)_r + (\alpha+5)_r + \ldots + (\alpha+n)_r.$$
$$(\alpha+1)_{r+1} - (\alpha-n)_{r+1} = \alpha_r + (\alpha-1)_r + (\alpha-2)_r + (\alpha-3)_r + (\alpha-4)_r + (\alpha-5)_r + \ldots + (\alpha-n)_r.$$

Setzt man hierin $\alpha = m$ und $n = m$ so wird wegen §. 21. (II)

$$(m+1)_{r+1} = m_r + (m-1)_r + (m-2)_r + (m-3)_r + (m-4)_r + \ldots + (r+2)_r + (r+1)_r + r_r$$

Hierin 1, 2, 3, 4, ... statt r gesetzt und die Glieder in umgekehrter Ordnung geschrieben, giebt:

$$(m+1)_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (m-2) + (m-1) + m$$
$$(m+1)_3 = 2_2 + 3_2 + 4_2 + 5_2 + 6_2 + \ldots + (m-2)_2 + (m-1)_2 + m_2$$
$$(m+1)_4 = 3_3 + 4_3 + 5_3 + 6_3 + 7_3 + \ldots + (m-2)_3 + (m-1)_3 + m_3$$
$$(m+1)_5 = 4_4 + 5_4 + 6_4 + 7_4 + 8_4 + \ldots + (m-2)_4 + (m-1)_4 + m_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m+1)_{m-2} = (m-3)_{m-3} + (m-2)_{m-3} + (m-1)_{m-3} + m_{m-3}$$
$$(m+1)_{m-1} = (m-2)_{m-2} + (m-1)_{m-2} + m_{m-2}$$
$$(m+1)_m = (m-1)_{m-1} + m_{m-1}$$
$$(m+1)_{m+1} = m_m$$

oder auch nach §. 38. (*LV*)

$$(m+1)_3 = (m-3)_{m-3} + (m-2)_{m-3} + (m-1)_{m-3} + m_{m-3}$$
$$(m+1)_2 = (m-2)_{m-2} + (m-1)_{m-2} + m_{m-2}$$
$$(m+1)_1 = (m-1)_{m-1} + m_{m-1}$$
$$(m+1)_0 = m_m.$$

Ferner ist nach §. 38. (*LXX*) $\frac{1}{(\alpha-1)_{r-1}} - \frac{1}{\alpha_{r-1}} = \frac{r-1}{r\alpha_r}$. Verfährt man hiemit auf eine ähnliche Weise wie oben, so findet man

$$(XIV)\ \frac{r}{r-1}\left(\frac{1}{(\alpha-1)_{r-1}} - \frac{1}{(\alpha+n)_{r-1}}\right) = \frac{1}{\alpha_r} + \frac{1}{(\alpha+1)_r} + \frac{1}{(\alpha+2)_r} + \frac{1}{(\alpha+3)_r} + \frac{1}{(\alpha+4)_r} + \ldots + \frac{1}{(\alpha+n)_r}$$

$$\frac{r}{r-1}\left(\frac{1}{(\alpha-n-1)_{r-1}} - \frac{1}{\alpha_{r-1}}\right) = \frac{1}{\alpha_r} + \frac{1}{(\alpha-1)_r} + \frac{1}{(\alpha-2)_r} + \frac{1}{(\alpha-3)_r} + \frac{1}{(\alpha-4)_r} + \ldots + \frac{1}{(\alpha-n)_r}.$$

In (*XIV*) §. 38. setze man $\alpha + 1$ statt α und $r + 1$ statt r, so wird

$$n\,(\alpha+n)_r = (r+1)\,(\alpha+n+1)_{r+1} - (\alpha+1)\,(\alpha+n)_r \quad [I]$$

Ferner werde in (*XIII*) $\alpha + 1$ statt α und $r + 1$ statt r gesetzt, dann durchgängig mit $r + 1$ multiplizirt; hierauf (*XIII*) mit $\alpha + 1$ multiplizirt und dieser Ausdruck von dem vorher gefundenen abgezogen, so findet man wegen [*I*]

$$(r+1)[(\alpha+n+2)_{r+2} - (\alpha+1)_{r+2}] - (\alpha+1)[(\alpha+n+1)_{r+1} - \alpha_{r+1}]$$
$$= 0 + 1\,(\alpha+1)_r + 2\,(\alpha+2)_r + 3\,(\alpha+3)_r + \ldots + n\,(\alpha+n)_r$$

Diesen Ausdruck mit h, dann (*XIII*) mit a multiplizirt und beide Ausdrücke zusammen addirt, so wird

$$(XV)\ (a - \alpha h - h)[(\alpha+n+1)_{r+1} - \alpha_{r+1}] + (r+1)h[(\alpha+n+2)_{r+2} - (\alpha+1)_{r+2}]$$
$$= a\alpha_r + (a+h)(\alpha+1)_r + (a+2h)(\alpha+2)_r + (a+3h)(\alpha+3)_r + \ldots + (a+nh)(\alpha+n)_r$$

Hierin $\alpha = r$ gesetzt, giebt:

$$(a - rh - h)(r+n+1)_{r+1} + (r+1)h(r+n+2)_{r+2} = \frac{(r+2)a + n(r+1)h}{r+2}(r+n+1)_{r+1}$$
$$= a r_r + (a+h)(r+1)_r + (a+2h)(r+2)_r + (a+3h)(r+3)_r + \ldots + (a+nh)(r+n)_r.$$

Für verschiedene Werthe von a, h, r, findet man

$$\frac{2.4+3n}{4}(n+3)_3 = 2.2_2 + 3.3_2 + 4.4_2 + 5.5_2 + \ldots + (n+2)(n+2)_2$$

$$\frac{3.5+4n}{4}(n+4)_4 = 3.3_2 + 4.4_2 + 5.5_2 + 6.6_2 + \ldots + (n+3)(n+3)_2$$

u. s. w.

Weil nach §. 38. (*LXI*) $\alpha_{m-1} = (\alpha+1)_m - \alpha_m$ ist, so findet man auch, wenn hierin $\alpha+1$ statt α gesetzt, und die vorstehende Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen hiezu addirt wird, wegen §. 38. (*LXII*)

$$\alpha_{m-2} = (\alpha+2)_m - 2(\alpha+1)_m + \alpha_m.$$

Wäre nun für irgend einen Werth von r,

$$\alpha_{m-r} = (\alpha+r)_m - r_1(\alpha+r-1)_m + r_2(\alpha+r-2)_m - \ldots \pm r_r\alpha_m \quad [I]$$

so läßt sich auch beweisen, daß dieser Satz für $r+1$ gilt. Denn man setze in der vorstehenden Gleichung $\alpha+1$ statt α, so wird

$$(\alpha+1)_{m-r} = (\alpha+r+1)_m - r_1(\alpha+r)_m + r_2(\alpha+r-1)_m - \ldots \pm r_r(\alpha+1)_m.$$

Nun kehre man in der Gleichung [*I*] die Zeichen um, und verbinde solche mit der vorstehenden Gleichung dergestalt, daß man die Gleichung nach den in Klammern befindlichen Gliedern ordnet, so erhält man wegen §. 38. (*LX*)

$$\alpha_{m-r-1} = (\alpha+r+1)_m - (r+1)_1(\alpha+r)_m + (r+1)_2(\alpha+r-1)_m - \ldots \mp (r+1)_{r+1}\alpha_m.$$

Nun gilt der Satz [*I*] für $r=1$ und $r=2$, also auch für $r=3, 4, 5, \ldots\ldots$ und für jede positive ganze Zahl r, daher ist allgemein

(*XVI*) $\alpha_{m-r} = (\alpha+r)_m - r_1(\alpha+r-1)_m + r_2(\alpha+r-2)_m - r_3(\alpha+r-3)_m + \ldots \pm r_r\alpha_m$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Nach §. 39. (*III*) ist

$$2^{\alpha-1} = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11} + \ldots\ldots \quad [II]$$

Hierin $\alpha-1$ statt α gesetzt, die entstandene Reihe von der vorstehenden abgezogen, so wird nach §. 38. (*LXVI*), wenn hienächst mit α multiplizirt wird,

$$\alpha 2^{\alpha-2} = \alpha_1 + 3\alpha_3 + 5\alpha_5 + 7\alpha_7 + 9\alpha_9 + 11\alpha_{11} + \ldots\ldots$$

Hievon die Reihe [*II*] abgezogen und durch 2 dividirt, giebt

$$(\alpha-2)_1 2^{\alpha-3} = \alpha_3 + 2\alpha_5 + 3\alpha_7 + 4\alpha_9 + 5\alpha_{11} + 7\alpha_{13} + 8\alpha_{15} + \ldots \quad [III]$$

Hierin $\alpha-1$ statt α gesetzt, die entstandene Reihe von der vorstehenden abgezogen, so wird nach §. 38. (*LXVI*), wenn hienächst mit α multiplizirt wird,

$$\alpha(\alpha-1)2^{\alpha-4} = 3\alpha_3 + 2.5\alpha_5 + 3.7\alpha_7 + 4.9\alpha_9 + 5.11\alpha_{11} + \ldots$$

Die Reihe [*III*] mit 3 multiplizirt und von vorstehender abgezogen, giebt, wenn hienächst durch 2.2 dividirt wird

$$(\alpha-3)_2 2^{\alpha-5} = \alpha_5 + 3\alpha_7 + 6\alpha_9 + 10\alpha_{11} + 15\alpha_{13} + \ldots\ldots \text{ oder}$$
$$= \alpha_5 + 3_2\alpha_7 + 4_2\alpha_9 + 5_2\alpha_{11} + 6_2\alpha_{13} + \ldots\ldots$$

Hieraus findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren:

$$(\alpha-4)_3 2^{\alpha-7} = \alpha_7 + 4\,\alpha_9 + 10\alpha_{11} + 20\alpha_{13} + 35\alpha_{15} + \ldots \text{ oder}$$
$$= \alpha_7 + 4_3\alpha_9 + 5_3\alpha_{11} + 6_3\alpha_{13} + 7_3\alpha_{15} + \ldots$$
$$(\alpha-5)_4 2^{\alpha-9} = \alpha_9 + 5_4\alpha_{11} + 6_4\alpha_{13} + 7_4\alpha_{15} + 8_4\alpha_{17} + \ldots$$

u. s. w. daher überhaupt, weil sich auf eine ähnliche Art wie bei (*III*) beweisen läßt, daß dieser Satz für $r+1$ gelten muß, wenn er für r gilt,

$$(XVII)\ (\alpha-r-1)_r 2^{\alpha-2r-1} = \alpha_{2r+1} + (r+1)_r\alpha_{2r+3} + (r+2)_r\alpha_{2r+5} + (r+3)_r\alpha_{2r+7} + (r+4)_r\alpha_{2r+9} + \ldots$$

§. 41.

Nach §. 22. (*II*) ist

$$(I)\ (\alpha+\beta)_m = \alpha_m + \alpha_{m-1}\beta_1 + \alpha_{m-2}\beta_2 + \alpha_{m-3}\beta_3 + \ldots + \alpha_1\beta_{m-1} + 1.\beta_m$$

wo m eine positive ganze Zahl, α und β aber jede mögliche Zahl bedeuten können.

Hierin $\beta = \alpha$ gesetzt, giebt

$$(II)\ (2\alpha)_m = \alpha_m + \alpha_{m-1}\alpha_1 + \alpha_{m-2}\alpha_2 + \alpha_{m-3}\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_{m-1} + 1.\alpha_m$$

Hierin $\alpha = m$ gesetzt, giebt nach §. 38. (*LVII*) und (*LXXII*)

$$(III)\ (2m)_m = \frac{1.3.5.7\ldots 2m-1}{1.2.3.4\ldots m} 2^m = 1 + m_1m_1 + m_2m_2 + m_3m_3 + \ldots + m_2m_2 + m_1m_1 + 1.1.$$

In (*I*) werde $\beta - 1$ statt β gesetzt und die entstandene Reihe von (*I*) abgezogen, so wird wegen $\beta_n - (\beta-1)_n = \frac{n\beta_n}{\beta}$ (§. 38. *LXV*)

$$(\alpha+\beta)_m - (\alpha+\beta-1)_m = \frac{m(\alpha+\beta)_m}{\alpha+\beta} = \alpha_{m-1}\frac{1.\beta_1}{\beta} + \alpha_{m-2}\frac{2\beta_2}{\beta} + \alpha_{m-3}\frac{3\beta_3}{\beta} + \ldots + 1.\frac{m\beta_m}{\beta}.$$

Diesen Ausdruck mit βh, dann (*I*) mit a multiplizirt, und beide Ausdrücke zusammen addirt, giebt:

$$(IV)\ \frac{a(\alpha+\beta)+m\beta h}{\alpha+\beta}(\alpha+\beta)_m = a\alpha_m + (a+h)\alpha_{m-1}\beta_1 + (a+2h)\alpha_{m-2}\beta_2 + \ldots + (a+mh)1.\beta_m$$

Hierin α mit β und β mit α vertauscht, dann durchgängig durch β_m dividirt, so findet man, wegen $\frac{\beta_{m-n}}{\beta_m} = \frac{m_n}{(\beta-m+n)_n}$ (§. 38. *IX*)

$$\frac{a(\alpha+\beta)+m\alpha h}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)_m}{\beta_m} = a + (a+h)\frac{m_1\alpha_1}{(\beta-m+1)_1} + \ldots + (a+nh)\frac{1.\alpha_m}{\beta_m}$$

Durchgängig $\beta + m - 1$ statt β gesetzt, giebt

$$(V)\ \frac{a(\alpha+\beta+m-1)+m\alpha h}{\alpha+\beta+m-1}\ \frac{(\alpha+\beta+m-1)_m}{(\beta+m-1)_m}$$

$$= a + (a+h)\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1} + (a+2h)\frac{m_2\alpha_2}{(\beta+1)_2} + (a+3h)\frac{m_3\alpha_3}{(\beta+2)_3} + \ldots + (a+mh-h)\frac{m_1\alpha_{m-1}}{(\beta+m-2)_{m-1}} + (a+mh)\frac{1.\alpha_m}{(\beta+m-1)_m}$$

Hierin $a = 1$ und $h = 0$ gesetzt, giebt

$$(VI)\ \frac{(\alpha+\beta+m-1)_m}{(\beta+m-1)_m} = 1 + \frac{m_1\alpha_1}{\beta_1} + \frac{m_2\alpha_2}{(\beta+1)_2} + \frac{m_3\alpha_3}{(\beta+2)_3} + \frac{m_4\alpha_4}{(\beta+3)_4} + \ldots + \frac{m_1\alpha_{m-1}}{(\beta+m-2)_{m-1}} + \frac{1.\alpha_m}{(\beta+m-1)_m}$$

oder wenn man $\beta = 1$ in (*V*) setzt:

$$(VII)\ \frac{a(\alpha+m)+m\alpha h}{\alpha+m}(\alpha+m)_m = a + (a+h)m_1\alpha_1 + (a+2h)m_2\alpha_2 + (a+3h)m_3\alpha_3 + \ldots (a+mh)1.\alpha_m$$

Hierin $a = h = 1$ gesetzt, giebt

(VIII) $\frac{\alpha+m(\alpha+1)}{\alpha+m}(\alpha+m)_m = 1+2m_1\alpha_1+3m_2\alpha_2+4m_3\alpha_3+5m_4\alpha_4+\ldots+mm_1\alpha_{m-1}+(m+1)1.\alpha_m$

und wenn $\beta = 1$ in (VI) gesetzt wird

(IX) $(\alpha+m)_m = 1+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3+m_4\alpha_4+m_5\alpha_5+\ldots+m_1\alpha_{m-1}+1.\alpha_m$.

In (V) werde $-\alpha$ statt α und $-\beta$ statt β gesetzt, so erhält man wegen

$\frac{(-\alpha)_n}{(n-\beta-1)_n} = \frac{\pm(\alpha+n-1)_n}{\pm\beta_n}$ (§. 38. XXVII und LIII)

(X) $\frac{a(\alpha+\beta-m+1)+m\alpha h}{\alpha+\beta-m+1}\,\frac{(\alpha+\beta)_m}{\beta_m}$

$= a+(a+h)\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1}+(a+2h)\frac{m_2(\alpha+1)_2}{\beta_2}+(a+3h)\frac{m_3(\alpha+2)_3}{\beta_3}+\ldots$

$\ldots+(a+mh-h)\frac{m_1(\alpha+m-2)_{m-1}}{\beta_{m-1}}+(a+mh)\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{\beta_m}$

Hierin $\beta = m$ gesetzt, giebt

$\frac{a(\alpha+1)+m\alpha h}{\alpha+1}(\alpha+m)_m = a+(a+h)\alpha_1+(a+2h)(\alpha+1)_2+(a+3h)(\alpha+2)_3+\ldots+(a+mh)(\alpha+m-1)_m$

Für $a = 1$ und $h = 0$ wird nach (X)

(XI) $\frac{(\alpha+\beta)_m}{\beta_m} = 1+\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1}+\frac{m_2(\alpha+1)_2}{\beta_2}+\frac{m_3(\alpha+2)_3}{\beta_3}+\ldots+\frac{m_1(\alpha+m-2)_{m-1}}{\beta_{m-1}}+\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{\beta_m}$

und hierin $\alpha = 1$ gesetzt, giebt:

(XII) $\frac{\beta+1}{\beta-m+1} = 1+\frac{m_1}{\beta_1}+\frac{m_2}{\beta_2}+\frac{m_3}{\beta_3}+\frac{m_4}{\beta_4}+\ldots+\frac{m_2}{\beta_{m-2}}+\frac{m_1}{\beta_{m-1}}+\frac{1}{\beta_m}$;

wegen $\frac{(\beta+1)_m}{\beta_m} = \frac{\beta+1}{\beta-m+1}$ (§. 38. XLI)

Nach §. 38. (LXXII) und (LXXIII) ist

$$\frac{\left(\frac{a}{h}\right)_n}{\left(\frac{b}{h}+n-1\right)_n} = \frac{a.a-h.a-2h\ldots(a-nh+h)}{b.b+h.b+2h\ldots(b+nh-h)}.$$

Nun setze man $\alpha = \frac{a}{h}$ und $\beta = \frac{b}{h}$ in (VI), so wird

(XIII) $\frac{\left(\frac{a+b}{h}+m-1\right)_m}{\left(\frac{b}{h}+m-1\right)_m}$

$= 1+m_1\frac{a}{b}+m_2\frac{a.a-h}{b.b+h}+m_3\frac{a.a-h.a-2h}{b.b+h.b+2h}+\ldots+m_1\frac{a.a-h\ldots a-mh+2h}{b.b+h\ldots b+mh-2h}+1.\frac{a.a-h\ldots a-mh+h}{b.b+h\ldots b+mh-h}$

In (V) werde $-\beta$ statt β gesetzt, so erhält man wegen $(-\beta+n-1)_n = \pm\beta_n$ (§. 38. LIII)

$$(XIV)\ \frac{a(\alpha-\beta+m-1)+m\alpha h}{\alpha-\beta+m-1}\cdot\frac{(\beta-\alpha)_m}{\beta_m}$$

$$= a-(a+h)\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1}+(a+2h)\frac{m_2\alpha_2}{\beta_2}-(a+3h)\frac{m_3\alpha_3}{\beta_3}+(a+4h)\frac{m_4\alpha_4}{\beta_4}-\ldots\ldots\mp(a+mh-h)\frac{m_1\alpha_{m-1}}{\beta_{m-1}}\pm(a+mh)\frac{1.\alpha_m}{\beta_m}.$$

Hierin $a = 1$ und $h = o$ gesetzt giebt

$$(XV)\ \frac{(\beta-\alpha)_m}{\beta_m}=1-\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1}+\frac{m_2\alpha_2}{\beta_2}-\frac{m_3\alpha_3}{\beta_3}+\frac{m_4\alpha_4}{\beta_4}-\ldots\mp\frac{m_1\alpha_{m-1}}{\beta_{m-1}}\pm\frac{1.\alpha_m}{\beta_m}.$$

In (XIV) und (XV) werde $-\alpha$ statt α und $-\beta$ statt β gesetzt, so findet man, wegen §. 38. (XXVII)

$$(XVI)\ \pm\frac{a(\beta-\alpha+m-1)+m\alpha h}{\beta-\alpha+m-1}\ \frac{(\alpha-\beta)_m}{(\beta+m-1)_m}$$

$$= a-(a+h)\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1}+(a+2h)\frac{m_2(\alpha+1)_2}{(\beta+1)_2}-(a+3h)\frac{m_3(\alpha+2)_3}{(\beta+2)_3}+\ldots\ldots\mp(a+mh-h)\frac{m_1(\alpha+m-2)_{m-1}}{(\beta+m-2)_{m-1}}\pm(a+mh)\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{(\beta+m-1)_m}$$

$$(XVII)\ \pm\frac{(\alpha-\beta)_m}{(\beta+m-1)_m}=1-\frac{m_1\alpha_1}{\beta_1}+\frac{m_2(\alpha+1)_2}{(\beta+1)_2}-\frac{m_3(\alpha+2)_3}{(\beta+2)_3}+\ldots\mp\frac{m_1(\alpha+m-2)_{m-1}}{(\beta+m-2)_{m-1}}\pm\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{(\beta+m-1)_m}$$

In (XVI) werde $\alpha = \beta = 1$ gesetzt, so erhält man

$$(XVIII)\ o=a-(a+h)m_1+(a+2h)m_2-(a+3h)m_3+(a+4h)m_4-\ldots\mp(a+mh-h)m_1\pm(a+mh).1.$$

In (XVII) $\beta = 1$ gesetzt, giebt

$$(XIX)\ \pm(\alpha-1)_m=1-m_1\alpha_1+m_2(\alpha+1)_2-m_3(\alpha+2)_3+\ldots\mp m_1(\alpha+m-2)_{m-1}\pm 1.(\alpha+m-1)_m$$

oder in (XVII) $\alpha = 1$ gesetzt, giebt

$$(XX)\ \frac{\beta-1}{\beta+m-1}=1-\frac{m_1}{\beta_1}+\frac{m_2}{(\beta+1)_2}-\frac{m_3}{(\beta+2)_3}+\frac{m_4}{(\beta+3)_4}-\ldots\mp\frac{m_1}{(\beta+m-2)_{m-1}}\pm\frac{1}{(\beta+m-1)_m}$$

weil $\pm\frac{(1-\beta)_m}{(\beta+m-1)_m}$ für $a=\beta-1$ nach §. 38. (XXXV) $\pm\frac{(-a)_m}{(a+m)_m}=\frac{a}{a+m}=\frac{\beta-1}{\beta+m-1}$ giebt.

Wird durchgängig in (XVII) $\frac{a}{h}$ statt α und $\frac{b}{h}$ statt β gesetzt, so findet man wegen §. 38. (LXXIII)

$$(XXI)\ \frac{\pm\left(\frac{a-b}{h}\right)_m}{\left(\frac{b}{h}+n-1\right)_m}$$

$$=1-m_1\frac{a}{b}+m_2\frac{a.a+h}{b.b+h}-m_3\frac{a.a+h.a+2h}{b.b+h.b+2h}+\ldots\mp m_1\frac{a\ldots a+mh-2h}{b\ldots b+mh-2h}\pm 1.\frac{a.a+h\ldots a+mh-h}{b.b+h\ldots b+mh-h}$$

In (VI) werde $\beta = r + 1$ gesetzt, so erhält man, wegen

$$(n+r)_n=(n+r)_r=\frac{n+r.n+r-1\ldots\ldots n+1}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ r}$$

(§. 38. *LIV*) wenn durchgängig durch $1.2.3\ldots\ldots r$ dividirt wird

$$(XXII)\ \frac{(\alpha+m+r)_m}{1.2.3\ldots\ldots r\,(m+r)_r}$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots r}+\frac{m_1\,\alpha_1}{2.3\ldots r+1}+\frac{m_2\,\alpha_2}{3.4\ldots r+2}+\frac{m_3\,\alpha_3}{4.5\ldots r+3}+\frac{m_4\,\alpha_4}{5.6\ldots r+4}+\ldots+\frac{m_1\,\alpha_{m-1}}{m\ldots m+r-1}+\frac{1.\alpha_m}{m+1.m+2\ldots m+r}$$

Hierin nach einander 1, 2, 3, ... statt r gesetzt, giebt

$$\frac{(\alpha+m+1)_m}{m+1}=1+\frac{m_1\,\alpha_1}{2}+\frac{m_2\,\alpha_2}{3}+\frac{m_3\,\alpha_3}{4}+\frac{m_4\,\alpha_4}{5}+\ldots+\frac{m_1\,\alpha_{m-1}}{m}+\frac{1.\alpha_m}{m+1}$$

$$\frac{(\alpha+m+2)_m}{2(m+2)_2}=\frac{1}{1.2}+\frac{m_1\,\alpha_1}{2.3}+\frac{m_2\,\alpha_2}{3.4}+\frac{m_3\,\alpha_3}{4.5}+\frac{m_4\,\alpha_4}{5.6}+\ldots.+\frac{m_1\,\alpha_{m-2}}{m.m+1}+\frac{1.\alpha_m}{m+1.m+2}$$

$$\frac{(\alpha+m+3)_m}{6(m+3)_3}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{m_1\,\alpha_1}{2.3.4}+\frac{m_2\,\alpha_2}{3.4.5}+\frac{m_3\,\alpha_3}{4.5.6}+\frac{m_4\,\alpha_4}{5.6.7}+\ldots..+\frac{1.\alpha_m}{m+1.m+2.m+3}$$

u. s. w.

Verfährt man eben so mit (*XVII*), so wird

$$(XXIII)\ \pm\frac{(\alpha-r-1)_m}{1.2.3\ldots\ldots r\,(m+r)_r}$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots r}-\frac{m_1\,\alpha_1}{2.3\ldots.r+1}+\frac{m_2(\alpha+1)_2}{3.4\ldots.r+2}-\frac{m_3(\alpha+2)_3}{4.5\ldots.r+3}+\frac{m_4(\alpha+3)_4}{5.6\ldots.r+4}-\ldots\pm\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{m+1.m+2\ldots..m+r}$$

$$\pm\frac{(\alpha-2)_m}{m+1}=1-\frac{m_1\,\alpha_1}{2}+\frac{m_2(\alpha+1)_2}{3}-\frac{m_3(\alpha+2)_3}{4}+\frac{m_4(\alpha+3)_4}{5}-\ldots.\pm\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{m+1}$$

$$\pm\frac{(\alpha-3)_m}{2(m+2)_2}=\frac{1}{1.2}-\frac{m_1\,\alpha_1}{2.3}+\frac{m_2(\alpha+1)_2}{3.4}-\frac{m_3(\alpha+2)_3}{4.5}+\ldots.\pm\frac{1.(\alpha+m-1)_m}{m+1.m+2}$$

u. s. w.

Wird in (*XVII*) $\frac{\alpha}{h}$ statt α und $\frac{\alpha}{h}+1$ statt β gesetzt, so erhält man, wegen

$\frac{\left(\frac{\alpha}{h}+n-1\right)_n}{\left(\frac{\alpha}{h}+n\right)_n}=\frac{\alpha}{\alpha+nh}$ (§. 38. *LXVII.*), wenn durchgängig durch α dividirt wird, und weil $\pm(-1)^n=1$ ist

$$(XXIV)\ \frac{1}{\alpha\left(\frac{\alpha}{h}+m\right)_m}=\frac{1}{\alpha}-\frac{m_1}{\alpha+h}+\frac{m_2}{\alpha+2h}-\frac{m_3}{\alpha+3h}+\frac{m_4}{\alpha+4h}-\ldots.\mp\frac{m_1}{\alpha+mh-h}\pm\frac{1}{\alpha+mh}.$$

Für $\alpha=1$ und $h=2$ wird

$$\frac{1}{(\frac{1}{2}+m)_m}=\frac{1}{1}-\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{5}-\frac{m_3}{7}+\frac{m_4}{9}-\ldots.\mp\frac{m_1}{2m-1}\pm\frac{1}{2m+1}$$

und für $\alpha=-1$ und $h=2$

$$1-\frac{1}{(m-\frac{1}{2})_m}=\frac{m_1}{1}-\frac{m_2}{3}+\frac{m_3}{5}-\frac{m_4}{7}+\ldots.\pm\frac{m_1}{2m-3}\mp\frac{1}{2m-1}.$$

In (*I*) werde $-\alpha-1$ statt α und $-\beta$ statt β gesetzt, so ist wegen §. 38. (*XXVII*) wenn hienächst durchgängig mit ± 1 multiplizirt wird

$(XXV)\quad (\alpha+\beta+m)_m$

$$=(\alpha+m)_m+(\alpha+m-1)_{m-1}\beta_1+(\alpha+m-2)_{m-2}(\beta+1)_2+(\alpha+m-3)_{m-3}(\beta+2)_3+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(\alpha+2)_2(\beta+m-3)_{m-2}+(\alpha+1)_1(\beta+m-2)_{m-1}+1.(\beta+m-1)_m.$$

Hierin $\alpha-m$ statt α und $\beta-\alpha$ statt β gesetzt, giebt:

$$(XXVI)\quad \beta_m=\alpha_m+(\alpha-1)_{m-1}(\beta-\alpha)_1+(\alpha-2)_{m-2}(\beta-\alpha+1)_2+(\alpha-3)_{m-3}(\beta-\alpha+2)_3+\ldots$$
$$\ldots\ldots+(\alpha-m+2)_2(\beta-\alpha+m-3)_{m-2}+(\alpha-m+1)_1(\beta-\alpha+m-2)_{m-1}+1.(\beta-\alpha+m-1)_m.$$

In (I) werde $\beta-r$ statt β gesetzt und durchgängig mit β_r multiplizirt, so findet man, wegen $\beta_r(\beta-r)_n=(r+n)_n\beta_{r+n}=(r+n)_r\beta_{r+n}$ (§. 38. XII und LIV)

$$(XXVII)\quad \beta_r(\alpha+\beta-r)_m=r_r\alpha_m\beta_r+(r+1)_r\alpha_{m-1}\beta_{r+1}+(r+2)_r\alpha_{m-2}\beta_{r+2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(r+m-1)_r\alpha_1\beta_{r+m-1}+(r+m)_r1.\beta_{r+m}.$$

Hierin $-\beta$ statt β gesetzt, so wird wegen $(-\beta)_{r+m}=\pm(\beta+r+m-1)_{r+m}$ (§. 38. XXVII), wenn hienächst mit ± 1 multiplizirt, und $\beta+1$ statt β gesetzt wird,

$$(XXVIII)\quad (\beta+r)_r(\alpha-\beta-r-1)_m=$$
$$=r_r\alpha_m(\beta+r)_r-(r+1)_r\alpha_{m-1}(\beta+r+1)_{r+1}+(r+2)_r\alpha_{m-2}(\beta+r+2)_{r+2}-\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\mp(r+m-1)_r\alpha_1(\beta+r+m-1)_{r+m-1}\pm(r+m)_r1.(\beta+r+m)_{r+m}$$

und wenn hierin -1 statt α gesetzt wird, so findet man, wegen

$(-2-\beta-r)_m=\pm(2+\beta+r+m-1)_n$ (§. 38. LVIII)

$$(XXIX)\quad (\beta+r)_r(\beta+r+m+1)_m=r_r(\beta+r)_r+(r+1)_r(\beta+r+1)_{r+1}+(r+2)_r(\beta+r+2)_{r+2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(r+m+1)_r(\beta+r+m-1)_{r+m-1}+(r+m)_r(\beta+r+m)_{r+m}.$$

Hierin $\beta-1$ statt β, dann nach einander $1, 2, 3\ldots\ldots$ statt r und $m-1, m-2, m-3,\ldots\ldots$ statt m gesetzt, giebt

$$\beta(\beta+m)_{m-1}=1.\beta_1+2(\beta+1)_2+3(\beta+2)_3+4(\beta+3)_4+\ldots\ldots+m(\beta+m-1)_m.$$
$$(\beta+1)_2(\beta+m)_{m-2}=2_2(\beta+1)_2+3_2(\beta+2)_3+4_2(\beta+3)_4+5_2(\beta+4)_5+\ldots\ldots+m_2(\beta+m-1)_m.$$
$$(\beta+2)_3(\beta+m)_{m-3}=3_3(\beta+2)_3+4_3(\beta+3)_4+5_3(\beta+4)_5+6_3(\beta+5)_6+\ldots\ldots+m_3(\beta+m-1)_m.$$

. . . .

und wenn man nach einander $m-2$, $m-1$, m statt r und $2, 1, 0$ statt m setzt:

$$(\beta+m-3)_{m-2}(\beta+m)_2=(m-2)_{m-2}(\beta+m-3)_{m-2}+(m-1)_{m-2}(\beta+m-2)_{m-1}+m_{m-2}(\beta+m-1)_m$$
$$(\beta+m-2)_{m-1}(\beta+m)_1=(m-1)_{m-1}(\beta+m-2)_{m-1}+m_{m-1}(\beta+m-1)_m$$
$$(\beta+m-1)_m\quad(\beta+m)_0=m_m(\beta+m-1)_m$$

In (XXVII) werde -1 statt α gesetzt und hienächst durchgängig mit ± 1 multiplizirt, so erhält man

$$(XXX)\quad \pm\beta_r(\beta-r-1)_m=r_r\beta_r-(r+1)_r\beta_{r+1}+(r+2)_r\beta_{r+2}-(r+3)_r\beta_{r+3}+(r+4)_r\beta_{r+4}-\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\mp(r+m-1)_r\beta_{r+m-1}\pm(r+m)_r\beta_{r+m}.$$

Hierin nach einander $1, 2, 3\ldots\ldots$ statt r und $m-1$, $m-2$, $m-3$, $\ldots\ldots$ statt m gesetzt, giebt

$$\mp\beta_1(\beta-2)_{m-1}=1\,\beta_1-2\,\beta_2+3\,\beta_3-4\,\beta_4+5\,\beta_5-6\,\beta_6+\ldots\ldots\mp m\,\beta_m;$$
$$\pm\beta_2(\beta-3)_{m-2}=2_2\beta_2-3_2\beta_3+4_2\beta_4-5_2\beta_5+6_2\beta_6-\ldots\ldots\pm m_2\beta_m;$$
$$\mp\beta_3(\beta-4)_{m-3}=3_3\beta_3-4_3\beta_4+5_3\beta_5-6_3\beta_6+7_3\beta_7-\ldots\ldots\mp m_3\beta_m;$$

u. s. w.

und

und wenn man nach einander 2, 1, 0 statt m, und $m-2$, $m-1$, m statt r setzt

$$+\beta_{m-2}(\beta-m+1)_2=(m-2)_{m-2}\beta_{m-2}-(m-1)_{m-2}\beta_{m-1}+m_{m-2}\beta_m;$$
$$-\beta_{m-1}\;(\beta-m)_1=(m-1)_{m-1}\beta_{m-1}-m_{m-1}\beta_m;$$
$$+\beta_m\;(\beta-m-1)_0=m_m\beta_m.$$

Es ist $(-1)_m=\pm 1$ (§. 33.) daher, wenn -1 statt α in (IV) gesetzt wird,

$$\frac{a(\beta-1)+m\beta h}{\beta-1}(\beta-1)_m=\pm a\mp(a+h)\beta_1\pm(a+2h)\beta_2\mp\ldots+(a+mh)\beta_m \text{ oder}$$

$$(XXXI)\;\pm\frac{a(\beta-1)+m\beta h}{\beta-1}(\beta-1)_m$$
$$=a-(a+h)\beta_1+(a+2h)\beta_2-(a+3h)\beta_3+(a+4h)\beta_4-\ldots\pm(a+mh)\beta_m.$$

Für $a=h=1$ wird:

$$\pm\frac{\beta-1+m\beta}{\beta-1}(\beta-1)_m=1-2\beta_1+3\beta_2-4\beta_3+5\beta_4-\ldots\pm(m+1)\beta_m.$$

Für $a=o$ und $h=1$ wird:

$$\mp\frac{m\beta(\beta-1)_m}{\beta-1}=1\beta_1-2\beta_2+3\beta_3-4\beta_4+5\beta_5-6\beta_6+\ldots\mp m\beta_m$$

und für $a=1$ und $h=o$ erhält man die Summe der auf einander folgenden Binomialkoeffizienten mit abwechselnden Zeichen, oder

$$\pm(\beta-1)_m=1-\beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4-\beta_5+\beta_6-\beta_7+\ldots\mp\beta_{m-1}\pm\beta_m.$$

In (XXXI) werde $a=1$; $h=o$, $\beta=\alpha+1$ und $m=m+1$ gesetzt, so findet man unter der Voraussetzung, daß für ein gerades m die obern Zeichen gelten:

$$\mp\alpha_{m+1}=\mp(\alpha+1)_{m+1}\pm(\alpha+1)_m\mp(\alpha+1)_{m-1}\pm\ldots+(\alpha+1)_2-(\alpha+1)_1+1$$

oder durchgängig mit ∓ 1 multiplizirt, giebt:

$$\alpha_{m+1}\pm 1=(\alpha+1)_{m+1}-(\alpha+1)_m+(\alpha+1)_{m-1}-\ldots\mp(\alpha+1)_2\pm(\alpha+1)_1.$$

Wird der Faktor $(\alpha+1)$ von den auf einander folgenden Binomialkoeffizienten getrennt, so erhält man

$$(XXXII)\;\frac{\alpha_{m+1}\pm 1}{\alpha+1}=\frac{\alpha_m}{m+1}-\frac{\alpha_{m-1}}{m}+\frac{\alpha_{m-2}}{m-1}-\frac{\alpha_{m-3}}{m-2}+\ldots\mp\frac{\alpha_3}{4}\pm\frac{\alpha_2}{3}\mp\frac{\alpha_1}{2}\pm 1.$$

Mit $a+\alpha$ in 1 dividirt und die Division bis zum $m$ten Gliede des Quotienten fortgesetzt, giebt

$$\frac{1}{a+\alpha}=\frac{1}{a}-\frac{\alpha}{a^2}+\frac{\alpha^2}{a^3}-\frac{\alpha^3}{a^4}+\frac{\alpha^4}{a^5}-\frac{\alpha^5}{a^6}+\ldots\mp\frac{\alpha^{m-1}}{a^m}\pm\frac{\alpha^m}{a^m(a+\alpha)},$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades m gelten, und $\pm\frac{\alpha^m}{a^m(a+\alpha)}$ den Rest bezeichnet.

In vorstehenden Ausdruck nach einander $\beta, 2\beta, 3\beta, \ldots m\beta$ statt a gesetzt, giebt:

$$\frac{1}{\beta+\alpha}=\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^3}-\ldots\ldots\mp\frac{\alpha^{m-1}}{\beta^m}\pm\frac{\alpha^m}{\beta^m(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{1}{2\beta+\alpha}=\frac{1}{2\beta}-\frac{\alpha}{2^2\beta^2}+\frac{\alpha^2}{2^3\beta^3}-\ldots\ldots\mp\frac{\alpha^{m-1}}{2^m\beta^m}\pm\frac{\alpha^m}{2^m\beta^m(\alpha+2\beta)}$$

. . . .

$$\frac{1}{m\beta+\alpha}=\frac{1}{m\beta}-\frac{\alpha}{m^2\beta^2}+\frac{\alpha^2}{m^3\beta^3}-\ldots\ldots\mp\frac{\alpha^{m-1}}{m^m\beta^m}\pm\frac{\alpha^m}{m^m\beta^m(\alpha+m\beta)}.$$

Die auf einander folgenden Reihen mit $m_1 1^m$; $-m_2 2^m$; $m_3 3^m$; .... $\mp m_m m^m$ multiplizirt, giebt

$$+\frac{m_1 1^m}{\beta+\alpha}=+\frac{m_1 1^{m-1}}{\beta}-\frac{m_1 1^{m-2}\alpha}{\beta^2}+\frac{m_1 1^{m-3}\alpha^2}{\beta^3}-\ldots\mp\frac{m_1\alpha^{m-1}}{\beta^m}\pm\frac{m_1\alpha^m}{\beta^m(\alpha+\beta)}$$

$$-\frac{m_2 2^m}{2\beta+\alpha}=-\frac{m_2 2^{m-1}}{\beta}+\frac{m_2 2^{m-2}\alpha}{\beta^2}-\frac{m_2 2^{m-3}\alpha^2}{\beta^3}+\ldots\pm\frac{m_2\alpha^{m-1}}{\beta^m}\mp\frac{m_2\alpha^m}{\beta^m(\alpha+2\beta)}$$

. . . .

$$\mp\frac{m_m m^m}{m\beta+\alpha}=\mp\frac{m_m m^{m-1}}{\beta}\pm\frac{m_m m^{m-2}\alpha}{\beta^2}\mp\frac{m_m m^{m-3}\alpha^2}{\beta^3}\pm\ldots+\frac{m_m\alpha^{m-1}}{\beta^m}-\frac{m_m\alpha^m}{\beta^m(\alpha+m\beta)}.$$

Die unter einander stehenden Glieder addirt, giebt

$$S=\frac{m_1 1^m}{\alpha+\beta}-\frac{m_2 2^m}{\alpha+2\beta}+\frac{m_3 3^m}{\alpha+3\beta}-\ldots\ldots\mp\frac{m_m m^m}{\alpha+m\beta}$$

$$=\begin{cases}+\frac{1}{\beta}\,[m_1 1^{m-1}-m_2 2^{m-1}+m_3 3^{m-1}-\ldots\mp m_m m^{m-1}]\\ -\frac{\alpha}{\beta^2}\,[m_1 1^{m-2}-m_2 2^{m-2}+m_3 3^{m-2}-\ldots\mp m_m m^{m-2}]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mp\frac{\alpha^{m-1}}{\beta^m}\,[m_1-m_2+m_3-\ldots\mp m_m]\\ \pm\frac{\alpha^m}{\beta^m}\left[\frac{m_1}{\alpha+\beta}-\frac{m_2}{\alpha+2\beta}+\frac{m_3}{\alpha+3\beta}-\ldots\mp\frac{m_m}{\alpha+m\beta}\right]\end{cases}$$

Alle vorstehende in Klammern enthaltene Reihen, mit Ausnahme der beiden letzten, sind $=0$ (§. 39. *VIII*); die vorletzte ist $=1$, (§. 39. *I.*) und die letzte $=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}+m\right)_m}$ (*XXIV*), daher findet man

$$S=\mp\frac{\alpha^{m-1}}{\beta^m}\pm\frac{\alpha^m}{\beta^m}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}+m\right)_m}\right]=\mp\frac{\alpha^{m-1}}{\beta^m\left(\frac{\alpha}{\beta}+m\right)_m},\text{ folglich}$$

$$(\textit{XXXIII})\quad\frac{\mp\alpha^{m-1}}{\beta^m\left(\frac{\alpha}{\beta}+m\right)_m}=\frac{m_1 1^m}{\alpha+\beta}-\frac{m_2 2^m}{\alpha+2\beta}+\frac{m_3 3^m}{\alpha+3\beta}-\frac{m_4 4^m}{\alpha+4\beta}+\ldots\mp\frac{m_m m^m}{\alpha+m\beta}$$

Hierin $\alpha = m + 1$ und $\beta = 1$ gesetzt, giebt

$$\frac{\mp(m+1)^{m-1}}{(2m+1)_m} = \frac{m_1 1^m}{m+2} - \frac{m_2 2^m}{m+3} + \frac{m_3 3^m}{m+4} - \ldots \mp \frac{m_m\, m^m}{2m+1}$$

welches der von Herrn Prof. Fischer gefundene Ausdruck ist. (Theorie der Dimensionszeichen, 1. Theil, Halle, 1792. §. 157. S. 152.)

Bei den vorstehenden und allen vorhergehenden Ausdrücken dieses §. ist zu bemerken, daß die obern Zeichen für ein gerades, und die untern für ein ungerades m gelten.

Noch einige allgemeine Ausdrücke für Reihen mit Binomialkoeffizienten, findet man §. 48. 75. 377. und 522.

Hr. **Buzengeiger** hat in einer besondern Abhandlung mehrere merkwürdige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zusammengestellt. M. s.

Hindenburg Archiv der Mathematik, 2. Band, Leipzig 1798. *VI.* Heft. S. 161 bis 173.

§. 42.

Sind $A\ A_1\ A_2 \ldots A_n$ ganz willkührlich gegebene Größen, und setzt man die algebraische Summe derselben $= {}^1A_n$ oder $A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = {}^1A_n$ [*I*], so kann man auf eine ähnliche Weise und zur bessern Uebersicht auch die Summen der einzelnen auf einander folgenden Glieder durch

$A = {}^1A$

$A + A_1 = {}^1A_1$

$A + A_1 + A_2 = {}^1A_2$

. . . .

$A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} = {}^1A_{n-1}$ bezeichnen.

Sieht man diese einzelne Summen wieder als Glieder einer Reihe an, deren Summe man sucht, und setzt ${}^1A + {}^1A_1 + {}^1A_2 + {}^1A_3 + \ldots + {}^1A_{n-1} = {}^2A_{n-1}$ [*II*] so kann ma nauf diese Weise fortfahren, und wieder die einzelnen auf einander folgenden Summen, als Glieder neuer Reihen ansehen. Hienach erhält man, weil jede folgende Reihe ein Glied weniger als die vorhergehende hat,

${}^2A + {}^2A_1 + {}^2A_2 + {}^2A_3 + {}^2A_4 + \ldots + {}^2A_{n-2} = {}^3A_{n-2}$ [*III*]

${}^3A + {}^3A_1 + {}^3A_2 + {}^3A_3 + \ldots + {}^3A_{n-3} = {}^4A_{n-3}$ [*IV*]

${}^4A + {}^4A_1 + {}^4A_2 + \ldots + {}^4A_{n-4} = {}^5A_{n-4}$ [*V*]

. . . .

${}^{n-2}A + {}^{n-2}A_1 + {}^{n-2}A_2 = {}^{n-1}A_2$

${}^{n-1}A + {}^{n-1}A_1 = {}^nA_1$

${}^nA = {}^{n+1}A.$

Sucht man diese Summen, nicht wie hier, durch die vorhergehenden Summen, sondern mittelst der gegebenen Glieder $A\ A_1\ A_2 \ldots A_n$ auszudrücken, so setze man in [*II*] die Werthe aus [*I*], so wird

(*I*) ${}^2A_{n-1} = nA + (n-1)A_1 + (n-2)A_2 + \ldots + 2A_{n-2} + 1.A_{n-1}$

Hienach wird ${}^2A = 1A$; ${}^2A_1 = 2A + 1A_1$; ${}^2A_2 = 3A + 2A_1 + A_2$ u. s. w. Diese Werthe in [*III*] gesetzt, geben

$$
\begin{aligned}
{}^3A_{n-2} = {} & 1A \\
& + 2A + 1A_1 \\
& + 3A + 2A_1 + 1A_2 \\
& \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
& + (n-1)A + (n-2)A_1 + (n-3)A_2 + \ldots + 2A_{n-3} + 1A_{n-2}
\end{aligned}
$$

oder §. 38. (*XIII*)

$$(II)\quad {}^3A_{n-2} = n_2 A + (n-1)_2 A_1 + (n-2)_2 A_2 + \ldots + 3_2 A_{n-3} + 2_2 A_{n-2}$$

Auf eine ähnliche Weise diese Werthe eben so in [*IV*] gesetzt, geben

$${}^4A_{n-3} = [2_2+3_2+\ldots+(n-1)_2]A + [2_2+3_2+\ldots+(n-2)_2]A_1 + \ldots + [2_2+3_2]A_{n-4} + 2_2 A_{n-3}$$

oder §. 40. (*XIII*).

$$(III)\quad {}^4A_{n-3} = n_3 A + (n-1)_3 A_1 + (n-2)_3 A_2 + \ldots + 4_3 A_{n-4} + 3_3 A_{n-3}.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$(IV)\quad {}^5A_{n-4} = n_4 A + (n-1)_4 A_1 + (n-2)_4 A_2 + \ldots + 5_4 A_{n-5} + 4_4 A_{n-4}$$

u. s. w.

Wären z. B. die Zahlen 3, 2, 4, 1, 5, 6, 7, 9 gegeben, so wird hier $A = 3$; $A_1 = 2, \ldots . A_7 = 9$ also $n = 7$, und man findet die auf einander folgenden Summen aus den gegebenen Zahlen durch folgende Rechnung, nach welcher es nur darauf ankommt um irgend eine Zahl zu erhalten, die unmittelbar darüber stehende zur nächst vorhergehenden zu addiren.

3	2	4	1	5	6	7	9
3	5	9	10	15	21	28	37
3	8	17	27	42	63	91	
3	11	28	55	97	160		
3	14	42	97	194			
3	17	59	156				
3	20	79					
3	23						
3							

Hätte man die auf einander folgenden Summen nach vorstehenden Ausdrücken berechnen wollen, so erhielte man auch

$$
\begin{aligned}
& 7\,.3 + 6\,.2 + 5\,.4 + 4\,.1 + 3\,.5 + 2\,.6 + 1.7 = 91 = {}^2A_6 \\
& 7_2.3 + 6_2.2 + 5_2.4 + 4_2.1 + 3_2.5 + 2_2.6 = 160 = {}^3A_5 \\
& 7_3.3 + 6_3.2 + 5_3.4 + 4_3.1 + 3_3.5 = 194 = {}^4A_4 \\
& 7_4.3 + 6_4.2 + 5_4.4 + 4_4.1 = 156 = {}^5A_3 \\
& 7_5.3 + 6_5.2 + 5_5.4 = 79 = {}^6A_2 \\
& 7_6.3 + 6_6.2 = 23 = {}^7A_1 \\
& 7_7.3 = 3 = {}^8A
\end{aligned}
$$

Sind einige der gegebenen Zahlen negativ, so bleibt das bisherige Verfahren ungeändert, nur daß man die algebraische Summen der auf einander folgenden Glieder in Rechnung bringen muß.

Wären z. B. die Zahlen $+2$, -3, $+4$, $+6$, -7 gegeben, also $A = 2$, $A_1 = -3$, $A_2 = 4$, $A_3 = 6$, $A_4 = -7$, so entsteht folgende Rechnung

$+2$	-3	$+4$	$+6$	-7
$+2$	-1	$+3$	$+9$	$+2$
$+2$	$+1$	$+4$	$+13$	
$+2$	$+3$	$+7$		
$+2$	$+5$			
$+2$				

also wird ${}^2A_3 = 13$; ${}^3A_2 = 7$; ${}^4A_1 = 5$; ${}^5A = 2$.

§. 44.

Nach §. 25. ist

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} x^2 + \ldots \text{ und}$$

$$(a-x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} x^2 - \ldots \text{ daher}$$

$$(I)\ (a+x)^n + (a-x)^n = 2\left[a^n + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4} x^4 + \ldots\right]$$

Wenn daher n eine ganze positive Zahl ist, so muß die Reihe abbrechen und man erhält einen endlichen Ausdruck.

Für $n = 3$ ist

$$(a+x)^3 + (a-x)^3 = 2(a^3 + 3ax^2)$$

und für $n = 4$

$$(a+x)^4 + (a-x)^4 = 2(a^4 + 6a^2x^2 + x^4)$$

Man setze $x = b\sqrt{-1}$. Nun ist $(\sqrt{-1})^2 = -1$; $(\sqrt{-1})^4 = +1$; .... also $x^2 = -b^2$; $x^4 = b^4$; $x^6 = -b^6$; ... werden daher diese Werthe mit $x, x^2, x^4, \ldots$ in der vorstehenden Gleichung vertauscht, so erhält man

$$(II)\ (a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n = 2a^n\left[1 - \frac{n.n-1}{1.2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4} - \frac{n.n-1\ldots n-5}{1.2.3.4.5.6}\frac{b^6}{a^6} + \ldots\right]$$

Es ist daher die Summe der beiden unmöglichen Ausdrücken, einer möglichen Größe gleich, und wenn n eine ganze positive Zahl ist, so muß die Reihe abbrechen. Setzt man nach einander statt n die Zahlen 1; 2; 3; .... so wird:

$$(a+b\sqrt{-1}) + (a-b\sqrt{-1}) = 2a$$

$$(a+b\sqrt{-1})^2 + (a-b\sqrt{-1})^2 = 2a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$(a+b\sqrt{-1})^3 + (a-b\sqrt{-1})^3 = 2a^3\left(1 - 3\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$(a+b\sqrt{-1})^4 + (a-b\sqrt{-1})^4 = 2a^4\left(1 - 6\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)$$

u. s. w.

Für $n = \frac{1}{3}$ erhält man,

$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}=2\sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1.2}{3.6}\,\frac{b^2}{a^2}-\frac{1.2.5.\,8}{3.6.9.12}\,\frac{b^4}{a^4}+\frac{1.2.5.\,8.11.14}{3.6.9.12.15.18}\,\frac{b^6}{a^6}-\dots\right]$$

$$=2\sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1}{3^2}\,\frac{b^2}{a^2}-\frac{5.8}{4.3^5}\,\frac{b^4}{a^4}+\frac{5.8.11.14}{4.5.6.3^7}\,\frac{b^6}{a^6}-\frac{5.8.11.14.17.20}{4.5.6.7.8.3^9}\,\frac{b^8}{a^8}+\dots\right]$$

Beispiel. Um den Ausdruck $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ rational zu machen, setze man denselben $=\frac{1}{2^n}\left[(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n\right]$.

Setzt man nun nach (I) $a = 1$ und $x = \sqrt{5}$, so erhält man

$$(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=2\left[1+\frac{n.n-1}{1.2}.5+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}.5^2+\dots\right] \text{ daher.}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n-1}}\left[1+\frac{n.n-1}{1.2}.5+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}.5^2+\frac{n\dots n-5}{1\dots\;6}.5^3+\dots\right]$$

Diese Reihe bricht ab, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

§. 45.

Nach §. 44. findet man ferner

$$(I)\;(a+x)^n-(a-x)^n=2\left[\frac{n}{1}\,a^{n-1}x+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-3}x^3+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\,a^{n-5}x^5+\dots\right]$$

wo die Reihe ebenfalls abbricht, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man $x = b\sqrt{-1}$ so wird $x^3 = -b^3\sqrt{-1}$; $x^5 = b^5\sqrt{-1}$; $x^7 = -b^7\sqrt{-1}$; .. daher wenn diese Werthe in die Gleichung (I) gesetzt werden, so erhält man

$$(a+b\sqrt{-1})^n-(a-b\sqrt{-1})^n=2a^n\sqrt{-1}\left[\frac{n}{1}\,\frac{b}{a}-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,\frac{b^3}{a^3}+\frac{n.n-1\dots n-4}{1.2\dots5}\,\frac{b^5}{a^5}-\dots\right]$$

oder, wenn auf beiden Seiten durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird und weil $\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}=-\sqrt{-1}$ ist,

$$(II)\;\frac{(a+b\sqrt{-1})^n-(a-b\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}}=\left[(a-b\sqrt{-1})^n-(a+b\sqrt{-1})^n\right]\sqrt{-1}=$$
$$2a^n\left[\frac{n}{1}\,\frac{b}{a}-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,\frac{b^3}{a^3}+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\,\frac{b^5}{a^5}-\dots\right]$$

Es sind daher die beiden unmöglichen Ausdrücke einer möglichen Größe gleich, und die Reihe bricht offenbar ab, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Für $n = \frac{1}{3}$ findet man

$$\left[\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}\right]\sqrt{-1}=2\sqrt[3]{a}\left[\frac{1}{3}\,\frac{b}{a}-\frac{1.2.5}{3.6.9}\,\frac{b^3}{a^3}+\frac{1.2.5.\,8.11}{3.6.9.12.15}\,\frac{b^5}{a^5}-\dots\right]$$

$$=2\sqrt[3]{a}\left[\frac{1}{3}\,\frac{b}{a}-\frac{5}{3^4}\,\frac{b^3}{a^3}+\frac{5.8.11}{4.5.3^6}\,\frac{b^5}{a^5}-\frac{5.8.11.14.17}{4.5.6.7.3^8}\,\frac{b^7}{a^7}+\dots\right]$$

§. 46.

Setzt man b statt x in (I) §. 44., so wird

$$(a+b)^n+(a-b)^n=2a^n\left[1+\frac{n.n-1}{1.2}\,\frac{b^2}{a^2}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,\frac{b^4}{a^4}+\dots\right]$$

Diesen Werth von (*II*) §. 44. abgezogen giebt

$$(I)\ (a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n$$
$$=(a+b)^n+(a-b)^n-4a^n\left[\frac{n.n-1}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{n.n-1\ldots n-5}{1.2\ldots 6}\frac{b^6}{a^6}+\frac{n.n-1\ldots n-9}{1.2\ldots 10}\frac{b^{10}}{a^{10}}+\ldots\right]$$

Ferner erhält man nach (*I*) §. 45.

$$(a+b)^n-(a-b)^n=2a^n\left[\frac{n}{1}\frac{b}{a}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\ldots.\right]$$

Wird dieser Ausdruck von (*II*) §. 45. abgezogen, so erhält man

$$(II)\ [(a-b\sqrt{-1})^n-(a+b\sqrt{-1})^n]\sqrt{-1}$$
$$=(a+b)^n-(a-b)^n-4a^n\left[\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\frac{n.n-1\ldots n-6}{1.2\ldots 7}\frac{b^7}{a^7}+\frac{n.n-1\ldots n-10}{1.2\ldots 11}\frac{b^{11}}{a^{11}}+\ldots\right]$$

§. 47.

Um für den Fall, daß $b > a$ werde, eine Reihe zu finden, bei welcher die Glieder statt $\frac{b}{a}$ den Faktor $\frac{a}{b}$ erhalten, bemerke man daß

$$b\sqrt{-1}+a=\left(b+\frac{a}{\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}=(b-a\sqrt{-1})\sqrt{-1}\ \text{ und}$$
$$-b\sqrt{-1}+a=\left(b-\frac{a}{\sqrt{-1}}\right)(-1)\sqrt{-1}=(b+a\sqrt{-1})(-1)\sqrt{-1}\ \text{ ist.}$$

Hienach wird

$$(a+b\sqrt{-1})^n=(b-a\sqrt{-1})^n(\sqrt{-1})^n\ \text{ und}$$
$$(a-b\sqrt{-1})^n=(b+a\sqrt{-1})^n(-1)^n(\sqrt{-1})^n.$$

Wendet man dies auf den besondern Fall an, daß $n=\frac{1}{3}$ sey, so ist $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{-1}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{-1}}$; aber $\sqrt[3]{-1}=-1$ also $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{-1}$ und $(-1)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-\sqrt{-1}$, daher

$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}=+\sqrt[3]{(b-a\sqrt{-1})}.\sqrt{-1}\ \text{ und}$$
$$\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}=-\sqrt[3]{(b+a\sqrt{-1})}.\sqrt{-1};\ \text{ folglich}$$
$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}=[\sqrt[3]{(b-a\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(b+a\sqrt{-1})}]\sqrt{-1}\ \text{ und}.$$
$$\frac{\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}}{\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{(b-a\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(b+a\sqrt{-1})}\ \text{ oder}$$
$$[\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}]\sqrt{-1}=\sqrt[3]{(b+a\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(b-a\sqrt{-1})}.$$

Nun ist nach §. 45.

$$[\sqrt[3]{(b-a\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(b+a\sqrt{-1})}]\sqrt{-1}=2\sqrt[3]{b}\left[\frac{1}{3}\frac{a}{b}-\frac{5}{3^4}\frac{a^3}{b^3}+\ldots.\right]$$

und nach §. 44.

$$\sqrt[3]{(b+a\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(b-a\sqrt{-1})}=2\sqrt[3]{b}\left[1+\frac{1}{3^2}\frac{b^2}{a^2}-\ldots.\right],\ \text{folglich}$$

$$(I)\ \sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}=2\sqrt[3]{b}\left[\frac{1}{3}\frac{a}{b}-\frac{5}{3^4}\frac{a^3}{b^3}+\frac{5.8.11}{4.5.3^6}\frac{a^5}{b^5}-\frac{5.8.11.14.17}{4.5.6.7.3^8}\frac{a^7}{b^7}+\ldots\right]$$

$$(II)\ [\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}]\sqrt{-1}$$
$$=2\sqrt[3]{b}\left[1+\frac{1}{3^2}\frac{a^2}{b^2}-\frac{5.8}{4.3^5}\frac{a^4}{b^4}+\frac{5.8.11.14}{4.5.6.3^7}\frac{a^6}{b^6}-\frac{5.8.11.14.17.20}{4.5.6.7.8.3^9}\frac{a^8}{b^8}+\ldots\right]$$

§. 48.

Nach §. 45. ist, wenn $\frac{a}{2}$ statt a gesetzt wird

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^n-\left(\frac{a}{2}-x\right)^n}{2x}=n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}+n_3\left(\frac{a}{2}\right)^{n-3}x^2+n_5\left(\frac{a}{2}\right)^{n-5}x^4+\ldots$$

oder es wird, wenn man $x=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}$ setzt,

$$x^2=\frac{a^2}{2^2}+b$$
$$x^4=\frac{a^4}{2^4}+2\frac{a^2}{2^2}+b^2$$
$$x^6=\frac{a^6}{2^6}+3\frac{a^4}{2^4}b+3\frac{a^2}{2^2}b^2+b^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

diese Werthe statt x^2, x^4, x^6, ... in vorstehende Reihe gesetzt, und die zu gleichen Potenzen von b gehörigen Glieder unter einander geschrieben, giebt

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^n-\left(\frac{a}{2}-x\right)^n}{2x}=\begin{array}{r|r|r|r|l}
+n\ & \frac{a^{n-1}}{2^{n-1}}+\ n_3 & b\,\frac{a^{n-3}}{2^{n-3}}+\ \ n_5 & b^2\,\frac{a^{n-5}}{2^{n-5}}+\ \ n_7 & b^3\,\frac{a^{n-7}}{2^{n-7}}+\ldots \\
n_3 & 2n_5 & 3n_7 & 4n_9 & \\
n_5 & 3n_7 & 6n_9 & 10n_{11} & \\
n_7 & 4n_9 & 10n_{11} & 20n_{13} & \\
n_9 & 5n_{11} & 15n_{13} & 35n_{15} & \\
n_{11} & 6n_{13} & 21n_{15} & 56n_{17} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Anstatt der über einander stehenden Binomialkoeffizienten, nach §. 39. (*III*) und §. 40. (*XVI*) ihre Werthe gesetzt und abgekürzt, so ergiebt

$$(I)\ \frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^n-\left(\frac{a}{2}-x\right)^n}{2x}$$
$$=a^{n-1}+(n-2)a^{n-3}b+(n-3)_2a^{n-5}b^2+(n-4)_3a^{n-7}b^3+(n-5)_4a^{n-9}b^4+\ldots$$

wo $x=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}$ ist.

In diesen Ausdrücken werde $-b$ statt b gesetzt, so erhält man

$$(II)\ \frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^n-\left(\frac{a}{2}-x\right)^n}{2x}$$
$$=a^{n-1}-(n-2)a^{n-3}b+(n-3)_2a^{n-5}b^2-(n-4)_3a^{n-7}b^3+(n-5)_4a^{n-9}b^4-\ldots$$

wo $x=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b)}$ ist.

Hierin

Hierin werde $x = o$, also $\frac{1}{4}a^2 = b$ gesetzt, so entsteht der unbestimmte Ausdruck $\frac{o}{o}$. Die Bedeutung dieses Ausdrucks zu finden, setze man (§. 25.)

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n + n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}x + n_2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}x^2 + \dots \text{ und}$$

$$\left(\frac{a}{2}-x\right)^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n - n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}x + n_2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}x^2 - \dots$$

so wird

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^n - \left(\frac{a}{2}-x\right)^n = 2n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}x + 2n_3\left(\frac{a}{2}\right)^{n-3}x^3 + \dots \text{ also}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^n - \left(\frac{a}{2}-x\right)^n}{2x} = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + n_3\left(\frac{a}{2}\right)^{n-3}x^2 + n_5\left(\frac{a}{2}\right)^{n-5}x^4 + \dots$$

und hierin $x = o$ gesetzt, giebt $\frac{o}{o} = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$, oder, wenn in (II) $x = o$ und $\frac{1}{4}a^2$ statt b gesetzt wird,

$$n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} = a^{n-1} - (n-2)\frac{a^{n-1}}{2^2} + (n-3)_2\frac{a^{n-1}}{2^4} - \dots \text{ folglich}$$

$$(III)\quad n = 2^{n-1} - (n-2)2^{n-3} + (n-3)_2 2^{n-5} - (n-4)_3 2^{n-7} + \dots$$

oder, $n+1$ statt n gesetzt,

$$(IV)\quad n+1 = 2^n - (n-1)2^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4} - (n-3)_3 2^{n-6} + \dots$$

In (I) werde $a = 1$ und $b = 2$ gesetzt, so wird $x = \frac{3}{2}$ und man findet

$$(V)\quad \frac{2^n \mp 1}{3} = 1 + (n-2)2 + (n-3)_2 2^2 + (n-4)_3 2^3 + (n-5)_4 2^4 + \dots$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Diese Reihen müssen abbrechen, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

§. 49.

Es lassen sich auch noch hier die Bedingungen aufstellen, unter welchen Ausdrücke wie

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}$$

in zwei Theile $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ zerlegt werden können, wo x und y noch näher zu bestimmenden Werthe bedeuten.

Aus $\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ wird $a+\sqrt{b} = (x+y)+2\sqrt{xy}$, und weil sich nur die rationalen Theile mit rationalen, und die irrationalen mit irrationalen vergleichen lassen, so setze man $a = x+y$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$. Dies giebt $b = 4xy$. Aber $y = a-x$, daher $b = 4x(a-x)$, und hieraus $x^2 - ax + \frac{1}{4}b = o$. Aus dieser Gleichung vom zweiten Grade erhält man die beiden Wurzeln $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}$, daher, wegen $y = a-x$, $y = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}$. Hieraus folgt $\sqrt{x} = \pm\sqrt{[\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}]}$ und $\sqrt{y} = \pm\sqrt{[\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}]}$, daher

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}]} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}]}.$$

Nimmt man die obern oder die untern Zeichen vor $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}$ so erhält man in beiden Fällen

$$(I)\quad \sqrt{(a+\sqrt{b})} = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}]} \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}]}.$$

Hieraus folgt daß in allen den Fällen wo $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist, der gegebene Ausdruck $\sqrt{(a + \sqrt{b})}$ in zwei Theile mit einfachen Wurzelzeichen zerlegt werden kann.

Wäre $\sqrt{(a - \sqrt{b})}$ gegeben, so ist zu bemerken, daß dem vorhergehenden gemäß $\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$ war; dies giebt $-\sqrt{b} = -2\sqrt{xy}$ also $a - \sqrt{b} = x + y - 2\sqrt{xy}$, daher $\sqrt{(a - \sqrt{b})} = \sqrt{(x + y - 2\sqrt{xy})} = \pm\sqrt{x} \mp \sqrt{y}$, weil $x + y - 2\sqrt{xy} = (\pm\sqrt{x} \mp \sqrt{y})^2$ ist.

Hienach erhält man

$$(II)\ \sqrt{(a - \sqrt{b})} = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]} \mp \sqrt{[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]}.$$

Uebrigens können bei den vorstehenden Ausdrücken die Werthe a und b positiv oder negativ seyn, wenn nur $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist.

1. **Beispiel.** $\sqrt{(12 + 2\sqrt{35})}$ zu zerlegen wird $\sqrt{(12 + 2\sqrt{35})} = \sqrt{(12 + \sqrt{140})}$, also $a = 12$, $b = 140$, daher $a^2 - b = 4$, $\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1$, folglich nach (I) $\sqrt{(12 + 2\sqrt{35})} = \pm\sqrt{(6 + 1)} \pm \sqrt{(6 - 1)} = \pm\sqrt{7} \pm \sqrt{5}$.

2. **Beispiel.** $\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})}$ zu zerlegen, wird

$$a = 11;\ b = 72;\ a^2 - b = 49;\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)} = \tfrac{7}{2};$$

folglich nach (II)

$$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})} = \pm\sqrt{[\tfrac{11}{2} + \tfrac{7}{2}]} \mp \sqrt{[\tfrac{11}{2} - \tfrac{7}{2}]} = \pm 3 \mp \sqrt{2}.$$

3. **Beispiel.** $\sqrt{(16 + 30\sqrt{-1})}$ zu zerlegen, wird

$$\sqrt{(16 + 30\sqrt{-1})} = \sqrt{(16 + \sqrt{-900})} \text{ also } a = 16;\ b = -900;$$

$$a^2 - b = 1156 = 2^2 . 17^2;\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)} = \tfrac{1}{2} . 2 . 17 = 17 \text{ folglich nach } (I)$$

$$\sqrt{(16 + 30\sqrt{-1})} = \pm\sqrt{(8 + 17)} \pm \sqrt{(8 - 17)} = \pm 5 \pm \sqrt{-9} = \pm 5 \pm 3\sqrt{-1}.$$

§. 50.

Man kann eben so die Bedingungen suchen, unter welchen sich der Ausdruck

$$\sqrt[3]{[a + \sqrt{b}]}$$

in zwei Theile zerlegen läßt. Denn man setze $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = (x + \sqrt{y})\sqrt[3]{\alpha}$, wo x und y noch näher zu bestimmende Werthe sind, und α eine Größe bedeutet, welche den Umständen gemäß anzunehmen ist, so wird

$$a + \sqrt{b} = (x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y})\alpha.$$

Setzt man nun:

$$a = (x^3 + 3xy)\alpha \text{ und } \sqrt{b} = \alpha(3x^2 + y)\sqrt{y}$$

so findet man hieraus

$$a^2 = \alpha^2(x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2) \text{ und}$$

$$b = \alpha^2(9x^4y + 6x^2y^2 + y^3), \text{ daher}$$

$$\frac{a^2 - b}{\alpha^2} = x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = (x^2 - y)^3, \text{ also}$$

$$x^2 - y = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{[(a^2 - b)\alpha]}.$$

Man setze zur Abkürzung:

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{[(a^2 - b)\alpha]},$$

so muß β jedesmal rational seyn, wenn man α, wie es erlaubt ist, so annimmt, daß $(a^2 - b)\alpha$ ein Kubus wird, welches in jedem Falle angeht.

Hienach wird $x^2 - y = \beta$ oder $y = x^2 - \beta$. Diesen Werth in $a = (x^3 + 3xy)\alpha$ gesetzt, giebt folgende Bedingungsgleichung

$$4\alpha x^3 - 3\alpha\beta x = a.$$

Ist man nun im Stande für x einen Werth anzugeben welcher so beschaffen ist, daß die Glieder auf der linken Seite des Gleichheitszeichens $= a$ werden, so ist dadurch x bekannt, woraus man $y = x^2 - \beta$ also $\sqrt{y} = \sqrt{(x^2 - \beta)}$, und daraus $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{\alpha}$ findet.

Um daher den Ausdruck $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})}$ zu zerlegen, setze man

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{[(a^2 - b)\alpha]}$$

und gebe α einen solchen Werth, daß $(a^2 - b)\alpha$ ein Kubus wird.

Kann man alsdann in der Bedingungsgleichung $4\alpha x^3 - 3\alpha\beta x = a$ für x einen solchen Werth angeben, welcher dieser Gleichung genügt, so ist x bekannt und man findet

$$(I)\quad \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = [x + \sqrt{(x^2 - \beta)}]\sqrt[3]{\alpha}.$$

Wird das Zeichen vor $\sqrt{b}$ negativ, so erhält man

$$(II)\quad \sqrt[3]{(a - \sqrt{b})} = [x - \sqrt{(x^2 - \beta)}]\sqrt[3]{\alpha}.$$

1. **Beispiel.** $\sqrt[3]{[52 + 30\sqrt{3}]}$ zu zerlegen, bemerke man, daß $30\sqrt{3} = \sqrt{2700}$ ist, daher wird $a = 52$, $b = 2700$; $a^2 - b = 4$ und $\sqrt[3]{(a^2 - b)} = \sqrt[3]{4}$. Um eine Kubikzahl zu erhalten, setze man $\alpha = 2$, so wird

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{[(a^2 - b)\alpha]} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4.2} = 1,$$

also die Bedingungsgleichung $8x^3 - 6x = 52$. Hierin 2 statt x gesetzt, giebt $64 - 12 = 52$, daher ist $x = 2$ folglich nach (I)

$$\sqrt[3]{[52 + 30\sqrt{3}]} = [2 + \sqrt{(4 - 1)}]\sqrt[3]{2} = (2 + \sqrt{3})\sqrt[3]{2}.$$

2. **Beispiel.** $\sqrt[3]{[7 - 5\sqrt{2}]}$ zu zerlegen, wird hier $a = 7$; $b = 50$; $a^2 - b = -1$; $\sqrt[3]{(a^2 - b)} = \sqrt[3]{-1} = -1$, daher hier $\alpha = 1$, also $\beta = -1$. Dies giebt als Bedingungsgleichung $4x^3 + 3x = 7$, wo offenbar $x = 1$ ist, folglich wird nach (II)

$$\sqrt[3]{[7 - 5\sqrt{2}]} = 1 - \sqrt{(1 + 1)} = 1 - \sqrt{2}$$

3. **Beispiel.** $\sqrt[3]{[2 + 11\sqrt{-1}]}$ zu zerlegen, wird hier $a = 2$, $b = -121$, $a^2 - b = 125$; $\sqrt[3]{(a^2 - b)} = \sqrt[3]{125} = 5$, daher hier $\alpha = 1$ also $\beta = 5$. Dies giebt die Bedingungsgleichung $4x^3 - 15x = 2$. Hierin 2 statt x gesetzt, giebt $32 - 30 = 2$ also ist $x = 2$ folglich nach (I)

$$\sqrt[3]{[2 + 11\sqrt{-1}]} = 2 + \sqrt{(4 - 5)} = 2 + \sqrt{-1}.$$

Drittes Kapitel.

Von den unbestimmten Koeffizienten der Reihen.

§. 51.

Wenn mehrere auf einander folgende Größen nach irgend einem Gesetze fortschreiten, so bilden solche eine **Reihe** (*Series*), deren **Glieder** (*Termini serierum*) diese Größen sind. Besteht die Reihe aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern, so heißt sie **endlich** (*Series finita; Polynomium*); wenn aber die Glieder ohne Ende fortlaufen, so ist solche eine **unendliche** Reihe (*Series infinita; Infinitinomium*). Die allgemeinste Gestalt einer nach der veränderlichen Größe x **geordneten** Reihe ist:

$$o = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots.$$

wo p und q ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bedeuten, auch mehrere Glieder dieser Reihe fehlen können. Eine solche Reihe heißt eine **steigende** (*Series ascendens*), wenn die auf einander folgenden Exponenten der veränderlichen Größe x wachsen, oder q positiv ist; **fallend** (*Series descendens*), wenn diese Exponenten abnehmen oder q negativ wird. So ist

$$o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

eine steigende, und

$$o = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} + \ldots.$$

seine fallende Reihe.

Bedeutet n irgend eine ganze Zahl, so kann man die endlichen Reihen durch

$$Ax^p + A_1 x^{p+q} + A_2 x^{p+2q} + \ldots. + A_n x^{p+nq}.$$

und die unendlichen durch

$$Ax^p + A_1 x^{p+q} + A_2 x^{p+2q} + A_3 x^{p+3q} + \ldots.$$

oder auch durch

$$Ax^p + A_1 x^{p+q} + A_2 x^{p+2q} + \ldots + A_n x^{p+nq} + \ldots.$$

bezeichnen.

§. 52.

In einer jeden Reihe:

$$o = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots.$$

welche nach der veränderlichen Größe x geordnet ist, und wo p und q jede ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bezeichnen können, ist jeder Koeffizient für sich $= o$, also

$$A = o, \quad B = o, \quad C = o, \quad \text{u. s. w.}$$

Beweis. Man dividire die gegebene Reihe durch x^p so erhält man

$$o = A + Bx^q + Cx^{2q} + Dx^{3q} + Ex^{4q} + \ldots.$$

Ist nun die Reihe steigend, also q eine positive ganze oder gebrochene Zahl, so setze man, weil x eine veränderliche Größe ist, und die vorstehende Reihe für jeden Werth von x wahr seyn muß, $x = 0$, so wird $0 = A$ und daher

$$0 = Bx^q + Cx^{2q} + Dx^{3q} + \ldots.$$

Wird nun durch x^q dividirt, so erhält man, wenn alsdann $x = 0$ gesetzt wird, $0 = B$; eben so $0 = C$; u. s. w.

Wäre hingegen die Reihe fallend, also q negativ, so wird

$$0 = A + \frac{B}{x^q} + \frac{C}{x^{2q}} + \frac{D}{x^{3q}} + \ldots.$$

alsdann kann man, weil diese Gleichung für jeden Werth von x gelten muß, $x = \infty$ setzen, dies giebt (§. 10.) $0 = A$ und man findet auf eine ähnliche Weise wie vorhin,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

Dieser Satz ist von ausgebreitetem Nutzen in der ganzen Analysis, weil man durch ihn in den Stand gesetzt wird, die unbekannten Koeffizienten in den Reihen zu bestimmen, und dadurch die wichtigsten Entwickelungen der Funkzionen zu bewerkstelligen; daher auf denselben ein eigenes Verfahren, unter dem Namen der **Lehre von den unbestimmten Koeffizienten**, gegründet ist.

Der vorstehende Beweis setzt voraus, daß x eine veränderliche Größe sey, daß also x jeden möglichen Werth annehmen kann und für jeden derselben, der zweite Theil der Gleichung oder die Summe aller Glieder derselben $= 0$ werden muß.

§. 53.

Eine der wichtigsten Anwendungen von der Lehre der unbestimmten Koeffizienten, ist die Verwandelung der gebrochenen Funkzionen in Reihen. Wäre z. B. der Ausdruck $\frac{3+2x}{5+7x}$ in eine Reihe zu verwandeln, welche hier die **Entwickelungsreihe** heißt, so kann dies zwar mittelst der Division geschehen, und es würde alsdann der Quotient folgende Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

erhalten, wo $A, B, C, \ldots.$ noch näher zu bestimmende Koeffizienten bezeichnen; sollen hingegen die unbekannten Koeffizienten der Entwickelungsreihe mit Hülfe des Lehrsatzes §. 52. gefunden werden, so setze man:

$$\frac{3+2x}{5+7x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

und bringe diese Gleichung dadurch auf Null, daß solche durchgängig mit $5 + 7x$ multiplizirt und hiernächst auf beiden Seiten $3 + 2x$ abgezogen wird, so erhält man:

$$0 = \begin{array}{r|r|r|l} 5A & +5B & x + 5C & x^2 + 5D \\ -3 & +7A & +7B & +7C \\ & -2 & & \end{array}\; x^3 + \ldots.$$

daher nach §. 52.

$$5A - 3 = 0;\ 5B + 7A - 2 = 0;\ 5C + 7B = 0; \ldots.$$

also $A = \frac{3}{5};\; B = \frac{2-7A}{5};\; C = \frac{-7B}{5};\; D = \frac{-7C}{5};\; E = \frac{-7D}{5};\; \ldots$ folglich

$$A = \frac{3}{5};\; B = -\frac{11}{5^2};\; C = +\frac{7.11}{5^3};\; D = -\frac{7^2.11}{5^4};\; E = +\frac{7^3.11}{5^5};\; \text{u. s. w.}$$

daher erhält man:

$$\frac{3+2x}{5+7x} = \frac{3}{5} - \frac{11}{5^2}x + \frac{7.11}{5^3}x^2 - \frac{7^2.11}{5^4}x^3 + \frac{7^3.11}{5^5}x^4 - \ldots\ldots$$

Eben so verfährt man, wenn sich im Nenner der gebrochenen Funkzion eine unendliche Reihe befindet. Wäre z. B. die gebrochene Funkzion

$$\frac{1}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}$$

in eine Reihe zu verwandeln, wo zur Abkürzung der Faktorenfolgen die §. 6. gewählte Bezeichnung angenommen ist, so setze man die gesuchte Reihe $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$ so findet man, wenn der Nenner der gegebenen gebrochenen Funkzion mit dieser Reihe multiplizirt wird,

$$0 = \begin{array}{l|l|l|l|l} +A & +B & +C & +D & +E \\ -1 & +A & +B & +C & +D \\ & & +\frac{1}{2!}A & +\frac{1}{2!}B & +\frac{1}{2!}C \\ & & & +\frac{1}{3!}A & +\frac{1}{3!}B \\ & & & & +\frac{1}{4!}A \end{array} \!\!\begin{array}{l} \\ \end{array} \quad \text{(Koeffizienten von } x^0, x, x^2, x^3, x^4 \ldots)$$

Hieraus folgt:

$$A - 1 = 0$$
$$B + A = 0$$
$$C + B + \frac{1}{2!}A = 0$$
$$D + C + \frac{1}{2!}B + \frac{1}{3!}A = 0$$
$$E + D + \frac{1}{2!}C + \frac{1}{3!}B + \frac{1}{4!}A = 0$$

u. s. w.

Wird die Rechnung weit genug fortgesetzt, so erhält man:

$$A = 1;\; B = -1;\; C = \frac{1}{2!};\; D = \frac{-1}{3!};\; E = \frac{1}{4!};\; F = \frac{-1}{5!};\; G = \frac{1}{6!};\; H = \frac{-1}{7!}\;\text{u. s. w.}$$

daher ist

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

§. 54.

Aus den gegebenen Beispielen im vorigen §. übersieht man zureichend, wie dergleichen gebrochene Funkzionen in Reihen verwandelt werden können, und daß sich die Koeffizienten dieser Reihen leicht finden lassen, wenn nur das Gesetz bekannt ist, nach welchem die Exponenten der verän-

derlichen Größen in der Entwickelungs-Reihe fortschreiten. Dies näher für die vorkommenden Fälle auszumitteln, sey mit Annahme der Bezeichnung §. 7.

$$\frac{A + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \ldots}{B + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + \ldots}$$

irgend eine gebrochene Funkzion, deren Zähler und Nenner abbrechen oder ohne Ende fort laufen können, so folgt leicht, wenn mit dem Nenner in den Zähler dividirt wird, daß eine Reihe von der Form: $G + G_1 z + G_2 z^2 + G_3 z^3 + G_4 z^4 + \ldots\ldots$ heraus kommen muß, wenn G; G_1; G_2; ..... noch näher zu bestimmende Koeffizienten bezeichnen.

Hienach wird

$$\frac{A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots.}{B + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots.} = G + G_1 z + G_2 z^2 + G_3 z^3 + \ldots\ldots$$

Weil z jeden Werth erhalten kann, so setze man $z = x^h$; dies giebt

$$\frac{A + A_1 x^h + A_2 x^{2h} + \ldots}{B + B_1 x^h + B_2 x^{2h} + \ldots} = G + G_1 x^h + G_2 x^{2h} + G_3 x^{3h} + \ldots\ldots$$

Auf beiden Seiten mit x^r multiplizirt, und dann durch x^m dividirt, giebt:

$$\frac{Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + \ldots}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + B_3 x^{m+3h} + \ldots} = Gx^{r-m} + G_1 x^{r-m+h} + G_2 x^{r-m+2h} + G_3 x^{r-m+3h} + \ldots$$

Die vorstehende gebrochene Funkzion kann hienach in eine **steigende** Reihe (§. 51.) verwandelt werden.

Will man die Funkzion $\frac{A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p}{B + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_q z^q}$ in eine **fallende** Reihe verwandeln, so schreibe man die Glieder derselben in umgekehrter Ordnung

$$\frac{A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + \ldots + A_2 z^2 + A_1 z + A}{B_q z^q + B_{q-1} z^{q-1} + \ldots + B_2 z^2 + B_1 z + B},$$

alsdann erhält man, durch die Division des Nenners in den Zähler, folgende fallende Reihe

$$Hz^{p-q} + H_1 z^{p-q-1} + H_2 z^{p-q-2} + H_3 z^{p-q-3} + \ldots\ldots$$

wo die Koeffizienten H; H_1; H_2; ..... noch näher zu bestimmen sind. Es ist daher

$$\frac{A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + \ldots + A}{B_q z^q + B_{q-1} z^{q-1} + \ldots + B} = Hz^{p-q} + H_1 z^{p-q-1} + \ldots\ldots$$

Wird nun x^h mit z vertauscht, dann durchgängig mit x^r multiplizirt und durch x^m dividirt, so erhält man

$$\frac{A_p x^{r+ph} + A_{p-1} x^{r+ph-h} + \ldots + A_1 x^{r+h} + A x^r}{B_m x^{m+qh} + B_{q-1} x^{m+ph-h} + \ldots + B_1 x^{m+h} + Bx^m} = Hx^{r-m+(p-q)h} + H_1 x^{r-m+(p-q-1)h} + \ldots$$

oder auch

$$\frac{Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + \ldots + A_p x^{r+ph}}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + \ldots + B_q x^{m+qh}}$$

$$= Hx^{r-m+(p-q)h} + H_1 x^{r-m+(p-q-1)h} + H_2 x^{r-m+(p-q-2)h} + H_3 x^{m-r+(p-q-3)h} + \ldots.$$

Für $p = q$ wird $p - q = 0$, also

$$\frac{Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + \ldots + A_p x^{r+ph}}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + \ldots + B_p x^{m+ph}}$$
$$= Hx^{r-m} + H_1 x^{r-m-h} + H_2 x^{r-m-2h} + H_3 x^{r-m-3h} + \ldots\ldots$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, wenn die Zähler und Nenner der gegebenen gebrochenen Funkzionen endliche Reihen bilden, so können diese Funkzionen entweder in steigende oder fallende Reihen entwickelt werden; sind aber Zähler und Nenner aus unendlichen Reihen zusammengesetzt, so erhält man nur eine steigende Reihe.

Hienach wird,

(*I*) wenn Zähler und Nenner endliche Reihen bilden:

$$\frac{Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + \ldots + A_p x^{r+ph}}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + \ldots + B_q x^{m+qh}}$$
$$= Gx^{r-m} + G_1 x^{r-m+h} + G_2 x^{r-m+2h} + G_3 x^{r-m+3h} + \ldots\ldots$$
$$= Hx^{r-m+(p-q)h} + H_1 x^{r-m+(p-q-1)h} + H_2 x^{r-m+(p-q-2)h} + H_3 x^{r-m+(p-q-3)h} + \ldots$$

(*II*) wenn Zähler und Nenner unendliche Reihen bilden

$$\frac{Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + \ldots}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + B_3 x^{m+3h} + \ldots}$$
$$= Gx^{r-m} + G_1 x^{r-m+h} + G_2 x^{r-m+2h} + G_3 x^{r-m+3h} + \ldots\ldots$$

§. 55.

Zusatz. In (*I*) und (*II*) werde $r = p = 0$, $A = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$; ... gesetzt, so erhält man

(*I*) $$\frac{1}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + \ldots + B_q x^{m+qh}} = Gx^{-m} + G_1 x^{h-m} + G_2 x^{2h-m} + G_3 x^{3h-m} + \ldots$$
$$= Hx^{-m-qh} + H_1 x^{-mqh-h} + H_2 x^{-m-qh-2h} + H_3 x^{-m-qh-3h} + \ldots\ldots$$

(*II*) $$\frac{1}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + B_3 x^{m+3h} + \ldots} = Gx^{-m} + G_1 x^{h-m} + G_2 x^{2h-m} + G_5 x^{3h-m} + \ldots\ldots$$

§. 56.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion $\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}$ in eine steigende und fallende Reihe zu entwickeln.

Auflösung. Nach §. 54. (*I*) ist hier $r = 0$; $p = 1$; $h = 1$ und $m = 0$; $q = 2$, daher erhält man für die steigende Reihe

$$\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2} = G + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Diese Reihe mit dem Nenner der gebrochenen Funkzion multiplizirt und den Zähler davon abgezogen, giebt

$$0 = \begin{array}{r|r|r|r|l} aG + aG_1 & x + aG_2 & x^2 + aG_3 & x^3 + aG_4 & x^4 + \ldots \\ -a' + bG & + bG_1 & + bG_2 & + bG_3 & \\ -\ b' & + cG & + cG_1 & + cG_2 & \end{array}$$

also

also nach §. 52.

$aG - a' = 0;\ aG_1 + bG - b' = 0;\ aG_2 + bG_1 + cG = 0;\ aG_3 + bG_2 + cG_1 = 0;\ \ldots$

daher

$$G = \frac{a'}{a},$$

$$G_1 = \frac{b'}{a} - \frac{a'b}{a^2},$$

$$G_2 = -\frac{a'c + bb'}{a^2} + \frac{a'b^2}{a^3},$$

$$G_3 = -\frac{b'c}{a^2} + \frac{2a'bc + b'b^2}{a^3} - \frac{a'b^3}{a^4};$$ u. s. w. folglich

$$\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2} = \frac{a'}{a} + \frac{ab' - a'b}{a^2}x - \frac{a'ac + abb' - a'b^2}{a^3}x^2 + \ldots\ldots$$

Für die fallende Reihe erhält man nach §. 54. (I)

$$\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2} = Hx^{-1} + H_1x^{-2} + H_2x^{-3} + H_3x^{-4} + \ldots$$

Mit dem Nenner multiplizirt, und den Zähler abgezogen, giebt:

$$0 = \begin{array}{r|r|r|r|l} cH & x + cH_1 + cH_2 & x^{-1} + cH_3 & x^{-2} + cH_4 & x^{-3} + \ldots \\ -b' & +bH + bH_1 & +bH_2 & +bH_3 & \\ & -a' + aH & +aH_1 & +aH_2 & \end{array}$$

also nach §. 52.

$cH - b' = 0;\ cH_1 + bH - a' = 0;\ cH_2 + bH_1 + aH = 0;\ cH_3 + bH_2 + aH_1 = 0;\ \ldots$

daher

$$H = \frac{b'}{c},$$

$$H_1 = \frac{a'}{c} - \frac{bb'}{c^2},$$

$$H_2 = -\frac{ab' + a'b}{c^2} + \frac{b'b^2}{c^3},$$

$$H_2 = -\frac{aa'}{c^2} + \frac{2abb' + a'b^2}{c^3} - \frac{b'b^3}{c^4},$$ u. s. w. folglich

$$\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2} = \frac{b'}{cx} + \frac{a'c - bb'}{c^2x^2} - \frac{ab'c + a'bc - b'b^2}{c^3x^3} + \ldots\ldots$$

Die steigenden Reihen sind in denjenigen Fällen mit Nutzen anzuwenden, wenn $x < 1$ wird, weil alsdann abnehmende Werthe für die höhern Potenzen von x entstehen. Wenn dagegen $x > 1$ wird, so erhalten die fallenden Reihen aus gleichen Gründen den Vorzug.

§. 57.

1. **Zusatz.** In den gefundenen beiden Reihen des vorigen §. werde $a' = 1$ und $b' = 0$ gesetzt, so erhält man für die steigende Reihe:

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}x-\frac{ac-b^2}{a^3}x^2+\frac{2abc-b^3}{a^4}x^3+\frac{a^2c^2-3ab^2c+b^4}{a^5}x^4-\frac{3a^2bc^2-4ab^3c+b^5}{a^6}x^5+\frac{a^3c^3-6a^2b^2c^2+5ab^4c-b^6}{a^7}x^6+\ldots$$

und für die fallende Reihe:

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

$$=\frac{1}{cx^2}-\frac{b}{c^2x^3}-\frac{ac-b^2}{c^3x^4}+\frac{2abc-b^3}{c^4x^5}+\frac{a^2c^2-3ab^2c+b^4}{c^5x^6}-\frac{3a^2bc^2-4ab^3c+b^5}{c^6x^7}-\frac{a^3c^3-6a^2b^2c^2+5ab^4c-b^6}{c^7x^8}+\ldots\ldots$$

Setzt man ferner $a = b = c = 1$, so wird

$$\frac{1}{1+x+x^2}=1-x+0+x^3-x^4+0+x^6-x^7+0+x^9-\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+\ldots\ldots \text{ und}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^9}+\ldots\ldots$$

Für $x = 2$ erhält man:

$$\frac{1}{7}=1-2+8-16+64-128+512-1024+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{256}-\frac{1}{512}+\frac{1}{2048}-\ldots$$

wo nur die letzte Reihe den Werth $\frac{1}{7}$ desto genauer giebt, je weiter man die Rechnung fortsetzt, welches bei der ersten nicht der Fall ist.

Für $x = \frac{1}{3}$ findet man

$$\frac{9}{13}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2187}+\frac{1}{19683}-\ldots$$

$$\frac{9}{13}=9-27+243-729+6561-19683+\ldots\ldots$$

wo nur die erste Reihe brauchbar ist. Wegen dieser und ähnlicher Reihen s. m. §. 355. und 356.

§. 58.

2. Zusatz. In der steigenden Reihe §. 56. werden $c = 0$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{a'+b'x}{a+bx}=\frac{a'}{a}+\frac{ab'-a'b}{a^2}x-\frac{ab'-a'b}{a^3}bx^2+\frac{ab'-a'b}{a^4}b^2x^3-\ldots\ldots\ldots$$

Wollte man die fallende Reihe auf gleiche Weise behandeln, so entsteht kein brauchbares Resultat, daher die vorstehende gebrochene Funkzion nach §. 54. (I) entwickelt werden muß. Hienach wird

$$\frac{a'+b'x}{a+bx}=H+H_1x^{-1}+H_2x^{-2}+H_3x^{-3}+H_4x^{-4}+\ldots\ldots$$

und daraus:

$$0=\left.\begin{array}{l}bH\\-b'\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}bH_1\\+aH\\-a'\end{array}\right|+\left.\begin{array}{l}bH_2\\+aH_1\end{array}\right|x^{-1}+\left.\begin{array}{l}bH_3\\+aH_2\end{array}\right|x^{-2}+\left.\begin{array}{l}bH_4\\+aH_3\end{array}\right|x^{-3}+\ldots$$

daher $bH - b' = 0$; $bH_1 + aH - a' = 0$; $bH_2 + aH_1 = 0$; $bH_3 + aH_2 = 0$; $bH_4 + aH_3 = 0$; .... also $H = \frac{b'}{b}$; $H_1 = \frac{a'b - ab'}{b^2}$; $H_2 = -\frac{(a'b - ab')a}{b^3}$; $H_3 = +\frac{(a'b - ab')a^2}{b^4}$; $H_4 = -\frac{(a'b - ab')a^3}{b^5}$; ...... folglich

$$\frac{a' + b'x}{a + bx} = \frac{b'}{b} + \frac{a'b - ab'}{b^2 x} - \frac{a'b - ab'}{b^3 x^2} a + \frac{a'b - ab'}{b^4 x^3} a^2 - \ldots\ldots$$

§. 59.

3. **Zusatz.** Aus den zuletzt gefundenen beiden Reihen erhält man für $a' = a = 1$

$$\frac{1 + b'x}{1 + bx} = 1 + (b' - b)x - (b' - b)bx^2 + (b' - b)b_2 x^3 - \ldots.$$

oder $$= \frac{b'}{b} + \frac{b - b'}{b^2 x} - \frac{b - b'}{b^3 x^2} + \frac{b - b'}{b^4 x^3} - \frac{b - b'}{b^5 x^4} + \ldots.$$

Für $b' = b = 1$

$$\frac{a' + x}{a + x} = \frac{a'}{a} + \frac{a - a'}{a^2} x - \frac{a - a}{a^3} x^2 + \frac{a - a'}{a^4} x^3 - \ldots$$

oder $$= 1 + \frac{a' - a}{x} - \frac{a' - a}{x^2} a + \frac{a' - a}{x^3} a^2 - \frac{a' - a}{x^4} a^3 + \ldots.$$

Für $a' = a = b = 1$ und $b' = -1$

$$\frac{1 - x}{1 + x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + \ldots.$$

oder $$= -1 \; \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^5} - \ldots.$$

Für $a' = 1$ und $b' = 0$

$$\frac{1}{a + bx} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} x + \frac{b^2}{a^3} x^2 - \frac{b^3}{a^4} x^3 + \frac{b^4}{a^5} x^4 - \ldots.$$

oder $$= \frac{1}{bx} - \frac{a}{b^2 x^2} + \frac{a^2}{b^3 x^3} - \frac{a^3}{b^4 x^4} + \ldots.$$

und hieraus ferner

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots.$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \ldots.$$

$$\frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \ldots\ldots$$

$$= -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots.$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} - \ldots.$$

Hierin $x = 1$ gesetzt, giebt

$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$ und

$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots..$

Man setze $a' = \alpha$; $b' = -(\alpha - \beta)$ und $b = -(a - b)$, so wird

$$\frac{a-(\alpha-\beta)x}{a-(a-b)x} = \frac{\alpha}{a} + \frac{a\beta - \alpha b}{a^2}x + \frac{a\beta - \alpha b}{a^3}(a-b)x^2 + \frac{a\beta - \alpha b}{a^4}(a-b)^2 x^3 + \ldots.$$

Durch unmittelbare Division hätte man die vorstehenden Ausdrücke auch erhalten können, wodurch zugleich, wenn die Reihe bei irgend einem Gliede, etwa dem $n$ten abbricht, auch noch der Ueberrest oder die Ergänzung der Reihe angegeben werden kann.

Dividirt man z. B. mit $a + bx$ in 1, und setzt die Division bis zum $n$ten Gliede fort, so findet man

$$\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} - \frac{b^3x^3}{a^4} + \frac{b^4x^4}{a^5} - \ldots \mp \frac{b^{n-1}x^{n-1}}{a^n} \pm \frac{b^n x^n}{a^n(a+bx)}$$

wo $\frac{b^n x^n}{a^n(a+bx)}$ der Rest oder die Ergänzung ist.

§. 60.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ in eine Reihe zu verwandeln, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

Auflösung. Man setze

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = G + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \ldots + G_n x^n + \ldots.$$

so wird

$$0 = \begin{array}{r|l|l|l|l|l} -aG & -aG_1 \;\; x & -aG_2 \;\; x^2 - \ldots & -aG_{n-1} \;\; x^{n-2} & -aG_n \;\; x^{n-1} & -aG_{n+1} \;\; x^n \\ +a^n & +G & +G_1 & +G_{n-2} & +G_{n-1} & +G_n \\ & & & & -1 & \end{array} \; x^{n+1} + \ldots$$

also nach §. 52. $aG = a^n$; $aG_2 = G_1$; $aG_3 = G_2$; ......
$aG_{n-2} = G_{n-3}$; $aG_{n-1} = G_{n-2}$; $aG_n = G_{n-1} - 1$; $aG_{n+1} = G_n$; .....

Hieraus findet man:

$$G = a^{n-1}$$

$$G_1 = \frac{G_2}{a} = a^{n-2}$$

$$G_2 = \frac{G_1}{a} = a^{n-3}$$

....

$$G_{n-2} = \frac{G_{n-3}}{a} = a$$

$$G_{n-1} = \frac{G_{n-2}}{a} = 1$$

$G_n = \frac{G_{n-1} - 1}{a} = 0$, also auch $G_{n+1} = 0$; $G_{n+2} = 0$ u. s. w. Es ist daher

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \ldots + a^2 x^{n-3} + a x^{n-2} + x^{n-1},$$

wie man sich auch leicht überzeugen kann, wenn die gefundene Reihe mit $x - a$ multiplizirt wird.

§. 61.

Zusatz. Schreibt man die gefundene Reihe in umgekehrter Ordnung, so erhält man auch:

$$(I)\quad \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots + a^{n-3} x^2 + a^{n-2} x + a^{n-1}.$$

Hierin $-a$ statt a gesetzt, giebt

$$\frac{x^n - (-a)^n}{x + a} = x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} - \dots \pm a^{n-2} x \mp a^{n-1}.$$

Hierin zuerst $n = 2r$, dann $n = 2r + 1$ gesetzt, giebt

$$(II)\quad \frac{x^{2r} - a^{2r}}{x + a} = x^{2r-1} - a x^{2r-2} + a^2 x^{2r-3} - a^3 x^{2r-4} + \dots + a^{2r-2} x - a^{2r-1}$$

$$(III)\quad \frac{x^{2r+1} + a^{2r+1}}{x + a} = x^{2r} - a x^{2r-1} + a^2 x^{2r-2} - a^3 x^{2r-3} + \dots - a^{2r-1} x + a^{2r}.$$

Nach (I) erhält man auch, wenn a, x mit b, y vertauscht wird

$$\frac{y - b}{y^n - b^n} = \frac{1}{y^{n-1} + b y^{n-2} + \dots + b^{n-2} y + b^{n-1}}.$$

Nun setze man $b = a^{\frac{1}{n}}$ und $y = x^{\frac{1}{n}}$, so wird

$$b^n = a;\quad y^n = x;\quad b^{n-1} = a^{1-\frac{1}{n}};\quad y^{n-2} = x^{1-\frac{2}{n}};\quad b^{n-2} = a^{1-\frac{2}{n}};$$

u. s. w. Daher erhält man

$$(IV)\quad \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}} x^{1-\frac{2}{n}} + a^{\frac{2}{n}} x^{1-\frac{3}{n}} + \dots + a^{1-\frac{2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + a^{1-\frac{1}{n}}}$$

Hienach wird:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}};$$

$$\frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{a}\sqrt{x} + \sqrt{a}\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a^3}};\ \text{u. s. w.}$$

§. 62.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$\frac{a' x^r + b' x^{r+h} + c' x^{r+2h} + d' x^{r+3h} + \dots}{a x^m + b x^{m+h} + c x^{m+2h} + d x^{m+3h} + \dots}$$ in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 54. (II) ist die entsprechende Reihe

$$G x^{r-m} + G_1 x^{r-m+h} + G_2 x^{r-m+2h} + G_3 x^{r-m+3h} + \dots$$

daher erhält man §. 53.

$$0 = \begin{array}{r|r|r|r|l} aG & + aG_1 & + aG_2 & + aG_3 & \\ -a' & + bG & + bG_1 & + bG_2 & \\ & -b' & + cG & + cG_1 & \\ & & -c' & + dG & \\ & & & -d' & \end{array}$$

mit den Faktoren x^r, x^{r+h}, x^{r+2h}, x^{r+3h}, $+ \dots$ hinter den einzelnen Spalten.

und hieraus §. 52.

$$G = \frac{a'}{a};$$
$$G_1 = \frac{b' - bG}{a};$$
$$G_2 = \frac{c' - cG - bG_1}{a};$$
$$G_3 = \frac{d' - dG - cG_1 - bG_2}{a};$$
$$G_4 = \frac{e' - eG - dG_1 - cG_2 - bG_3}{a};$$

u. s. w. wo das Gesetz zur Bestimmung der Koeffizienten einleuchtet.

§. 63.

1. Zusatz. Für $r = 0$ und $m = 0$ erhält man:

$$(I)\ \frac{a' + b'x^h + c'x^{2h} + d'x^{3h} + \ldots}{a + bx^h + cx^{2h} + dx^{3h} + \ldots} = G + G_1 x^h + G_2 x^{2h} + G_3 x^{3h} + G_4 x^{4h} + \ldots$$

wo die Koeffizienten G; G_1; G_2; ..... mit den im vorigen §. gefundenen übereinstimmen.

Setzt man $\frac{1}{m}$ statt h, so wird

$$(II)\ \frac{a' + b'x^{\frac{1}{m}} + c'x^{\frac{2}{m}} + d'x^{\frac{3}{m}} + \ldots}{a + bx^{\frac{1}{m}} + cx^{\frac{2}{m}} + dx^{\frac{3}{m}} + \ldots} = G + G_1 x^{\frac{1}{m}} + G_2 x^{\frac{2}{m}} + G_3 x^{\frac{3}{m}} + G_4 x^{\frac{4}{m}} + \ldots,$$

wo die Koeffizienten G; G_1; G_2; ...... den obigen gleich sind.

Den ersten Koeffizienten G der Entwickelungs-Reihe kann man kurz dadurch finden, daß in der gebrochenen Funkzion $x = 0$ gesetzt wird, alsdann wird $G = \frac{a'}{a}$ wie erforderlich ist.

Setzt man §. 62. $r = 0$; $a' = 1$; $b' = 0$; $c' = 0$; $d' = 0$; .... so wird

$$(III)\ \frac{1}{ax^m + bx^{m+h} + cx^{m+2h} + dx^{m+3h} + \ldots} = Gx^{-m} + G_1 x^{h-m} + G_2 x^{2h-m} + G_3 x^{3h-m} + \ldots$$

und

$$G = \frac{1}{a};$$
$$G_1 = -\frac{bG}{a} = -\frac{b}{a^2};$$
$$G_2 = -\frac{cG + bG_1}{a} = -\frac{ac - b^2}{a^3};$$
$$G_3 = -\frac{dG + cG_1 + bG_2}{a} = -\frac{a^2 d - 2abc + b^3}{a^4};$$
$$G_4 = -\frac{a^3 e - 2a^2 bd - a^2 c + 3ab^2 c - b^4}{a^5};$$

u. s. w.

§. 64.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion $\frac{1 - x^2}{1 + x^2 - 2x^4 + x^6}$ in eine steigende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 62. ist hier

$r = m = o;\ h = 2;\ a' = 1;\ b' = -1;\ c' = d' = \ldots\ldots = o;$

$a = 1;\ b = 1;\ c = -2;\ d = o;\ e = 1;\ f = g = \ldots\ldots = o;$

daher erhält man

$$G = 1;$$
$$G_1 = -1 - G = -2;$$
$$G_2 = 2G - G_1 = +4;$$
$$G_3 = 2G_1 - G_2 = -8;$$
$$G_4 = -G + 2G_2 - G_3 = +15;$$
$$G_5 = -G_1 + 2G_3 - G_4 = -29;$$
$$G_6 = -G_2 + 2G_4 - G_5 = +55;$$
$$G_7 = -G_3 + 2G_5 - G_6 = -105;$$ u. s. w. folglich

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2 - 2x^4 + x^8} = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + 15x^8 - 29x^{10} + 55x^{12} - \ldots\ldots$$

§. 65.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots}$$

in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 55. (*II*) ist hier $m = o;\ h = 1$ und

$a = 1;\ b = \frac{1}{2};\ c = \frac{1}{3};\ d = \frac{1}{4};\ \ldots\ldots$ also

$y = G + G_1x + G_2x^2 + G_3x^3 + G_4x^4 + G_5x^5 + \ldots\ldots$, und

$$G = 1$$
$$G_1 = -\tfrac{1}{2}G$$
$$G_2 = -\tfrac{1}{3}G - \tfrac{1}{2}G_1$$
$$G_3 = -\tfrac{1}{4}G - \tfrac{1}{3}G_1 - \tfrac{1}{2}G_2$$
$$G_4 = -\tfrac{1}{5}G - \tfrac{1}{4}G_1 - \tfrac{1}{3}G_2 - \tfrac{1}{2}G_3\ .$$

u. s. w. Es wird daher, wenn man sich der §. 6. angeführten Bezeichnung bedient

$$G = 1;$$
$$G_1 = -\frac{1}{2};$$
$$G_2 = -\frac{1}{2[3]!};$$
$$G_3 = -\frac{1}{[4]!};$$
$$G_4 = -\frac{19}{[6]!};$$
$$G_5 = -\frac{27}{2[6]!};$$
$$G_6 = -\frac{863}{3.4[7]!};$$
$$G_7 = -\frac{1375}{3[8]!};$$
$$G_8 = -\frac{33953}{[10]!};$$
$$G_9 = -\frac{57281}{2[10]!};$$
$$G_{10} = -\frac{3250433}{[12]!};$$
$$G_{11} = -\frac{1891755}{8[11]!};$$
$$G_{12} = -\frac{13\,695\,779\,093}{2[15]!};$$
$$G_{13} = -\frac{24\,466\,579\,093}{4[15]!};$$
$$G_{14} = -\frac{2248\,808\,282\,159}{[18]!};$$

u. s. w.

Daher ist die gesuchte Reihe, oder

$$y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{19}{720}x^4 - \frac{3}{160}x^5 - \ldots\ldots$$

Wird in der gegebenen gebrochenen Funkzion, und in der daraus abgeleiteten Reihe, $-x$ statt x gesetzt, so erhält man

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \ldots} = G - G_1 x + G_2 x^2 - G_3 x^3 + \ldots\ldots$$

oder, auf beiden Seiten durch x dividirt,

$$\frac{1}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots} = \frac{G}{x} - G_1 + G_2 x - G_3 x^2 + G_4 x^3 - G_5 x^4 + \ldots$$

Wegen des vielfältigen Gebrauchs der vorstehenden Koeffizienten, sind hier noch die Werthe derselben in Decimalbrüchen angegeben.

G	$= +1$		G_{11}	$= -0,00592$	40564
G_1	$= -0,5$		G_{12}	$= -0,00523$	68753
G_2	$= -0,08333$	33333	G_{13}	$= -0,00467$	74074
G_3	$= -0,04166$	66667	G_{14}	$= -0,00421$	49371
G_4	$= -0,02638$	88889	G_{15}	$= -0,00382$	68920
G_5	$= -0,01875$	00000	G_{16}	$= -0,00349$	73450
G_6	$= -0,01426$	91799	G_{17}	$= -0,00321$	44930
G_7	$= -0,01136$	73942	G_{18}	$= -0,00296$	94551
G_8	$= -0,00935$	65366	G_{19}	$= -0,00275$	53832
G_9	$= -0,00789$	25540	G_{20}	$= -0,00256$	74201
G_{10}	$= -0,00678$	58500	u. s. w.		

§. 66.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$y = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \ldots}$$

in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 63 ist hier $m = 0$, $h = 2$ und wenn man

$$2.3.4 = [4]!;\ 2.3.4.5.6 = [6]!;\ 2.3.4.5.6.7.8 = [8]!;\ \ldots\ldots$$

setzt (§. 6.), so wird:

$$a = 1;\ b = -\frac{1}{2};\ c = +\frac{1}{[4]!};\ d = -\frac{1}{[6]!};\ e = +\frac{1}{[8]!};\ \ldots\ldots \text{ also}$$

$$G = +1;$$

$$G_1 = +\frac{1}{[2]!};$$

$$G_2 = -\frac{1}{[4]!} + \frac{G_1}{2};$$

$$G_3 = +\frac{1}{[6]!} - \frac{G_1}{[4]!} + \frac{G_2}{2};$$

$$G_4 = -\frac{1}{[8]!} + \frac{G_1}{[6]!} - \frac{G_2}{[4]!} + \frac{G_3}{2};$$

$$G_5 = +\frac{1}{[10]!} - \frac{G_1}{[8]!} + \frac{G_2}{[6]!} - \frac{G_3}{[4]!} + \frac{G_4}{2}; \text{ u. s. w.}$$

Man

Man erhält daher

$$G = 1; \qquad G_5 = \frac{50521}{[10]!};$$
$$G_1 = \frac{1}{2}; \qquad G_6 = \frac{2702765}{[12]!};$$
$$G_2 = \frac{5}{[4]!}; \qquad G_7 = \frac{199360981}{[14]!};$$
$$G_3 = \frac{61}{[6]!}; \qquad G_8 = \frac{19391512145}{[16]!};$$
$$G_4 = \frac{1385}{[8]!}; \qquad \text{u. s. w.}$$

Hienach ist die gesuchte Reihe:

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{[4]!}x^4 + \frac{61}{[6]!}x^6 + \frac{1385}{[8]!}x^8 + \frac{50521}{[10]!}x^{10} + \ldots\ldots$$

§. 67.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$y = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \ldots\ldots}{x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \ldots\ldots}$$

in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Hier ist nach §. 62. $r = 0$, $m = 1$, $h = 2$; ferner wenn man $2.3 = [3]!$; $2.3.4 = [4]!$; $2.3.4.5 = [5]!$; .... setzt, $a' = 1$; $b' = -\frac{1}{2}$; $c' = \frac{1}{[4]!}$; $d' = -\frac{1}{[6]!}$ ...... und $a = 1$; $b = -\frac{1}{[3]!}$; $c = \frac{1}{[5]!}$; $d = -\frac{1}{[7]!}$; ..... daher weil $b' - b = \frac{-1}{2} + \frac{1}{[3]!} = -\frac{2}{[3]!}$; $c' - c = \frac{1}{[4]!} - \frac{1}{[5]!} = \frac{4}{[5]!}$; ...... so wird:

$$G = 1;$$
$$G_1 = -\frac{2}{[3]!};$$
$$G_2 = +\frac{4}{[5]!} + \frac{G_1}{[3]!};$$
$$G_3 = -\frac{6}{[7]!} - \frac{G_1}{[5]!} + \frac{G_2}{[3]!};$$
$$G_4 = +\frac{8}{[9]!} + \frac{G_1}{[7]!} - \frac{G_2}{[5]!} + \frac{G_3}{[3]!};$$

u. s. w., wo die Koeffizienten nach einem leicht zu übersehenden Gesetze bestimmt werden. Hieraus erhält man:

$$G = 1; \qquad G_4 = -\frac{1}{30}\,\frac{2^8}{[8]!};$$
$$G_1 = -\frac{1}{6}\,\frac{2^2}{[2]!}; \qquad G_5 = -\frac{5}{66}\,\frac{2^{10}}{[10]!};$$
$$G_2 = -\frac{1}{30}\,\frac{2^4}{[4]!}; \qquad G_6 = -\frac{691}{2730}\,\frac{2^{12}}{[12]!};$$
$$G_3 = -\frac{1}{42}\,\frac{2^6}{[6]!}; \qquad G_7 = -\frac{7}{6}\,\frac{2^{14}}{[14]!}; \text{ u. s. w.}$$

Es ist daher die gesuchte Reihe, oder

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\,\frac{2^2}{[2]!}\,x - \frac{1}{30}\,\frac{2^4}{[4]!}\,x^3 - \frac{1}{42}\,\frac{2^6}{[6]!}\,x^5 - \ldots \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{2x}{[3]!} - \frac{2^3x^3}{3[5]!} - \frac{2^6x^6}{3[7]!} - \frac{3.2^7x^7}{5[9]!} - \frac{5.2^9x^9}{3[11]!} - \ldots\ldots$$

§. 68.

Enthalten die einzelnen Glieder der gebrochenen Funkzion Wurzeln oder gebrochene Exponenten von x, so bringe man sämmtliche ganze und gebrochene Exponenten von x auf einen gemeinschaftlichen Nenner, welcher $= m$ seyn mag, und lasse die anzunehmende Reihe nach den Exponenten $\frac{1}{m}$; $\frac{2}{m}$; $\frac{3}{m}$; $\frac{4}{m}$; .... fortschreiten (§. 63. *II.*):

Wäre z. B. $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}+2x}{1-3\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ gegeben, so erhält man statt dieses Ausdrucks

$$\frac{1+x^{\frac{1}{3}}+2x}{1-3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}} \text{ oder, } \frac{1+x^{\frac{2}{6}}+2x^{\frac{6}{6}}}{1-3x^{\frac{2}{6}}+5x^{\frac{3}{6}}-x^{\frac{9}{6}}} = A+Bx^{\frac{1}{6}}+Cx^{\frac{2}{6}}+Dx^{\frac{3}{6}}+Ex^{\frac{4}{6}}+Fx^{\frac{5}{6}}+Gx^{\frac{6}{6}}+Hx^{\frac{7}{6}}+\ldots$$

daher

$$o = \left.\begin{array}{ccc|c|c|c|c}
A + Bx^{\frac{1}{6}} + & & C & x^{\frac{2}{6}} + \quad D & x^{\frac{3}{6}} + \quad E & x^{\frac{4}{6}} + \quad F & x^{\frac{5}{6}} + \ldots \\
-1 & & -3A & -3B & -3C & -3D & - \ldots \\
 & & & +5A & +5B & +5C & + \ldots \\
 & & & -1 & & & - \ldots
\end{array}\right\}$$

Hieraus findet man

$A = 1$ | $H = 3F - 5E$
$B = o$ | $I = 3G - 5F$
$C = 3A$ | $K = 3H - 5G + A$
$D = 3B - 5A + 1$ | $L = 3I - 5H + B$
$E = 3C - 5B$ | $M = 3K - 5I + C$
$F = 3D - 5C$ | $N = 3L - 5K + D$
$G = 3E - 5D + 2$ | u. s. w. folglich

$$\frac{1+\sqrt{x}+2x}{1-3\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}-x\sqrt{x}} = 1 + 3x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{2}{3}} - 27x^{\frac{5}{6}} + 49x - \ldots\ldots$$

Diese Entwickelung der Koeffizienten hätte man auch nach der allgemeinen Formel §. 62. bewerkstelligen können; allein in den Fällen, wo die Exponenten von x nicht regelmäßig auf einander folgen, wird dadurch wenig Erleichterung der Rechnung bewirkt.

§. 69.

Wäre der zweitheilige Zähler oder Nenner einer Funkzion auf irgend eine Potenz erhoben, so läßt sich die Entwickelung einer solchen Funkzion in eine Reihe, mittelst des binomischen Lehrsatzes, leicht bewerkstelligen, wenn man dabei die Lehre von den unbestimmten Koeffizienten anwendet.

1. **Beispiel.** Die Funkzion $\frac{\sqrt[3]{(1-3x)}}{1+2x+x^2}$ in eine Reihe zu verwandeln, setze man

$$\frac{\sqrt[3]{(1-3x)}}{1+2x+x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$$

so wird

$$\sqrt[3]{(1-3x)} = \left.\begin{array}{l} A + \end{array}\begin{array}{r|} B \\ +2A \\ \end{array}\; x + \begin{array}{r|} C \\ +2B \\ +A \end{array}\; x^2 + \begin{array}{r|} D \\ +2C \\ +B \end{array}\; x^3 + \begin{array}{r|} E \\ +2D \\ +C \end{array}\; x^4 \begin{array}{l} +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Es ist aber §. 31.

$$\sqrt[3]{(1-3x)} = 1 - \frac{1}{3}.3x - \frac{1.2}{3.6}.9x^2 - \frac{1.2.5}{3.6.9}.27x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}.81x^4 - \ldots\ldots$$

daher erhält man

$$\left.\begin{array}{r} o = A + \\ -1 + \\ \\ \end{array}\begin{array}{r|} B \\ 2A \\ +1 \\ \end{array}\; x + \begin{array}{r|} C \\ +2B \\ +A \\ +1 \end{array}\; x^2 + \begin{array}{r|} D \\ +2C \\ +B \\ +\frac{5}{3} \end{array}\; x^3 + \begin{array}{r|} E \\ +2D \\ +C \\ +\frac{10}{3} \end{array}\; x^4 + \begin{array}{r|} F \\ +2E \\ +D \\ +\frac{22}{3} \end{array}\; x^5 \begin{array}{l} +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2A - 1 = -3 \\ C &= -2B - A - 1 = +4 \\ D &= -2C - B - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{20}{3} \\ E &= -2D - C - \tfrac{10}{3} = +6 \\ F &= -2E - D - \tfrac{22}{3} = -\tfrac{38}{3} \end{aligned}$$

u. s. w. folglich

$$\frac{\sqrt[3]{(1-3x)}}{1+2x+x^2} = 1 - 3x + 4x^2 - \frac{20}{3}x^3 + 6x^4 - \frac{38}{3}x^5 + \ldots\ldots$$

2. **Beispiel.** Die Funkzion $\frac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ in eine Reihe zu verwandeln, setze man

$$\frac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{1-x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist §. 31.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + 5x^8 - 6x^{10} + \ldots\ldots$$ daher

$$(1-x)(1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + 5x^8 - \ldots\ldots)$$ oder

$$\frac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 - x - 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 - 3x^5 - 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 - 5x^9 - 6x^{10} + \ldots$$

3. **Beispiel.** Die Funkzion $\frac{(b+cx)^m}{(1+ax)^r}$ in eine Reihe zu verwandeln, setze man

$$\frac{(b+cx)^m}{(1+ax)^r} = G + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \ldots + G_n x^n + \ldots\ldots [I]$$

Nun ist §. 25.

$$(b+cx)^m = b^m + m b^{m-1} x + m_2 b^{m-2} x^2 + \ldots + m_n b^{m-n} c^n x^n + \ldots$$

$$\frac{1}{(1+ax)^r} = 1 - rax + (r+1)_2 a^2 x^2 - \ldots \pm (r+n-1)_n a^n x^n \mp \ldots$$

Beide Reihen mit einander multiplizirt, geben

$$\frac{(b+cx)^m}{(1+ax)^r} = b^m + \left.\begin{array}{l} m b^{m-1} c \\ -rab^m \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{l} m_2 b^{m-2} c^2 \\ -rmab^{m-1} c \\ +(r+1)_2 a^2 b^m \end{array}\right| x^2 + \ldots + \left.\begin{array}{l} m_n b^{m-n} c^n \\ -rm_{n-1} ab^{m-n+1} c^{n-1} \\ +(r+1)_2 m_{n-2} a^2 b^{m-n+2} c^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm (r+n-1)_n a^n b^m \end{array}\right| x^n + \ldots$$

Diesen Ausdruck mit [I] verglichen, so erhält man

$$G_n = m_n b^{m-n} c^n - rm_{n-1} ab^{m-n+1} c^{n-1} + (r+1)_2 m_{n-2} a^2 b^{m-n+2} c^{n-2} - \ldots \pm (r+n-1)_n a^n b^m,$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, und das untere für ein ungerades n gilt.

Hierin nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt n gesetzt, giebt

$$G = b^m$$
$$G_1 = m\, b^{m-1} c - rab^m$$
$$G_2 = m_2 b^{m-2} c^2 - rm_1 ab^{m-1} c + (r+1)_2 a^2 b^m$$
$$G_3 = m_3 b^{m-3} c^3 - rm_2 ab^{m-2} c^2 + (r+1)_2 a^2 b^{m-1} c - (r+2)_3 a^3 b^m$$

u. s. w.

§. 70.

Eben so verfährt man, wenn der Zähler oder Nenner der gegebenen Funkzion eine drei oder mehrtheilige Größe ist und auf irgend eine Potenz erhoben werden soll. Denn man kann, mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes, jedes Polynom auf irgend eine Potenz erheben. Setzt man $bx + cx^2$ statt x §. 25., so erhält man das Trinom $a + bx + cx^2$, und es ist für jede Zahl n

$$(a+bx+cx^2)^n = a^n + n_1 a^{n-1} (bx + cx^2) + n_2 a^{n-2} (bx + cx^2)^2 + \ldots$$
$$= a^n + n_1 a^{n-1} bx + \left.\begin{array}{l} n_1 ac \\ + n_2 b^2 \end{array}\right| a^{n-2} x^2 + \left.\begin{array}{l} n_2 2abc \\ + n_3 b^3 \end{array}\right| a^{n-3} x^3 + \left.\begin{array}{l} n_2 a^2 c^2 \\ + n_3 3ab^2 c \\ + n_4 b^4 \end{array}\right| a^{n-4} x^4 + \ldots$$

Setzt man ferner $c + dx$ statt c, so erhält man $(a + bx + cx^2 + dx^3)^n$, und wenn $d + ex$ statt d gesetzt wird, $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)^n$ u. s. w. Dieses Verfahren ist aber sehr langweilig, weshalb dasselbe hier nicht weiter ausgeführt und auf das achtzehnte Kapitel verwiesen wird. Dagegen überzeugt man sich leicht, daß sich jedes Polynom in eine nach den Potenzen von x geordneten Reihe auflösen läßt, oder daß ist allgemein:

$$(a + bx + cx^2 + \ldots)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

wo n jede mögliche Zahl seyn kann. Es läßt sich daher auch jede algebraische Funkzion von x in eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe auflösen, oder es ist

$$fx = A + Bx^\alpha + Cx^\beta + Dx^\gamma + Ex^\delta + \ldots$$

§. 71.

Es sey $S = \mathfrak{A}x^{2r} + \mathfrak{A}_1 x^{2r+1} + \mathfrak{A}_2 x^{2r+2} + \mathfrak{A}_3 x^{2r+3} + \ldots$ und es sey ferner bekannt, daß

$$S = Bx^r + B_1 x^{r+1} + B_2 x^{r+2} + B_3 x^{r+3} + \ldots + B_{r-1} x^{2r-1} + B_r x^{2r} + B_{r+1} x^{2r+1} + B_{r+2} x^{2r+2} + \ldots$$

ist, so folgt hieraus

$$B = 0;\; B_1 = 0;\; B_2 = 0;\; \ldots\; B_{r-1} = 0, \text{ und}$$
$$B_r = \mathfrak{A};\; B_{r+1} = \mathfrak{A}_1;\; B_{r+2} = \mathfrak{A}_2;\; \ldots$$

Denn man setze beide Reihen einander gleich, so wird

$$0 = Bx^r + B_1 x^{r+1} + \ldots + \left.\begin{matrix} B_r \\ + \mathfrak{A} \end{matrix}\right| x^{2r} + \left.\begin{matrix} B_{r+1} \\ + \mathfrak{A}_1 \end{matrix}\right| x^{2r+1} + \ldots$$

woraus nach §. 52. die obige Vergleichung folgt.

Wäre hienach

$$S = \mathfrak{A}x^r + \mathfrak{A}_1 x^{r+1} + \mathfrak{A}_2 x^{r+2} + \mathfrak{A}_3 x^{r+3} + \mathfrak{A}_4 x^{r+4} + \ldots \text{ und}$$
$$S = Bx^r + B_1 x^{r+1} + B_2 x^{r+2} + B_3 x^{r+3} + B_4 x^{r+4} + \ldots$$

so folgt hieraus

$$\mathfrak{A} = B;\; \mathfrak{A}_1 = B_1;\; \mathfrak{A}_2 = B_2;\; \mathfrak{A}_3 = B_3;\; \text{u. s. w.}$$

§. 72.

Noch ist eine merkwürdige Eigenschaft der Potenzen der Reihen hier anzuführen.

Es sey

$$(I)\;\; (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^m = \mathfrak{A} + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

gegeben, so ist auch, weil x jeden Werth erhalten kann, wenn man x^h statt x setzt

$$(a + bx^h + cx^{2h} + dx^{3h} + \ldots)^m = \mathfrak{A} + Bx^h + Cx^{2h} + Dx^{3h} + \ldots$$

und wenn man beide Seiten der Gleichung mit x^{rm} multiplizirt

$$(II)\;\; (ax^r + bx^{r+h} + cx^{r+2h} + dx^{r+3h} + \ldots)^m = \mathfrak{A}x^{rm} + Bx^{rm+h} + Cx^{rm+2h} + Dx^{rm+3h} + \ldots$$

Wenn daher die Reihe (I) gegeben ist, so kann man daraus die Reihe (II) ohne Veränderung der gegebenen Koeffizienten ableiten.

Setzt man

$$y = ax^r + bx^{r+h} + cx^{r+2h} + dx^{r+3h} + \ldots$$

so wird hienach

$$y^m = \mathfrak{A}x^{rm} + Bx^{rm+h} + Cx^{rm+2h} + Dx^{rm+3h} + \ldots$$

§. 73.

Wäre die Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+h} + cx^{m+2h} + dx^{m+3h} + \ldots \;[I]$$

gegeben, und man soll daraus den Werth von x, durch eine nach den Potenzen von y fortschreitende Reihe finden, so setze man

$$x = \mathfrak{A}y^\alpha + By^{\alpha+\beta} + Cy^{\alpha+2\beta} + Dy^{\alpha+3\beta} + \ldots \;[II]$$

wo $\mathfrak{A}, B, C, \ldots$ unbestimmte Koeffizienten, und α, β noch näher zu bestimmende Werthe für die unbekannten Exponenten bezeichnen. Aus der Reihe $[I]$ wird nach §. 72., wenn $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 \ldots B_1\, B_2 \ldots$ u. s. w. unbestimmte Koeffizienten sind,

$$y^{\alpha} = A_1 x^{\alpha m} + A_2 x^{\alpha m+h} + A_3 x^{\alpha m+2h} + \ldots.$$
$$y^{\alpha+\beta} = B_1 x^{\alpha m+\beta m} + B_2 x^{\alpha m+\beta m+h} + B_3 x^{\alpha m+\beta m+2h} + \ldots.$$
$$y^{\alpha+2\beta} = C_1 x^{\alpha m+2\beta m} + C_2 x^{\alpha m+2\beta m+h} + C_3 x^{\alpha m+2\beta m+2h} + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Werthe in [*II*] gesetzt, giebt

$$\begin{aligned} x = AA_1 x^{\alpha m} &+ AA_2 x^{\alpha m+h} + AA_3 x^{\alpha m+2h} + \ldots. \\ &+ BB_1 x^{\alpha m+\beta m} + BB_2 x^{\alpha m+\beta m+h} + \ldots. \\ &+ CC_1 x^{\alpha m+2\beta m} + \ldots. \\ &+ \ldots. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 = AA_1 x^{\alpha m} &+ AA_2 x^{\alpha m+h} + AA_3 x^{\alpha m+2h} + AA_4 x^{\alpha m+3h} + \ldots. \\ - x &+ BB_1 x^{\alpha m+\beta m} + BB_2 x^{\alpha m+\beta m+h} + BB_3 x^{\alpha m+\beta m+2h} + \ldots. \\ &+ CC_1 x^{\alpha m+2\beta m} + CC_2 x^{\alpha m+2\beta m+h} + \ldots. \\ &+ DD_1 x^{\alpha m+3\beta m} + \ldots. \\ &+ \ldots. \end{aligned}$$

Weil α, β noch näher zu bestimmende Größen sind, so setze man die über einander stehenden Koeffizienten einander gleich, so wird $\alpha m = 1$ und $\beta m = h$ oder $\alpha = \frac{1}{m}$ und $\beta = \frac{h}{m}$.

Diese Werthe in die Gleichung [*II*] gesetzt, giebt

$$x = Ay^{\frac{1}{m}} + By^{\frac{1+h}{m}} + Cy^{\frac{1+2h}{m}} + Dy^{\frac{1+3h}{m}} + \ldots.;$$

oder wenn die Reihe

$$(I)\quad y = x^m (a + bx^h + cx^{2h} + dx^{3h} + ex^{4h} + \ldots.)$$

gegeben ist, so erhält man daraus

$$(II)\quad x = y^{\frac{1}{m}} (A + By^{\frac{h}{m}} + Cy^{\frac{2h}{m}} + Dy^{\frac{3h}{m}} + Ey^{\frac{4h}{m}} + \ldots.)$$

und hieraus nach §. 72

$$(III)\quad x^t = y^{\frac{t}{m}} (A' + B'y^{\frac{h}{m}} + C'y^{\frac{2h}{m}} + D'y^{\frac{3h}{m}} + E'y^{\frac{4h}{m}} + \ldots.)$$

wo A; B; C; .... A'; B'; C'; .... noch näher zu bestimmende Koeffizienten bezeichnen.

Will man mittelst der gegebenen Koeffizienten a, b, c, d ... die Koeffizienten A, B, C ... der Reihe (*II*) bestimmen, so kann dies entweder dadurch geschehen, daß man aus der Reihe (*I*) die Werthe $y^{\frac{1}{m}}$; $y^{\frac{1+h}{m}}$; .... bestimmt, diese in (*II*) setzt, die alsdann entstehende Gleichung, welche nur die eine Veränderliche x enthält, auf 0 bringt, und nach §. 52. die Koeffizienten A, B, C... bestimmt, oder man kann auch mit Hülfe der Reihe (*II*) die Werthe x^m; x^{m+h}; ... suchen, und solche in (*I*) setzen, so wird die entstehende Gleichung nur die Veränderliche y enthalten, aus welcher sich dann die unbekannten Koeffizienten bestimmen lassen.

Wegen der Bestimmung dieser Koeffizienten s. m. §. 849. u. f.

Das Verfahren aus der Reihe (*I*) eine beliebige Potenz von x zu entwickeln, nennt man die **Umkehrung der Reihen**, (*serierum Reversio*; *Retours des suites*).

§. 74.

Zusatz. Durchgängig y^t statt y gesetzt, so erhält man aus

$$(I)\quad y^a = x^m\,(a + bx^h + cx^{2h} + dx^{3h} + ex^{4h} + \ldots)$$

$$(II)\quad x = y^{\frac{a}{m}}\,(A + By^{\frac{ah}{m}} + Cy^{\frac{2ah}{m}} + Dy^{\frac{3ah}{m}} + Ey^{\frac{4ah}{m}} + \ldots\ldots)$$

$$(III)\quad x^t = y^{\frac{at}{m}}\,(A' + B'y^{\frac{ah}{m}} + C'y^{\frac{2ah}{m}} + D'y^{\frac{3ah}{m}} + E'y^{\frac{4ah}{m}} + \ldots\ldots)$$

§. 75.

Die Lehre von den unbestimmten Koeffizienten läßt sich auch auf die Entwickelung einiger wichtigen Eigenschaften der Binomialkoeffizienten anwenden.

Nach §. 25. ist

$$(1 + x)^a = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_r x^r \ldots\ldots + a_{2r} x^{2r} + \ldots$$

$$(1 - x)^a = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots \pm a_r x^r \ldots + a_{2r} x^r - \ldots$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades r gelten. Beide Reihen mit einander multiplizirt giebt

$$\begin{array}{l|l|l|l|ll|ll|l}
1 + a_1 & x + 1\,.\,a_2 & x^2 + 1\,.\,a_3 & x^3 + 1\,.\,a_4 & x^4 \ldots + 1\,. & a_{2r} & x^{2r} + 1\,. & a_{2r+1} & x^{2r+1} + \ldots \\
 - a_1 & - a_1 a_1 & - a_1 a_2 & - a_1 a_3 & - a_1 & a_{2r-1} & \phantom{x^{2r}} - a_1 & a_{2r} & \\
 & + a_2 1 & + a_2 a_1 & + a_2 a_2 & + a_2 & a_{2r-2} & \phantom{x^{2r}} + a_2 & a_{2r-1} & \\
 & & - a^3 1 & - a_3 a_1 & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \\
 & & & + a_4 1 & \mp a_{r-1} & a_{r+1} & \phantom{x^{2r}} \mp a_{r-1} & a_{r+2} & \\
 & & & & \pm a_r & a_r & \phantom{x^{2r}} \pm a_r & a_{r+1} & \\
 & & & & \mp a_{r+1} & a_{r-1} & \phantom{x^{2r}} \mp a_{r+1} & a_r & \\
 & & & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \\
 & & & & - a_{2r-1} & a_1 & \phantom{x^{2r}} + a_{2r} & a_1 & \\
 & & & & + a_{2r} & 1 & \phantom{x^{2r}} - a_{2r+1} & 1 &
\end{array}$$

Ferner ist:

$$(1 - x^2)^a = 1 - a_1 x^2 + a_2 x^4 - \ldots \pm a_r x^{2r} \mp \ldots$$

Aber $(1 + x)^a\,(1 - x)^a = (1 - x^2)^a$. Vergleicht man daher die zusammengehörigen Glieder dieser Ausdrücke nach §. 52., so wird

$$(I)\quad \pm a_r = 1.a_{2r} - a_1 a_{2r-1} + a_2 a_{2r-2} - a_3 a_{2r-3} + \ldots \mp a_{r-1} a_{r+1} \pm a_r a_r \mp a_{r+1} a_{r-1} \ldots - a_{2r-1} a_1 + a_{2r} 1.$$

$$(II)\quad 0 = 1.a_{2r+1} - a_1 a_{2r} + a_2 a_{2r-1} - a_3 a_{2r-2} + \ldots \pm a_r a_{r+1} \mp a_{r+1} a_r \ldots\ldots + a_{2r} a_1 - a_{2r+1} 1.$$

In (I) werde $2r$ statt a und in (II) $2r + 1$ statt a gesetzt, so erhält man wegen $m_{m-t} = m_t$ (§. 38. *LVII.*) und wegen (*LV.*)

$$(III)\quad \pm (2r)_r$$
$$= 1.1 - (2r)_1(2r)_1 + (2r)_2(2r)_2 - (2r)_3(2r)_3 + \ldots \mp (2r)_{r-1}(2r)_{r-1} \pm (2r)_r(2r)_r \mp (2r)_{r-1}(2r)_{r-1} \ldots - (2r)_1(2r)_1 + 1.1.$$

$$(IV)\quad 0$$
$$= 1.1 - (2r+1)_1(2r+1)_1 + (2r+1)_2(2r+1)_2 - \ldots \pm (2r+1)_r(2r+1)_r \mp (2r+1)_r(2r+1)_r \ldots + (2r+1)_1(2r+1)_1 - 1.1.$$

Weil nun $2r$ jede gerade und $2r + 1$ jede ungerade Zahl bezeichnen kann, so folgt hieraus, daß die Summe von den Quadraten der Binomialkoeffizienten mit abwechselnden Zeichen, für einen ungeraden Exponenten $= 0$ ist.

Auch erhält man §. 41. (*III*)

$$(2r)_r = 1 + r_1 r_1 + r_2 r_2 + r_3 r_3 + \ldots + r_1 r_1 + 1 = 1 - (2r)_1 (2r)_1 + (2r)_2 (2r)_2 - \ldots - (2r)_1 (2r)_1 + 1.$$

wenn r eine gerade ganze Zahl ist.

Vereinigt man in (*I*) die gleichen Glieder, so wird

$$\pm a_r = 2 . a_{2r} - 2 a_1 a_{2r-1} + 2 a_2 a_{2r-2} \ldots \mp 2 a_{r-1} a_{r+1} \pm a_r a_r$$

oder $\pm a_r a_r$ auf beiden Seiten addirt und durch 2 dividirt, giebt

$$(V) \pm \frac{a_r + a_r a_r}{2} = 1 . a_{2r} - a_1 a_{2r-1} + a_2 a_{2r-2} - a_3 a_{2r-3} + \ldots \mp a_{r-1} a_{r+1} \pm a_r a_r.$$

Durchgängig mit a_{2r} dividirt, giebt wegen $\frac{a_{2r-t}}{a_{2r}} = \frac{(2r)_t}{(a-2r+t)_t}$ (§. 38. *IX.*)

$$(VI) \pm \frac{a_r + a_r a_r}{2 a_{2r}} = 1 - \frac{(2r)_1 a_1}{(a-2r+1)_1} + \frac{(2r)_2 a_2}{(a-2r+2)_2} - \ldots \mp \frac{(2r)_{r-1} a_{r-1}}{(a-r-1)_{r-1}} \pm \frac{(2r)_r a_r}{(a-r)_r}.$$

und für $a = 2r$ wird

$$(VII) \pm \frac{(2r)_r + (2r)_r (2r)_r}{2} = 1 - (2r)_1 (2r)_1 + (2r)_2 (2r)_2 - (2r)_3 (2r)_3 \ldots \mp (2r)_{r-1} (2r)_{r-1} \pm (2r)_r (2r)_r.$$

Viertes Kapitel.

Von den höhern Gleichungen.

---

§. 76.

Bedeutet hier n jede positive ganze Zahl und F das Funkzionenzeichen, so heißt eine algebraische ganze Funkzion

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q \quad [I]$$

eine **geordnete** Gleichung, wenn in derselben die Potenzen der unbekannten Größe x, wie hier, vom höchsten bis zum niedrigsten Exponenten auf einander folgen.

Die höchste Potenz von x bestimmt den **Grad** der Gleichung. So ist die vorstehende, eine Gleichung vom $n$ten Grade. Eine solche Gleichung ist **vollständig**, wenn sie außer der höchsten, auch alle niedrigere Potenzen von x enthält.

Gleichungen welche den zweiten Grad übersteigen, heißen **höhere** Gleichungen, und wenn solche nur die erste Potenz von x enthalten, einfache Gleichungen. Die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades, wird als bekannt vorausgesetzt.

Ein

Ein solcher Werth von x, für welchen die algebraische Summe aller Glieder einer Gleichung $= o$, also

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = o$ oder $Fx = o$ wird, heißt eine **Wurzel** der Gleichung.

Wäre a eine Wurzel dieser Gleichung, also $x = a$, so ist

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Pa + Q = o \text{ oder } Fa = o$$

und $x - a = o$ heißt eine **Wurzelgleichung** von [I].

So wird z. B. in der Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 - 2x^2 - 13x + 30 = o,$$

wenn man $x = 3$ setzt

$$27 - 18 - 39 + 30 = o,$$

daher ist 3 eine Wurzel dieser Gleichung, und $x - 3 = o$ die Wurzelgleichung.

In der Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = o$$

erhält man für $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$

$x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$; $x^3 = 1$ und $x^4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, daher findet man statt der vorstehenden Gleichung

$$(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + 2 + (-2-2\sqrt{-3}) + (-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{-3}) + 2 = o$$

folglich ist $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ eine Wurzel, und $x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = o$ die Wurzelgleichung.

Setzt man in der Gleichung [I] irgend einen beliebigen Werth a statt x, für welchen man $Fa = R$ findet, und es wird R nicht $= o$, so ist auch a keine Wurzel der Gleichung $Fx = o$. Die Größe R, welche positiv oder negativ seyn kann, heißt der Rest oder **der Werth der Gleichung** $Fx = o$ für $x = a$.

Sind die Wurzeln der Gleichungen ganze, gebrochene oder irrationale, positive oder negative Größen, so heißen sie **reelle Wurzeln**, sonst **imaginäre**, wenn solche unmögliche Größen enthalten. Auch werden die reellen Wurzeln noch in comensurabele und incomensurabele, oder rationale und irrationale eingetheilt.

§. 77.

Von der Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = o$$

sey a eine Wurzel, so muß diese Gleichung durch $x - a$ ohne Rest theilbar seyn.

Denn weil a eine Wurzel ist, so erhält man

$$Fa = a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Pa + Q = o.$$

Diese Gleichung von der vorstehenden abgezogen, giebt

$$Fx - Fa = (x^n - a^n) + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + (x - a)P = o.$$

Nach §. 61. ist aber

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-1}$$
$$\frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x - a} = x^{n-2} + ax^{n-3} + a^2x^{n-4} + \ldots + a^{n-2}$$
$$\frac{x^{n-2} - a^{n-2}}{x - a} = x^{n-3} + ax^{n-4} + \ldots + a^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Wird daher der oben stehende Ausdruck durch $x - a$ dividirt, setzt man die hier gefundenen Werthe in denselben, und ordnet die Glieder nach den Potenzen von x, so wird

$$\frac{Fx - Fa}{x - a} = x^{n-1} + \left.\begin{matrix} a \\ +A \end{matrix}\right| x^{n-2} + \left.\begin{matrix} a^2 \\ +aA \\ +B \end{matrix}\right| x^{n-3} + \left.\begin{matrix} a^3 \\ +a^2A \\ +aB \\ +C \end{matrix}\right| x^{n-4} + \ldots + \begin{matrix} a^{n-1} \\ +a^{n-2}A \\ +a^{n-3}B \\ +a^{n-4}C \\ \ldots\ldots \\ +P \end{matrix}$$

oder wenn man die auf einander folgenden Koeffizienten durch $A'\ B'\ C' \ldots P'$ bezeichnet und den vorstehenden Bedingungen gemäß $Fa = 0$ setzt, so erhält man auch

$$\frac{Fx}{x - a} = x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + C'x^{n-4} + \ldots + P',$$

und es ist alsdann

$$A' = a + A$$
$$B' = a^2 + aA + B$$
$$C' = a^3 + a^2A + aB + C$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P' = a^{n-1} + a^{n-2}A + a^{n-3}B + a^{n-4}C + \ldots + P.$$

Hieraus folgt, daß, wenn a eine Wurzel von Fx ist, so muß Fx durch $x - a$ ohne Rest theilbar seyn, und man kann hienach die Koeffizienten $A'\ B'\ C' \ldots$ des Quotienten bestimmen.

Umgekehrt wenn sich die Gleichung $Fx = 0$ durch $x - a$ ohne Rest theilen läßt, so ist $x = a$ eine Wurzel dieser Gleichung. Denn es sey

$$\frac{Fx}{x - a} = x^{n-1} + A'x^{n-2} + \ldots + P', \text{ so wird}$$
$$Fx = (x - a)(x^{n-1} + A'x^{n-2} + \ldots + P').$$

Für $x = a$ wird $x - a = 0$, also $Fx = 0$, wie erfordert wird (§. 76.) wenn a eine Wurzel der Gleichung $Fx = 0$ ist.

§. 78.

Zusatz. Dem Vorhergehenden gemäß ist Fx oder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = (x - a)(x^{n-1} + A'x^{n-2} + \ldots + P').$$

Wäre nun ferner b eine Wurzel der Gleichung

$$x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + \ldots + P' = 0,$$

so findet man eben so

$$x^{n-1} + A x^{n-2} + \ldots + P' = (x - b)(x^{n-2} + A' x^{n-3} + \ldots + O'').$$

Wäre ferner c eine Wurzel der Gleichung

$$x^{n-2} + A' x^{n-3} + B' x^{n-4} + \ldots + O'' = o,$$

so findet man auf gleiche Weise

$$x^{n-2} + A'' x^{n-3} + \ldots + O'' = (x - c)(x^{n-3} + A''' x^{n-4} + \ldots + N''')$$

oder wegen der vorstehenden Werthe

$$x^n + A x^{n-1} + \ldots + Q = (x - a)(x - b)(x - c)(x^{n-3} + A''' x^{n-4} + \ldots + N''').$$

Verfährt man eben so mit der Gleichung

$$x^{n-3} + A''' x^{n-4} + \ldots + N''' = o$$

und geht auf diese Art weiter, so wird jede folgende Gleichung um einen Grad niedriger als die vorhergehende, bis man zuletzt zu einem Ausdruck vom zweiten Grade kommt. Sind die Wurzeln desselben p und q, so erhält man

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + \ldots + Q = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots (x-p)(x-q) = o,$$

und es sind alsdann die n Werthe $a, b, c, d, \ldots p, q$ Wurzeln der vorstehenden Gleichung, weil für jeden dieser Werthe die Gleichung $= o$ wird. Hienach ist $Fa = o$; $Fb = o$; $Fc = o$; u. s. w. Kann man daher von Fx und von den Gleichungen die nach und nach aus Fx entstanden sind, die Wurzeln angeben, so folgt hieraus, daß eine Gleichung vom $n$ten Grade n Wurzeln haben muß. Ob eine solche Gleichung noch mehrere von den vorhergehenden verschiedene Wurzeln haben kann, wird im folgenden §. untersucht werden.

Ferner folgt aus dem Vorhergehenden, daß, wenn man im Stande ist eine Gleichung in zwei oder mehrere Faktoren zu zerlegen und die Wurzeln dieser Faktoren anzugeben, indem man jeden derselben $= o$ setzt, alsdann die Wurzeln dieser Faktoren, zugleich Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

§. 79.

Eine Gleichung $Fx = o$ vom $n$ten Grade kann nicht mehr als n Wurzeln haben.

Denn man bezeichne die n Wurzeln dieser Gleichung durch $a, b, c \ldots p, q$, so ist §. 78.

$$Fx = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - p)(x - q).$$

Bezeichnet nun r eine von $a, b, c \ldots p, q$ verschiedene Größe, welche ebenfalls Wurzel von Fx seyn soll, so muß nach §. 77. $x - r$ in Fx ohne Rest aufgehen. Hiezu wird erfordert, daß $x - r$ in einen der Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... ohne Rest aufgehe; welches nur dann möglich ist, wenn $r = a$ oder $r = b$ u. s. w. wird. Hieraus folgt daß r keinen von den n Wurzeln verschiedenen Werth erhalten kann, daß also eine Gleichung vom $n$ten Grade nicht mehr als n Wurzeln enthält.

§. 80.

Jede Gleichung läßt sich in eine andere verwandeln, deren Wurzeln das Vielfache, oder ein bestimmter Theil von den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Soll die Gleichung

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \ldots + Q = o$$

in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln $y = kx$ sind, so wird $x = \frac{y}{k}$ also

$$\frac{y^n}{k^n} + A\frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} + B\frac{y^{n-2}}{k^{n-2}} + \ldots + Q = 0, \text{ oder}$$

$$(I)\; y^n + Aky^{n-1} + Bk^2y^{n-2} + Ck^3y^{n-3} + \ldots + Qk^n = 0.$$

Wird $\frac{1}{k}$ statt k, also $y = \frac{x}{k}$, daher $x = ky$ gesetzt, so findet man auch

$$(II)\; y^n + \frac{A}{k}y^{n-1} + \frac{B}{k^2}y^{n-2} + \frac{C}{k^3}y^{n-3} + \ldots + \frac{Q}{k^n} = 0.$$

Hiedurch erhält man zugleich ein Mittel die Koeffizienten einer gegebenen Gleichung zu verkleinern, wenn sich dieselben durch die auf einander folgenden Potenzen einer Zahl dividiren lassen.

Beispiel. Die Koeffizienten der gegebenen Gleichung

$$x^4 - 15x^3 + 36x^2 + 108x + 567 = 0$$

lassen sich durch die auf einander folgenden Potenzen der Zahl 3 dividiren, daher erhält man auch

$$y^4 - \tfrac{15}{3}y^3 + \tfrac{36}{9}y^2 + \tfrac{108}{27}y + \tfrac{567}{81} = 0 \text{ oder}$$

$$y^4 - 5y^3 + 4y^2 + 4y + 7 = 0$$

wo $y = \frac{1}{3}x$ ist.

§. 81.

1. **Zusatz.** Sind alle Koeffizienten ganze Zahlen, und der Koeffizient des ersten Gliedes größer als 1, so kann man die gegebene Gleichung

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \ldots + Q = 0$$

in eine andere

$$y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + C'y^{n-3} + \ldots + Q' = 0$$

verwandeln, deren Koeffizienten ebenfalls ganze Zahlen sind.

Denn man verwandle die gegebene Gleichung in

$$x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} + \frac{D}{A}x^{n-3} + \ldots + \frac{Q}{A} = 0,$$

setze $y = Ax$, also $x = \frac{y}{A}$, so wird

$$\frac{y^n}{A^n} + \frac{B}{A^n}y^{n-1} + \frac{C}{A^{n-1}}y^{n-2} + \frac{D}{A^{n-2}}y^{n-3} + \ldots + \frac{Q}{A} = 0,$$

oder mit A^n multiplizirt, giebt

$$y^n + By^{n-1} + ACy^{n-2} + A^2Dy^{n-3} + A^3Ey^{n-4} + \ldots + A^{n-1}Q = 0.$$

Beispiel. Die gegebene Gleichung

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0,$$

in eine andere zu verwandeln, deren erster Koeffizient $= 1$ ist, wird

$$y^3 - 3y^2 - 8y + 20 = 0$$

wo $y = 2x$ ist.

§. 82.

2. **Zusatz.** Bestehen die Koeffizienten einer Gleichung aus gebrochenen Zahlen, und man will diese Gleichung in eine andere verwandeln, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, so darf man nur eine Zahl k suchen in deren auf einander folgenden Potenzen, die auf einander folgenden

Nenner der gegebenen Gleichung aufgehen, so erhält man nach §. 80. (*I*) die gesuchte Gleichung ohne gebrochene Koeffizienten.

Wäre z. B. die Gleichung

$$x^4 + \frac{A}{\alpha} x^3 + \frac{B}{\beta} x^2 + \frac{C}{\gamma} x + \frac{D}{\delta} = 0$$

gegeben, und es ist k eine solche Zahl, für welche

$\frac{Ak}{\alpha}$; $\frac{Bk^2}{\beta}$; $\frac{Ck^3}{\gamma}$; $\frac{Dk^4}{\delta}$ ganze Zahlen werden, so setze man $x = \frac{y}{k}$, alsdann wird §. 80. (*I*)

$$y^4 + \frac{Ak}{\alpha} y^3 + \frac{Bk^2}{\beta} y^2 + \frac{Ck^3}{\gamma} y + \frac{Dk^4}{\delta} = 0.$$

Beispiel. Die Brüche der Gleichung

$$x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{5}{6}x^2 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{7}{2} = 0$$

wegzuschaffen, bemerkt man leicht, daß die Nenner 3, 6, 4, 2 in die Potenzen 6, 6^2, 6^3, 6^4 aufgehen, daher erhält man für $x = \frac{y}{6}$

$$y^4 - \frac{2.6}{3} y^3 + \frac{5.36}{6} y^2 - \frac{3.216}{4} y - \frac{7.1296}{2} = 0 \text{ oder}$$

$$y^4 - 4y^3 + 30y^2 - 162y - 4536 = 0.$$

2. **Beispiel.** Die Brüche der Gleichung

$$x^4 - \frac{11}{2} x^2 - \frac{75}{16} = 0$$

wegzuschaffen, kann man auch $x^4 + 0x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 0x - \frac{75}{16} = 0$ schreiben, und bemerkt alsdann leicht, daß die Nenner 1, 2, 1, 16 in die Potenzen 2, 2^2, 2^3, 2^4 aufgehen, daher erhält man für $x = \frac{y}{2}$ nach §. 80. (*I*)

$$y^4 - \frac{11.2^2}{2} y^2 - \frac{75.2^4}{16} = 0 \text{ oder}$$

$$y^4 - 22y^2 - 75 = 0.$$

Von der gegebenen Gleichung ist $x = \frac{5}{2}$ eine Wurzel, daher muß $y = 2x = 5$ eine Wurzel der gefundenen Gleichung seyn.

Durch ein ähnliches Verfahren ist man auch im Stande irrationale Koeffizienten wegzuschaffen.

3. **Beispiel.** Aus der Gleichung $x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$ das Wurzelzeichen wegzuschaffen, setze man $x = y\sqrt{3}$, so wird

$$3y^2\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \text{ oder } 3y^2 - 2y + 1 = 0,$$

und nach §. 81.

$$z^2 - 2z + 3 = 0.$$

Dieses Beispiel ist nach Newton (*Arithmetica universalis. Edit. II. Londini, 1722. p. 255.*).

§. 83.

Jede Gleichung läßt sich in eine andere von eben demselben Grade verwandeln, deren Wurzeln um irgend eine Größe h von den Wurzeln der gegebenen Gleichung verschieden sind.

Die gegebene Gleichung sei

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0.$$

I. Sollen nun die Wurzeln der verwandelten Gleichung $y = x - h$ seyn; so wird hienach $x = y + h$ und wenn man diesen Werth in die vorstehende Gleichung setzt, so entsteht offenbar ein Ausdruck $= fy$ in welchem $y = x - h$ ist. Hienach findet man

$$(y+h)^n + A(y+h)^{n-1} + B(y+h)^{n-2} + \ldots + P(y+h) + Q = 0$$

oder wenn man die Binomien nach §. 25. auflöset und nach den Potenzen von y ordnet

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} y^n + nh & y^{n-1} + \quad n_2\, h^2 & y^{n-2} + \quad n_3\, h^3 & y^{n-3} + \ldots + \; h^n \\ \quad + A & \quad\; + (n-1) A h & \quad\; + (n-1)_2 A h^2 & \qquad\qquad + A h^{n-1} \\ & \quad\; + \quad B & \quad\; + (n-2)\; B h & \qquad\qquad + B h^{n-2} \\ & & \quad\; + \quad C & \qquad\qquad + C h^{n-3} \\ & & & \qquad\qquad \ldots\ldots \\ & & & \qquad\qquad + Q \end{array}\right\} = 0$$

Man kann daher die gegebene Gleichung $Fx = 0$ in eine andere

$$fy = y^n + A' y^{n-1} + B' y^{n-2} + \ldots + P' y + Q' = 0$$

verwandeln, deren Wurzeln um den Theil h kleiner sind, als die Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$; oder es ist hier $y = x - h$. Nach dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} A' &= A + nh \\ B' &= B + (n-1)\, A h + n_2 h^2 \\ C' &= C + (n-2)\, B h + (n-1)_2\, A h^2 + n_3 h^3 \\ D' &= D + (n-3)\, C h + (n-2)_2\, B h^2 + (n-1)_3\, A h^3 + n_4 h^4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q' &= Q + P h + O h^2 + N h^3 + \ldots + A h^{n-1} + h^n. \end{aligned}$$

Kennt man daher eine Wurzel a der Gleichung $Fx = 0$, so wird $x = a$, und es ist dadurch zugleich eine Wurzel $y = a - h$ der Gleichung fy bekannt. Umgekehrt, wenn man eine Wurzel a von $fy = 0$ kennt, so ist auch die Wurzel $x = a + h$ bekannt.

II. Für $y = x + h$ wird $x = y - h$, also bleibt die vorstehende Entwickelung ungeändert, nur daß durchgängig $-h$ statt h gesetzt werden muß.

§. 84.

1. **Zusatz.** Schreibt man die Glieder der Gleichung $fy = 0$ in umgekehrter Ordnung $Q' + P'y + O'y^2 + N'y^3 + \ldots + A'y^{n-1} + y^n = 0$, oder, weil n eine positive ganze Zahl ist (§. 25.),

$$\begin{array}{l|l|l} h^n \quad + \quad n\, h^{n-1} & y + \frac{n.n-1}{1.2}\; h^{n-2} & y^2 + \ldots + y^n = 0 \\ + A h^{n-1} + (n-1)\, A h^{n-2} & \; + \frac{n-1.n-2}{1.2}\, A\, h^{n-3} & \\ + B h^{n-2} + (n-2)\, B h^{n-3} & \; + \frac{n-2.n-3}{1.2}\, B\, h^{n-4} & \\ + C h^{n-3} + (n-3)\, C h^{n-4} & \; \ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \; + \qquad 1.O\; h^0 & \\ + P h' \quad + \quad 1.P h^0 & & \\ + Q h^0 & & \end{array}$$

so bemerkt man leicht, daß das Glied Q' gefunden wird, wenn man in der gegebenen Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

x mit h vertauscht; dies giebt

$$Q' = h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} + \ldots + Ph^1 + Qh^0.$$

Hieraus kann man den folgenden Koeffizienten P' ableiten, wenn man jedes Glied der Reihe Q' mit dem Exponenten von h multiplizirt, und den Exponenten der Potenz von h um eine Einheit vermindert. Hienach wird

$$P' = nh^{n-1} + (n-1)Ah^{n-2} + (n-2)Bh^{n-3} + \ldots + 2Oh^1 + 1.Ph^0.$$

Hieraus den folgenden Koeffizient O' abzuleiten, verfährt man eben so, nur daß jedes Glied noch durch 2 dividirt wird. Dies giebt

$$O' = \frac{n.n-1}{2}h^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{2}Ah^{n-3} + \frac{n-2.n-3}{2}Bh^{n-4} + \ldots + \frac{2}{2}Oh^0.$$

Ueberhaupt erhält man jeden Koeffizienten der verwandelten Reihe $Q' + P'y + \ldots + y^n = 0$ aus dem unmittelbar vorhergehenden, wenn man **jedes seiner Glieder mit dem Exponenten von h multiplizirt, durch die Anzahl der Koeffizienten dividirt, welche dem gesuchten vorangehen, und den Exponenten der Potenz von h um eine Einheit vermindert.**

Durch diese einfache Regel erhält man ein leichtes Mittel, die gegebene Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

in eine andere

$$fy = Q' + P'y + O'y^2 + N'y^3 + \ldots + A'y^{n-1} + y^n = 0$$

zu verwandeln, wenn $x = y + h$ oder $x = y - h$ seyn soll, und man hat nur zu bemerken, daß für $x = y + h$ alsdann $Q' = Fh$, und für $x = y - h$ alsdann $Q' = F(-h)$ wird.

1. **Beispiel.** Die Gleichung

$$Fx = x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzel $y = x - 3$, also $x = y + 3$ ist.

Hier wird $h = 3$; $A = 8$; $B = -5$; $C = 3$ und $D = -7$ also

$$D' + C'y + B'y^2 + A'y^3 + y^4 = 0$$

die gesuchte Gleichung, und man findet

$$D' = (3)^4 + 8.(3)^3 - 5(3)^2 + 3(3) - 7 = 254$$
$$C' = 4(3)^3 + 3.8(3)^2 - 2.5(3) + 3 = 297$$
$$B' = \frac{3.4}{2}(3)^2 + \frac{2.3.8}{2}(3) - \frac{2.5}{2} = 121$$
$$A' = \frac{2.3.4}{2.3}(3) + \frac{2.3.8}{2.3} = 20 \text{ folglich}$$

$$fy = y^4 + 20y^3 + 121y^2 + 297y + 254 = 0.$$

Für $Fx = 0$ ist $x = 1$ eine Wurzel, daher muß $y = x - 3 = 1 - 3 = -2$ eine Wurzel der verwandelten Gleichung seyn.

Uebrigens kann man die Gleichung $fy = o$, wegen $y = x - 3$, auch auf folgende Weise ausdrücken:

$$(x-3)^4 + 20(x-3)^3 + 121(x-3)^2 + 297(x-3) + 254 = o.$$

2. **Beispiel.** Die Gleichung

$$Fx = x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = o.$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzel $y = x + 2$, also $x = y - 2$ ist.

Hier wird $h = -2$; $A = -6$; $B = -5$; $C = 7$, also $C' + B'y + A'y^2 + y^3 = o$, und man findet

$$C' = (-2)^3 - 6(-2)^2 - 5(-2) + 7 = -15$$

$$B' = 3(-2)^2 - 2.6(-2) - 5 = 31$$

$$A' = \frac{2.3(-2)}{2} - \frac{2.6}{2} = -12, \text{ daher}$$

$$(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + 31(x+2) - 15 = o.$$

§. 85.

2. **Zusatz.** Will man durch eine einfache Rechnung gegebene Gleichungen in andere verwandeln, deren Wurzeln $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$; .... sind, so kann dies nach §. 42. geschehen, indem man die dortigen Werthe ${}^1A_n$; ${}^2A_{n-1}$; ${}^3A_{n-2}$; .... mit den vorstehenden Q'; P'; O'; .... vergleicht, und hier $h = 1$ setzt.

Wäre daher die Gleichung $4x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = o$ gegeben, und man sucht die verwandelte Gleichung für die Wurzel $x - 1$, so entsteht nach §. 42. folgende Rechnung

+ 4	+ 2	− 5	+ 6
+ 4	+ 6	+ 1	+ 7
+ 4	+ 10	+ 11	
+ 4	+ 14		
+ 4			

und es wird hienach die verwandelte Gleichung

$$4(x-1)^3 + 14(x-1)^2 + 11(x-1) + 7 = o.$$

Durch ein ähnliches Verfahren läßt sich nun aus den Koeffizienten 4, 14, 11, 7 die verwandelte Gleichung für $x - 2$, daraus für $x - 3$ u. s. w. finden, und man kann hienach die angefangene Rechnung, so weit man will, fortsetzen. Wäre z. B. die Gleichung

$$x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = o$$

gegeben, und man sucht die Verwandlungen für $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$; .... so wird

$+1$	$+8$	-5	$+3$	-7	
$+1$	$+9$	$+4$	$+7$	$+0$	
$+1$	$+10$	$+14$	$+21$		
$+1$	$+11$	$+25$			
$+1$	$+12$	$+25$	$+21$	$+0$;	Koeffizienten für $x-1$
$+1$	$+13$	$+38$	$+59$	$+59$	
$+1$	$+14$	$+52$	$+111$		
$+1$	$+15$	$+67$			
$+1$	$+16$	$+67$	$+111$	$+59$;	Koeffizienten für $x-2$
$+1$	$+17$	$+84$	$+195$	$+254$	
$+1$	$+18$	$+102$	$+297$		
$+1$	$+19$	$+121$			
$+1$	$+20$	$+121$	$+297$	$+254$;	Koeffizienten für $x-3$

u. s. w.

Hienach erhält man aus der Gleichung

$$x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$(x-1)^4 + 12(x-1)^3 + 25(x-1)^2 + 21(x-1) + 0 = 0$$

$$(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 67(x-2)^2 + 111(x-2) + 59 = 0$$

$$(x-3)^4 + 20(x-3)^3 + 121(x-3)^2 + 297(x-3) + 254 = 0$$

u. s. w.

Es läßt sich leicht übersehen, daß man aus den Koeffizienten einer jeden dieser Reihen, die Koeffizienten der unmittelbar darüber stehenden Reihe durch ein umgekehrtes Rechnungsverfahren finden kann, weil man nur alsdann die Differenz statt der Summe der Glieder nehmen darf. Sieht man daher die Glieder 1, 20, 121, 297 und 254 als gegeben an, so findet man daraus:

1	$+20$	$+121$	$+297$	$+254$
1	$+19$	$+102$	$+195$	$+59$
1	$+18$	$+84$	$+111$	
1	$+17$	$+67$		
1	$+16$			
1	$+16$	$+67$	$+111$	$+59$, wie erfordert wird.

Sucht man daher aus einer gegebenen Gleichung die verwandelten Gleichungen für $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... so verfährt man ganz auf die vorige Weise, nur daß man hier jedes vorhergehende Glied vom folgenden subtrahirt, anstatt solches zu addiren.

Wäre z. B. die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = 0$$

gegeben, und man sucht die Verwandlungen für $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... so entsteht folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l}
1 - 6 - 5 + 7 \\ \hline
1 - 7 + 2 + 5 \\
1 - 8 + 10 \\
1 - 9 + 10 + 5; \text{ Koeffizienten für } x+1 \\ \hline
1 - 10 + 20 - 15 \\
1 - 11 + 31 \\
1 - 12 + 31 - 15; \text{ Koeffizienten für } x+2 \\ \hline
1 - 13 + 44 - 59 \\
1 - 14 + 58 \\
1 - 15 + 58 - 59; \text{ Koeffizienten für } x+3 \\ \hline
\end{array}$$

u. s. w.

Hienach erhält man aus der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = 0$$
$$(x+1)^3 - 9(x+1)^2 + 10(x+1) + 5 = 0$$
$$(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + 31(x+2) - 15 = 0$$
$$(x+3)^3 - 15(x+3)^2 + 58(x+3) - 59 = 0$$

u. s. w.

Wie diese Subtraction vermieden, und in Addition verwandelt werden kann, s. m. §. 92. Fehlen in der zu verwandelnden Gleichung einzelne Glieder, so müssen ihre Stellen durch Nullen ersetzt werden, wenn man, den vorstehenden Rechnungen gemäß, danach die verwandelten Gleichungen finden will.

Wäre die Gleichung

$x^3 - 7x + 7 = 0$ gegeben, und man sucht die Verwandlung für $x-1$; $x-2$, ... so wird

$$\begin{array}{l}
1 + 0 - 7 + 7 \\ \hline
1 + 1 - 6 + 1 \\
1 + 2 - 4 \\
1 + 3 - 4 + 1; \text{ Koeffizienten für } x-1 \\ \hline
1 + 4 - 0 + 1 \\
1 + 5 + 5 \\
1 + 6 + 5 + 1; \text{ Koeffizienten für } x-2 \\ \hline
1 + 7 + 12 + 13 \\
1 + 8 + 20 \\
1 + 9 + 20 + 13; \text{ Koeffizienten für } x-3 \\ \hline
\end{array}$$

u. s. w.

Das vorstehende einfache Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten für die Gleichungen von $x \mp 1$; $x \mp 2$; $x \mp 3$; .... welches mit Nutzen beim Aufsuchen der Wurzeln einer

Gleichung angewandt werden kann, ist von Hr. **Budan** aber ohne Beweis in nachstehender Schrift vorgetragen worden:

Nouvelle Méthode pour la Résolution des Equations numériques, par F. D. **Budan**, *à Paris* 1807. 4.

§. 86.

3. **Zusatz.** Durch das §. 85. beschriebene einfache Verfahren, ist man im Stande, leicht von jeder Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots . + Q = 0 \quad [I]$$

die Koeffizienten der verwandelten Gleichungen für $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... anzugeben und jeden folgenden aus dem vorhergehenden zu bestimmen. Verlangt man aber, unabhängig von diesen, die Koeffizienten für $x-m$, $x-2m$, $x-3m$, ... wo m jede ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann, so setze man in der gegebenen Gleichung [I], $x = my$, so wird nach §. 80. (II)

$$y^n + \frac{A}{m}y^{n-1} + \frac{B}{m^2}y^{n-2} + \ldots + \frac{Q}{m^n} = 0$$

und man kann nach §. 85. aus den Koeffizienten $1, \frac{A}{m}, \frac{B}{m^2}, \ldots . \frac{Q}{m^n}$, die Koeffizienten $1, A', B', \ldots . Q'$ für die Gleichung

$$(y-1)^n + A'(y-1)^{n-1} + B'(y-1)^{n-2} + \ldots . + Q' = 0$$

und hieraus, durch Anwendung desselben Verfahrens,

$$(y-2)^n + A''(y-2)^{n-1} + B''(y-2)^{n-2} + \ldots + Q'' = 0$$
$$(y-3)^n + A'''(y-3)^{n-1} + B'''(y-2)^{n-2} + \ldots + Q''' = 0$$

. . . .

Hierin $y = \frac{x}{m}$ gesetzt, giebt $y-1 = \frac{x-m}{m}$; $y-2 = \frac{x-2m}{m}$; $y-3 = \frac{x-3m}{m}$; ....

und man findet, wenn hienächst durchgängig mit m^n multiplizirt wird,

$$(x-m)^n + mA'(x-m)^{n-1} + m^2B'(x-m)^{n-2} + \ldots + m^nQ' = 0$$
$$(x-2m)^n + mA''(x-2m)^{n-1} + m^2B''(x-2m)^{n-2} + \ldots + m^nQ'' = 0$$
$$(x-3m)^n + mA'''(x-3m)^{n-1} + m^2B'''(x-3m)^{n-2} + \ldots + m^nQ''' = 0$$

. . . .

Hieraus folgt, daß wenn die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = 0$$

gegeben ist, und man will die Koeffizienten für $x-m$, $x-2m$, $x-3m$, ... finden, so suche man aus den Koeffizienten

$$1 + \frac{A}{m} + \frac{B}{m^2} + \frac{C}{m^3} + \ldots . + \frac{Q}{m^n}$$

nach §. 85. die nächstfolgenden Koeffizienten

$$1 + A' + B' + C' + \ldots . + Q'.$$ Hieraus ferner
$$1 + A'' + B'' + C'' + \ldots . + Q''$$
$$1 + A''' + B''' + C''' + \ldots . + Q'''$$

. . . .

bilde alsdann die Glieder

$$1 + mA' + m^2B' + m^3C' + \ldots + m^nQ'$$
$$1 + mA'' + m^2B'' + m^3C'' + \ldots + m^nQ''$$
$$1 + mA''' + m^2B''' + m^3C''' + \ldots + m^nQ'''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man dadurch die Koeffizienten für $x-m$, $x-2m$, $x-3m$, ...

Beispiel. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$$

die verwandelten Gleichungen für $x-100$, $x-200$, $x-300$, ... zu finden, wird hier $m = 100$. Setzt man daher $1 - 4 + 3 - 6$ und dividirt durch die auf einander folgenden Potenzen von 100, so wird

$$1 - 0{,}04 + 0{,}0003 - 0{,}000006$$

1 +	0,96 +	0,9603 +	1,960294				
1 +	1,96 +	2,9203					
1 +	2,96 +	2,9203 +	1,960294; für $x-100$				
1 +	3,96 +	6,8803 +	7,840594				
1 +	4,96 +	11,8403					
1 +	5,96 +	11,8403 +	7,840594; für $x-200$				
1 +	6,96 +	18,8003 +	26,640894				
1 +	7,96 +	26,7603					
1 +	8,96 +	26,7603 +	26,640894; für $x-300$				
1 +	9,96 +	36,7203 +	63,361194				
1 +	10,96 +	47,7803					
1 +	11,96 +	47,7803 +	63,361194; für $x-400$				

u. s. w.

Die gefundenen Koeffizienten mit den auf einander folgenden Potenzen von 100 multiplizirt, giebt

$$1 + 296 + 29203 + 1960294$$
$$1 + 596 + 118403 + 7840594$$
$$1 + 896 + 267603 + 26640894$$
$$1 + 1196 + 477803 + 63361194$$

u. s. w., oder es wird

$$(x-100)^3 + 296(x-100)^2 + 29203(x-100) + 1960294 = 0$$
$$(x-200)^3 + 596(x-200)^2 + 118403(x-200) + 7840594 = 0$$
$$(x-300)^3 + 896(x-300)^2 + 267603(x-300) + 26640894 = 0$$

u. s. w.

§. 87.

1. Zusatz. Hat man die Koeffizienten für $x-m$ gefunden, und verlangt die Koeffi-

zienten für $x - m - r$; $x - m - 2r$; $x - m - 3r$; ..... so bleibt das Verfahren dem des vorhergehenden §. gleich, weil man nur $x - m = x'$ setzen, und daraus $x' - r$, $x' - 2r$, $x' - 3r$, ... suchen darf.

1. Beispiel. Aus der gegebenen Gleichung

$$(x - 300)^3 + 896(x - 300)^2 + 267603(x - 300) + 26640894 = 0$$

die Gleichungen für $x - 310$, $x - 320$, $x - 330$, ... zu finden, wird hier $r = 10$. Setzt man daher

$$1 + 896 + 267603 + 26640894$$

und dividirt durch die auf einander folgenden Potenzen von 10, so wird

1	+ 89,6	+ 2676,03	+ 26640,894
1	+ 90,6	+ 2766,63	+ 29407,524
1	+ 91,6	+ 2858,23	
1	+ 92,6	+ 2858,23	+ 29407,524
1	+ 93,6	+ 2951,83	+ 32359,354
1	+ 94,6	+ 3046,43	
1	+ 95,6	+ 3046,43	+ 32359,354
1	+ 96,6	+ 3143,03	+ 35502,384
1	+ 97,6	+ 3240,63	
1	+ 98,6	+ 3240,63	+ 35502,384

u. s. w.

Die gefundenen Koeffizienten wieder mit den auf einander folgenden Potenzen von 10 multiplizirt, giebt

$$1 + 926 + 285823 + 29407524$$
$$1 + 956 + 304643 + 32359354$$
$$1 + 986 + 324063 + 35502384$$

u. s. w., oder es wird

$$(x - 310)^3 + 926(x - 310)^2 + 285823(x - 310) + 29407524 = 0$$
$$(x - 320)^3 + 956(x - 320)^2 + 304643(x - 320) + 32359354 = 0$$
$$(x - 330)^3 + 986(x - 330)^2 + 324063(x - 330) + 35502384 = 0.$$

u. s. w.

2. Beispiel. Aus der gegebenen Gleichung

$$(x - 320)^3 + 956(x - 320)^2 + 304643(x - 320) + 32359354 = 0.$$

Die Gleichungen für $x - 321$, $x - 322$, $x - 323$, ... zu finden, wird hier $r = 1$, also eben so wie §. 85.

$$\begin{array}{l}
1 + 956 + 304643 + 32359354 \\
\hline
1 + 957 + 305600 + 32664954 \\
1 + 958 + 306558 \\
1 + 959 + 306558 + 32664954 \\
\hline
1 + 960 + 307518 + 32972472 \\
1 + 961 + 308479 \\
1 + 962 + 308479 + 32972472 \\
\hline
\end{array}$$

u. s. w., oder es wird

$$(x - 321)^3 + 959(x - 321)^2 + 306558(x - 321) + 32664954 = 0$$
$$(x - 322)^3 + 962(x - 322)^2 + 308479(x - 322) + 32972472 = 0$$

u. s. w.

§. 88.

5. **Zusatz.** Setzt man in den zuletzt gefundenen Ausdrücken durchgängig $\frac{1}{m}$ statt m, so folgt, daß wenn die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = 0$$

gegeben ist, und man will die Koeffizienten für $x - \frac{1}{m}$; $x - \frac{2}{m}$; $x - \frac{3}{m}$; .... finden, so suche man aus den Koeffizienten

$$1 + mA + m^2 B + m^3 C + \ldots + m^n Q$$

nach §. 85. die nächst folgenden Koeffizienten

$$\begin{array}{l}
1 + A' + B' + C' + \ldots + Q' \\
1 + A'' + B'' + C'' + \ldots + Q'' \\
1 + A''' + B''' + C''' + \ldots + Q''' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

bilde alsdann hieraus die Glieder

$$\begin{array}{l}
1 + \frac{A'}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{C'}{m^3} + \ldots + \frac{Q'}{m^n} \\
1 + \frac{A''}{m} + \frac{B''}{m^2} + \frac{C''}{m^3} + \ldots + \frac{Q''}{m^n} \\
1 + \frac{A'''}{m} + \frac{B'''}{m^2} + \frac{C'''}{m_3} + \ldots + \frac{Q'''}{m^n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

so erhält man dadurch die Koeffizienten für $x - \frac{1}{m}$; $x - \frac{2}{m}$; $x - \frac{3}{m}$; .....

Beispiel. Aus der gegebenen Gleichung

$$(x - 3)^3 + 9(x - 3)^2 + 20(x - 3) - 1 = 0$$

welche aus der Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ entstanden ist, die Gleichungen für $x - 3 - \frac{1}{100}$; $x - 3 - \frac{2}{100}$; $x - 3 - \frac{3}{100}$; .... oder $x - 3{,}01$; $x - 3{,}02$; $x - 3{,}03$; .... zu

finden, wird hier $m = 100$. Setzt man daher $1 + 9 + 20 - 1$ und multiplizirt mit den auf einander folgenden Potenzen von 100, so wird

1	+ 900	+ 200000	− 1000000
1	+ 901	+ 200901	− 799099
1	+ 902	+ 201803	
1	+ 903	+ 201803	− 799099
1	+ 904	+ 202707	− 596392
1	+ 905	+ 203612	
1	+ 906	+ 203612	− 596392
1	+ 907	+ 204519	− 391873
1	+ 908	+ 205427	
1	+ 909	+ 205427	− 391873
1	+ 910	+ 206337	− 185536
1	+ 911	+ 207248	
1	+ 912	+ 207248	− 185536
1	+ 913	+ 208161	+ 22625
1	+ 914	+ 209075	
1	+ 915	+ 209075	+ 22625

u. s. w.

Die gefundenen Koeffizienten wieder durch die auf einander folgenden Potenzen von 100 dividirt, giebt

$$1 + 9{,}03 + 20{,}1803 - 0{,}799099$$
$$1 + 9{,}06 + 20{,}3612 - 0{,}596392$$
$$1 + 9{,}09 + 20{,}5427 - 0{,}391873$$
$$1 + 9{,}12 + 20{,}7248 - 0{,}185536$$
$$1 + 9{,}15 + 20{,}9075 + 0{,}022625$$

u. s. w., oder es wird:

$$(x - 3{,}01)^3 + 9{,}03\,(x - 3{,}01)^2 + 20{,}1803\,(x - 3{,}01) - 0{,}799099 = 0$$
$$(x - 3{,}02)^3 + 9{,}06\,(x - 3{,}02)^2 + 20{,}3612\,(x - 3{,}02) - 0{,}596392 = 0$$

u. s. w.

§. 89.

Aufgabe. Jede gegebene Gleichung in eine andere von demselben Grade zu verwandeln, in welcher irgend ein Glied fehlt.

Auflösung. Wäre die gegebene Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots + Q = 0$$

so kann man solche, nach §. 83., in folgende verwandeln, deren Wurzel $y = x + h$ ist,

$$y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + C'y^{n-3} + \dots + Q' = 0.$$

Uebrigens kann man die Gleichung $fy = 0$, wegen $y = x - 3$, auch auf folgende Weise ausdrücken:

$$(x-3)^4 + 20(x-3)^3 + 121(x-3)^2 + 297(x-3) + 254 = 0.$$

2. **Beispiel.** Die Gleichung

$$Fx = x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = 0.$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzel $y = x + 2$, also $x = y - 2$ ist.

Hier wird $h = -2$; $A = -6$; $B = -5$; $C = 7$, also $C' + B'y + A'y^2 + y^3 = 0$, und man findet

$$C' = (-2)^3 - 6(-2)^2 - 5(-2) + 7 = -15$$

$$B' = 3(-2)^2 - 2.6(-2) - 5 = 31$$

$$A' = \frac{2.3(-2)}{2} - \frac{2.6}{2} = -12, \text{ daher}$$

$$(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + 31(x+2) - 15 = 0.$$

§. 85.

2. **Zusatz.** Will man durch eine einfache Rechnung gegebene Gleichungen in andere verwandeln, deren Wurzeln $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$; .... sind, so kann dies nach §. 42. geschehen, indem man die dortigen Werthe ${}^1A_n$; ${}^2A_{n-1}$; ${}^3A_{n-2}$; .... mit den vorstehenden Q'; P'; O'; .... vergleicht, und hier $h = 1$ setzt.

Wäre daher die Gleichung $4x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$ gegeben, und man sucht die verwandelte Gleichung für die Wurzel $x - 1$, so entsteht nach §. 42. folgende Rechnung

+ 4	+ 2	− 5	+ 6
+ 4	+ 6	+ 1	+ 7
+ 4	+ 10	+ 11	
+ 4	+ 14		
+ 4			

und es wird hienach die verwandelte Gleichung

$$4(x-1)^3 + 14(x-1)^2 + 11(x-1) + 7 = 0.$$

Durch ein ähnliches Verfahren läßt sich nun aus den Koeffizienten 4, 14, 11, 7 die verwandelte Gleichung für $x - 2$, daraus für $x - 3$ u. s. w. finden, und man kann hienach die angefangene Rechnung, so weit man will, fortsetzen. Wäre z. B. die Gleichung

$$x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

gegeben, und man sucht die Verwandlungen für $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$; .... so wird

+1	+8	−5	+3	−7	
+1	+9	+4	+7	+0	
+1	+10	+14	+21		
+1	+11	+25			
+1	+12	+25	+21	+0;	Koeffizienten für $x-1$
+1	+13	+38	+59	+59	
+1	+14	+52	+111		
+1	+15	+67			
+1	+16	+67	+111	+59;	Koeffizienten für $x-2$
+1	+17	+84	+195	+254	
+1	+18	+102	+297		
+1	+19	+121			
+1	+20	+121	+297	+254;	Koeffizienten für $x-3$

u. s. w.

Hienach erhält man aus der Gleichung

$$x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$(x-1)^4 + 12(x-1)^3 + 25(x-1)^2 + 21(x-1) + 0 = 0$$

$$(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 67(x-2)^2 + 111(x-2) + 59 = 0$$

$$(x-3)^4 + 20(x-3)^3 + 121(x-3)^2 + 297(x-3) + 254 = 0$$

u. s. w.

Es läßt sich leicht übersehen, daß man aus den Koeffizienten einer jeden dieser Reihen, die Koeffizienten der unmittelbar darüber stehenden Reihe durch ein umgekehrtes Rechnungsverfahren finden kann, weil man nur alsdann die Differenz statt der Summe der Glieder nehmen darf. Sieht man daher die Glieder 1, 20, 121, 297 und 254 als gegeben an, so findet man daraus:

1	+20	+121	+297	+254	
1	+19	+102	+195	+59	
1	+18	+84	+111		
1	+17	+67			
1	+16				
1	+16	+67	+111	+59,	wie erfordert wird.

Sucht man daher aus einer gegebenen Gleichung die verwandelten Gleichungen für $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... so verfährt man ganz auf die vorige Weise, nur daß man hier jedes vorhergehende Glied vom folgenden subtrahirt, anstatt solches zu addiren.

Wäre z. B. die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = 0$$

gegeben, und man sucht die Verwandlungen für $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... so entsteht folgende Rechnung:

1	− 6	− 5	+ 7	
1	− 7	+ 2	+ 5	
1	− 8	+ 10		
1	− 9	+ 10	+ 5;	Koeffizienten für $x+1$
1	− 10	+ 20	− 15	
1	− 11	+ 31		
1	− 12	+ 31	− 15;	Koeffizienten für $x+2$
1	− 13	+ 44	− 59	
1	− 14	+ 58		
1	− 15	+ 58	− 59;	Koeffizienten für $x+3$

u. s. w.

Hienach erhält man aus der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = o$$
$$(x+1)^3 - 9(x+1)^2 + 10(x+1) + 5 = o$$
$$(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + 31(x+2) - 15 = o$$
$$(x+3)^3 - 15(x+3)^2 + 58(x+3) - 59 = o$$

u. s. w.

Wie diese Subtraction vermieden, und in Addition verwandelt werden kann, s. m. §. 92. Fehlen in der zu verwandelnden Gleichung einzelne Glieder, so müssen ihre Stellen durch Nullen ersetzt werden, wenn man, den vorstehenden Rechnungen gemäß, danach die verwandelten Gleichungen finden will.

Wäre die Gleichung

$x^3 - 7x + 7 = o$ gegeben, und man sucht die Verwandlung für $x-1$; $x-2$, ... so wird

1	+ o	− 7	+ 7	
1	+ 1	− 6	+ 1	
1	+ 2	− 4		
1	+ 3	− 4	+ 1;	Koeffizienten für $x-1$
1	+ 4	− o	+ 1	
1	+ 5	+ 5		
1	+ 6	+ 5	+ 1;	Koeffizienten für $x-2$
1	+ 7	+ 12	+ 13	
1	+ 8	+ 20		
1	+ 9	+ 20	+ 13;	Koeffizienten für $x-3$

u. s. w.

Das vorstehende einfache Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten für die Gleichungen von $x \mp 1$; $x \mp 2$; $x \mp 3$; .... welches mit Nutzen beim Aufsuchen der Wurzeln einer

Gleichung angewandt werden kann, ist von Hr. Budan aber ohne Beweis in nachstehender Schrift vorgetragen worden:

Nouvelle Méthode pour la Résolution des Equations numériques, par F. D. Budan, à Paris 1807. 4.

§. 86.

3. Zusatz. Durch das §. 85. beschriebene einfache Verfahren, ist man im Stande, leicht von jeder Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = o \quad [I]$$

die Koeffizienten der verwandelten Gleichungen für $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... anzugeben und jeden folgenden aus dem vorhergehenden zu bestimmen. Verlangt man aber, unabhängig von diesen, die Koeffizienten für $x-m$, $x-2m$, $x-3m$, ... wo m jede ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann, so setze man in der gegebenen Gleichung [I], $x = my$, so wird nach §. 80. (II)

$$y^n + \frac{A}{m} y^{n-1} + \frac{B}{m^2} y^{n-2} + \ldots + \frac{Q}{m^n} = o$$

und man kann nach §. 85. aus den Koeffizienten $1, \frac{A}{m}, \frac{B}{m^2}, \ldots \frac{Q}{m^n}$, die Koeffizienten $1, A', B', \ldots Q'$ für die Gleichung

$$(y-1)^n + A'(y-1)^{n-1} + B'(y-1)^{n-2} + \ldots + Q' = o$$

und hieraus, durch Anwendung desselben Verfahrens,

$$(y-2)^n + A''(y-2)^{n-1} + B''(y-2)^{n-2} + \ldots + Q'' = o$$
$$(y-3)^n + A'''(y-3)^{n-1} + B'''(y-2)^{n-2} + \ldots + Q''' = o$$

. . . .

Hierin $y = \frac{x}{m}$ gesetzt, giebt $y-1 = \frac{x-m}{m}$; $y-2 = \frac{x-2m}{m}$; $y-3 = \frac{x-3m}{m}$; .... und man findet, wenn hienächst durchgängig mit m^n multiplizirt wird,

$$(x-m)^n + mA'(x-m)^{n-1} + m^2B'(x-m)^{n-2} + \ldots + m^nQ' = o$$
$$(x-2m)^n + mA''(x-2m)^{n-1} + m^2B''(x-2m)^{n-2} + \ldots + m^nQ'' = o$$
$$(x-3m)^n + mA'''(x-3m)^{n-1} + m^2B'''(x-3m)^{n-2} + \ldots + m^nQ''' = o$$

. . . .

Hieraus folgt, daß wenn die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = o$$

gegeben ist, und man will die Koeffizienten für $x-m$, $x-2m$, $x-3m$, ... finden, so suche man aus den Koeffizienten

$$1 + \frac{A}{m} + \frac{B}{m^2} + \frac{C}{m^3} + \ldots + \frac{Q}{m^n}$$

nach §. 85. die nächstfolgenden Koeffizienten

$1 + A' + B' + C' + \ldots + Q'$. Hieraus ferner

$$1 + A'' + B'' + C'' + \ldots + Q''$$
$$1 + A''' + B''' + C''' + \ldots + Q'''$$

. . . .

bilde alsdann die Glieder

$$1 + mA' + m^2 B' + m^3 C' + \ldots\ldots + m^n Q'$$
$$1 + mA'' + m^2 B'' + m^3 C'' + \ldots\ldots + m^n Q''$$
$$1 + mA''' + m^2 B''' + m^3 C''' + \ldots\ldots + m^n Q'''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man dadurch die Koeffizienten für $x - m$, $x - 2m$, $x - 3m$, ...

Beispiel. Aus der gegebenen Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$$

die verwandelten Gleichungen für $x - 100$, $x - 200$, $x - 300$, ... zu finden, wird hier $m = 100$. Setzt man daher $1 - 4 + 3 - 6$ und dividirt durch die auf einander folgenden Potenzen von 100, so wird

1	—	0,04	+	0,0003	—	0,000006	
1	+	0,96	+	0,9603	+	1,960294	
1	+	1,96	+	2,9203			
1	+	2,96	+	2,9203	+	1,960294;	für $x - 100$
1	+	3,96	+	6,8803	+	7,840594	
1	+	4,96	+	11,8403			
1	+	5,96	+	11,8403	+	7,840594;	für $x - 200$
1	+	6,96	+	18,8003	+	26,640894	
1	+	7,96	+	26,7603			
1	+	8,96	+	26,7603	+	26,640894;	für $x - 300$
1	+	9,96	+	36,7203	+	63,361194	
1	+	10,96	+	47,7803			
1	+	11,96	+	47,7803	+	63,361194;	für $x - 400$

u. s. w.

Die gefundenen Koeffizienten mit den auf einander folgenden Potenzen von 100 multiplizirt, giebt

1	+	296	+	29203	+	1960294
1	+	596	+	118403	+	7840594
1	+	896	+	267603	+	26640894
1	+	1196	+	477803	+	63361194

u. s. w., oder es wird

$$(x - 100)^3 + 296(x - 100)^2 + 29203(x - 100) + 1960294 = 0$$
$$(x - 200)^3 + 596(x - 200)^2 + 118403(x - 200) + 7840594 = 0$$
$$(x - 300)^3 + 896(x - 300)^2 + 267603(x - 300) + 26640894 = 0$$

u. s. w.

§. 87.

1. Zusatz. Hat man die Koeffizienten für $x - m$ gefunden, und verlangt die Koeffi-

zienten für $x - m - r$; $x - m - 2r$; $x - m - 3r$; ..... so bleibt das Verfahren dem des vorhergehenden §. gleich, weil man nur $x - m = x'$ setzen, und daraus $x' - r$, $x' - 2r$, $x' - 3r$, ... suchen darf.

1. **Beispiel.** Aus der gegebenen Gleichung

$$(x - 300)^3 + 896\,(x - 300)^2 + 267603\,(x - 300) + 26640894 = 0$$

die Gleichungen für $x - 310$, $x - 320$, $x - 330$, ... zu finden, wird hier $r = 10$. Setzt man daher

$$1 + 896 + 267603 + 26640894$$

und dividirt durch die auf einander folgenden Potenzen von 10, so wird

1	+ 89,6	+ 2676,03	+ 26640,894
1	+ 90,6	+ 2766,63	+ 29407,524
1	+ 91,6	+ 2858,23	
1	+ 92,6	+ 2858,23	+ 29407,524
1	+ 93,6	+ 2951,83	+ 32359,354
1	+ 94,6	+ 3046,43	
1	+ 95,6	+ 3046,43	+ 32359,354
1	+ 96,6	+ 3143,03	+ 35502,384
1	+ 97,6	+ 3240,63	
1	+ 98,6	+ 3240,63	+ 35502,384

u. s. w.

Die gefundenen Koeffizienten wieder mit den auf einander folgenden Potenzen von 10 multiplizirt, giebt

$$1 + 926 + 285823 + 29407524$$
$$1 + 956 + 304643 + 32359354$$
$$1 + 986 + 324063 + 35502384$$

u. s. w., oder es wird

$$(x - 310)^3 + 926\,(x - 310)^2 + 285823\,(x - 310) + 29407524 = 0$$
$$(x - 320)^3 + 956\,(x - 320)^2 + 304643\,(x - 320) + 32359354 = 0$$
$$(x - 330)^3 + 986\,(x - 330)^2 + 324063\,(x - 330) + 35502384 = 0.$$

u. s. w.

2. **Beispiel.** Aus der gegebenen Gleichung

$$(x - 320)^3 + 956\,(x - 320)^2 + 304643\,(x - 320) + 32359354 = 0.$$

Die Gleichungen für $x - 321$, $x - 322$, $x - 323$, ... zu finden, wird hier $r = 1$, also eben so wie §. 85.

$$\begin{array}{l}
1 + 956 + 304643 + 32359354 \\ \hline
1 + 957 + 305600 + 32664954 \\
1 + 958 + 306558 \\
1 + 959 + 306558 + 32664954 \\ \hline
1 + 960 + 307518 + 32972472 \\
1 + 961 + 308479 \\
1 + 962 + 308479 + 32972472 \\ \hline
\end{array}$$

u. s. w., oder es wird

$$(x - 321)^3 + 959(x - 321)^2 + 306558(x - 321) + 32664954 = 0$$
$$(x - 322)^3 + 962(x - 322)^2 + 308479(x - 322) + 32972472 = 0$$

u. s. w.

§. 88.

5. **Zusatz.** Setzt man in den zuletzt gefundenen Ausdrücken durchgängig $\frac{1}{m}$ statt m, so folgt, daß wenn die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Q = 0$$

gegeben ist, und man will die Koeffizienten für $x - \frac{1}{m}$; $x - \frac{2}{m}$; $x - \frac{3}{m}$; .... finden, so suche man aus den Koeffizienten

$$1 + mA + m^2 B + m^3 C + \dots + m^n Q$$

nach §. 85. die nächst folgenden Koeffizienten

$$\begin{array}{l}
1 + A' + B' + C' + \dots + Q' \\
1 + A'' + B'' + C'' + \dots + Q'' \\
1 + A''' + B''' + C''' + \dots + Q''' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

bilde alsdann hieraus die Glieder

$$\begin{array}{l}
1 + \frac{A}{m} + \frac{B}{m^2} + \frac{C}{m^3} + \dots + \frac{Q}{m^n} \\
1 + \frac{A'}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{C'}{m^3} + \dots + \frac{Q'}{m^n} \\
1 + \frac{A''}{m} + \frac{B''}{m^2} + \frac{C''}{m_3} + \dots + \frac{Q''}{m^n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

so erhält man dadurch die Koeffizienten für $x - \frac{1}{m}$; $x - \frac{2}{m}$; $x - \frac{3}{m}$; .....

Beispiel. Aus der gegebenen Gleichung

$$(x - 3)^3 + 9(x - 3)^2 + 20(x - 3) - 1 = 0$$

welche aus der Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ entstanden ist, die Gleichungen für $x - 3 - \frac{1}{100}$; $x - 3 - \frac{2}{100}$; $x - 3 - \frac{3}{100}$; .... oder $x - 3{,}01$; $x - 3{,}02$; $x - 3{,}03$; .... zu

finden, wird hier $m = 100$. Setzt man daher $1 + 9 + 20 - 1$ und multiplizirt mit den auf einander folgenden Potenzen von 100, so wird

1	+ 900	+ 200000	− 1000000
1	+ 901	+ 200901	− 799099
1	+ 902	+ 201803	
1	+ 903	+ 201803	− 799099
1	+ 904	+ 202707	− 596392
1	+ 905	+ 203612	
1	+ 906	+ 203612	− 596392
1	+ 907	+ 204519	− 391873
1	+ 908	+ 205427	
1	+ 909	+ 205427	− 391873
1	+ 910	+ 206337	− 185536
1	+ 911	+ 207248	
1	+ 912	+ 207248	− 185536
1	+ 913	+ 208161	+ 22625
1	+ 914	+ 209075	
1	+ 915	+ 209075	+ 22625

u. s. w.

Die gefundenen Koeffizienten wieder durch die auf einander folgenden Potenzen von 100 dividirt, giebt

$$1 + 9{,}03 + 20{,}1803 - 0{,}799099$$
$$1 + 9{,}06 + 20{,}3612 - 0{,}596392$$
$$1 + 9{,}09 + 20{,}5427 - 0{,}391873$$
$$1 + 9{,}12 + 20{,}7248 - 0{,}185536$$
$$1 + 9{,}15 + 20{,}9075 + 0{,}022625$$

u. s. w., oder es wird:

$$(x - 3{,}01)^3 + 9{,}03\,(x - 3{,}01)^2 + 20{,}1803\,(x - 3{,}01) - 0{,}799099 = 0$$
$$(x - 3{,}02)^3 + 9{,}06\,(x - 3{,}02)^2 + 20{,}3612\,(x - 3{,}02) - 0{,}596392 = 0$$

u. s. w.

§. 89.

Aufgabe. Jede gegebene Gleichung in eine andere von demselben Grade zu verwandeln, in welcher irgend ein Glied fehlt.

Auflösung. Wäre die gegebene Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Q = 0$$

so kann man solche, nach §. 83., in folgende verwandeln, deren Wurzel $y = x + h$ ist,

$$y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + C'y^{n-3} + \ldots + Q' = 0.$$

Soll nun z. B. das zweite Glied A verschwinden, so setze man §. 83. (II)

$$A = A - nh = 0, \text{ also } h = \frac{1}{n} A, \text{ folglich}$$

$$y = x + \frac{1}{n} A \text{ oder } x = y - \frac{1}{n} A.$$

Hienach findet man

$$y^n + B' y^{n-2} + C' y^{n-3} + \ldots + Q' = 0,$$

wo die Koeffizienten B', C', ... nach §. 83. bestimmt werden können.

1. **Beispiel.** Aus der Gleichung

$$x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen, wird hier $n = 4$, $A = 8$, also $x = y - \frac{1}{4}.8 = y - 2$, daher $(y-2)^4 + 8(y-2)^3 - 5(y-2)^2 + 3(y-2) - 7 = 0$ oder

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r} y^4 - 8 & y^3 + 24 & y^2 - 32 & y + 16 \\ + 8 & - 48 & + 96 & - 64 \\ & - 5 & + 20 & - 20 \\ & & + 3 & - 6 \\ & & & - 7 \end{array}\right\} = 0 \text{ oder}$$

$$y^4 - 29y^2 + 87y - 81 = 0.$$

Von der gegebenen Gleichung ist $x = 1$ eine Wurzel, daher muß $y = x + 2 = 3$ eine Wurzel der gefundenen Gleichung seyn.

2. **Beispiel.** Aus der Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen, wird hier $n = 4$, $A = 2$, also $x = y - \frac{1}{4}.2 = y - \frac{1}{2}$, daher

$$(y - \tfrac{1}{2})^4 + 2(y - \tfrac{1}{2})^3 - 4(y - \tfrac{1}{2})^2 - 5(y - \tfrac{1}{2}) - 6 = 0, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r} y^4 - 2 & y^3 + \frac{3}{2} & y^2 - \frac{1}{2} & y + \frac{1}{16} \\ + 2 & - 3 & + \frac{3}{2} & - \frac{1}{4} \\ & - 4 & + 4 & - 1 \\ & & - 5 & + \frac{5}{2} \\ & & & - 6 \end{array}\right\} = 0 \text{ oder}$$

$$y^4 - \frac{11}{2} y^2 - \frac{75}{16} = 0.$$

Von der gegebenen Gleichung ist $x = 2$ eine Wurzel, daher muß $y = x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ eine Wurzel der gefundenen Gleichung seyn.

§. 90.

In der gegebenen Gleichung

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

werde $x = \alpha + \frac{1}{y}$ gesetzt, die Potenzen nach §. 25. entwickelt und nach $\frac{1}{y}$ geordnet, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha^n + nA\alpha^{n-1} \\ + B\alpha^{n-1} + (n-1)B\alpha^{n-2} \\ + C\alpha^{n-2} \quad \cdots\cdots \\ \quad \cdots + \quad P \\ + Q \end{array}\right| \frac{1}{y} \left.\begin{array}{l} + n_2 A\alpha^{n-2} \\ \quad \cdots\cdots \\ + \quad O \end{array}\right| \frac{1}{y^2} \left.\begin{array}{l} + \cdots + nA\alpha \\ \qquad\quad + \; B \end{array}\right| \frac{1}{y^{n-1}} + A\frac{1}{y^n} = 0$$

und es sey, mit y^n multiplizirt, die verwandelte Gleichung

$$A'y^n + B'y^{n-1} + C'y^{n-2} + \cdots + P'y + Q' = 0,$$

daher erhält man hienach

$$\begin{array}{l} A' = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} + D\alpha^{n-3} + \cdots + P\alpha + Q \\ B' = nA\alpha^{n-1} + (n-1)B\alpha^{n-2} + (n-2)C\alpha^{n-3} + \cdots + 2.O\alpha + P \\ C' = n_2 A\alpha^{n-2} + (n-1)_2 B\alpha^{n-3} + (n-2)_2 C\alpha^{n-4} + \cdots + 3_2 N + O \\ D' = n_3 A\alpha^{n-3} + (n-1)_3 B\alpha^{n-4} + \cdots + 4_3 M + N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ O' = n_2 A\alpha^2 + (n-1)B\alpha + C \\ P' = nA\alpha + B \\ Q' = A. \end{array}$$

Für $n = 3$ wird

$$\begin{array}{l} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \\ A'y^3 + B'y^2 + C'y + D' = 0 \\ A' = A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D \\ B' = 3A\alpha^2 + 2B\alpha + C \\ C' = 3A\alpha + B \\ D' = A. \end{array}$$

Für $n = 4$ wird

$$\begin{array}{l} Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \\ A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + E' = 0 \\ A' = A\alpha^4 + B\alpha^3 + C\alpha^2 + D\alpha + E \\ B' = 4A\alpha^3 + 3B\alpha^2 + 2C\alpha + D \\ C' = 6A\alpha^2 + 3B\alpha + C \\ D' = 4A\alpha + B \\ E' = A. \end{array}$$

u. s. w.

1. Beispiel. In der gegebenen Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

soll man $x = 2 + \frac{1}{y}$ setzen. Für diese Gleichung ist $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$, $D = -5$ und $\alpha = 2$, daher wird $A' = 1.2^3 + 0 - 2.2 - 5 = -1$

$$B' = 3.1.2^2 - 2 = 10$$

$C' = 3.1.2 = 6$ und $D' = 1$, daher die verwandelte Glei-

chung, $-y^3+10y^2+6y+1=0$, oder mit -1 multiplizirt,

$$y^3-10y^2-6y-1=0.$$

2. **Beispiel.** In der Gleichung $x^3-10x^2-6x-1=0$ soll $x=10+\frac{1}{y}$ gesetzt werden; dies giebt $A=1$, $B=-10$, $C=-6$, $D=-1$ und $a=10$, daher

$$A'=1.10^3-10.10^2-6.10-1=-61$$
$$B'=3.1.10^2-2.10.10-6=94$$
$$C'=3.1.10-10=20, \text{ und } D'=1, \text{ folglich}$$
$$-61y^3+94y^2+20y+1=0, \text{ oder}$$
$$61y^3-94y^2-20y-1=0.$$

3. **Beispiel.** In der Gleichung $61x^3-94x^2-20x-1=0$ soll $x=1+\frac{1}{y}$ gesetzt werden; dies giebt hier $A=61$, $B=-94$, $C=-20$, $D=-1$ und $a=1$, daher

$$A'=61-94-20-1=-54$$
$$B'=3.61-2.94-20=-25$$
$$C'=3.61-94=89, \text{ und } D'=61, \text{ folglich}$$
$$-54y^3-25y^2+89y+61=0, \text{ oder}$$
$$54y^3+25y^2-89y-61=0.$$

§. 91.

Sind $a, b, c \ldots\ldots q$ die Wurzeln einer Gleichung $Fx=0$, so kann man solche in eine andere von eben demselben Grade verwandeln, deren Wurzeln eben dieselben sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben, wenn man $x=-y$ setzt.

(*I*) Wäre die höchste Potenz von x gerade, also

$$Fx=x^{2r}+Ax^{2r-1}+Bx^{2r-2}+\ldots+Px+Q=0, \text{ also}$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-q)=0,$$

so wird für $x=-y$

$$fy=y^{2r}-Ay^{2r-1}+By^{2r-2}-\ldots-Py+Q=0$$
$$=(-y-a)(-y-b)(-y-c)\ldots(-y-q)$$
$$=(y+a)(y+b)(y+c)\ldots\ldots(y+q),$$

weil die Anzahl der Wurzeln gerade ist.

Kennt man daher die Wurzeln der Gleichung $Fx=0$, so kennt man auch die Wurzeln der Gleichung $fy=0$, weil diese den Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ gleich, aber entgegengesetzt sind.

Wären alle Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ positiv, so müssen die Wurzeln der Gleichung $fy=0$ sämmtlich negativ seyn und umgekehrt.

(*II*) Wäre die höchste Potenz von x ungerade, also

$$Fx=x^{2r+1}+Ax^{2r}+Bx^{2r-1}+\ldots\ldots+Px+Q=0$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-q),$$

so wird für $x=-y$

$$fy=-y^{2r+1}+Ay^{2r}-By^{2r-1}+\ldots\ldots-Py+Q=0$$
$$=(-y-a)(-y-b)(-y-c)\ldots\ldots(-y-q),$$

oder, weil die Anzahl der Wurzeln ungerade ist,

$$= -(y + a)(y + b) \ldots (y + q),$$

und durchgängig mit -1 multiplizirt

$$y^{2r+1} - Ay^{2r} + By^{2r-1} - \ldots + Py - Q = 0$$
$$= (y + a)(y + b)(y + c) \ldots (y + q).$$

Hieraus folgt, daß, wenn man die Zeichen des zweiten, vierten, sechsten, u. s. w. Gliedes einer geordneten vollständigen Gleichung in die entgegengesetzten verwandelt, so bleiben zwar die Wurzeln der verwandelten Gleichung dieselben, nur werden dadurch die positiven in negative, und die negativen in positive verwandelt.

1. **Beispiel.** Eine Wurzel der Gleichung

$$x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = 0 \text{ ist } x = 4,$$

daher muß die Gleichung

$$y^4 - y^3 - 29y^2 + 9y + 180 = 0$$

die Wurzel $y = -4$ haben.

2. **Beispiel.** Eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 13x + 30 = 0 \text{ ist } x = 3,$$

daher muß die Gleichung

$$y^3 + 2y^2 - 13y - 30 = 0$$

die Wurzel $y = -3$ haben.

§. 92.

Zusatz. Will man daher in vorkommenden Fällen nicht mit negativen, sondern nur mit positiven Wurzeln rechnen, so darf man nur die Zeichen vor den geraden Gliedern der gegebenen Gleichung umkehren, so sind die positiven Wurzeln der verwandelten Gleichung, negative Wurzeln der gegebenen.

Dies auf die Auffindung der Koeffizienten für $x + 1, x + 2, x + 3, \ldots$ anzuwenden, um die nach §. 85. erforderliche Subtraktion zu vermeiden, bemerke man, daß, wenn die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = 0$$

gegeben ist, so wird die verwandelte Gleichung

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - \ldots \pm Q = 0,$$

deren positive Wurzeln den negativen der gegebenen Gleichung gleich sind. Sucht man nun die Koeffizienten für $y - 1, y - 2, y - 3$ nach §. 85., so erhält man

$$(y - 1)^n + A'(y - 1)^{n-1} + B'(y - 1)^{n-2} + \ldots + Q' = 0$$
$$(y - 2)^n + A''(y - 2)^{n-1} + B''(y - 2)^{n-2} + \ldots + Q'' = 0$$

u. s. w., oder auch wegen $y = -x$

$$(-x - 1)^n + A'(-x - 1)^{n-1} + B'(-x - 1)^{n-2} + \ldots + Q' = 0$$
$$(-x - 2)^n + A''(-x - 2)^{n-1} + B''(-x - 2)^{n-2} + \ldots + Q'' = 0$$

u. s. w.

Nun ist, n mag gerade oder ungerade seyn, wenn man die Zeichen vor den geraden Gliedern umkehrt,

$$(x+1)^n - A'(x+1)^{n-1} + B'(x+1)^{n-2} - \ldots \pm Q' = 0$$
$$(x+2)^n - A''(x+2)^{n-1} + B''(x+2)^{n-2} - \ldots \pm Q'' = 0$$
u. s. w.

Hieraus folgt, daß, wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = 0$$

die Gleichungen für $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... sucht, so kehre man die Zeichen der geraden Glieder der gegebenen Gleichung um, dies giebt

$$1 - A + B - C + D - \ldots \pm Q,$$

werden dann, nach §. 85., durch Addition die hieraus entspringenden Koeffizienten gesucht,

$$1 + A' + B' + C' + \ldots + Q'$$
$$1 + A'' + B'' + C'' + \ldots + Q''$$

u. s. w., so erhält man hieraus durch Umkehrung der Zeichen der geraden Glieder die Koeffizienten

$$1 - A' + B' - C' + \ldots \pm Q' \text{ für } x + 1$$
$$1 - A'' + B'' - C'' + \ldots \pm Q'' \text{ für } x + 2$$
u. s. w.

Beispiel. Aus der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 5x + 7 = 0$$

die Koeffizienten für $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... zu finden, erhält man durch Umkehrung der Zeichen vor den geraden Gliedern

1	+ 6	− 5	− 7
1	+ 7	+ 2	− 5
1	+ 8	+ 10	
1	+ 9	+ 10	− 5
1	+ 10	+ 20	+ 15
1	+ 11	+ 31	
1	+ 12	+ 31	+ 15
1	+ 13	+ 44	+ 59
1	+ 14	+ 58	
1	+ 15	+ 58	+ 59

u. s. w.

Hieraus erhält man durch nochmaliges Umkehren die Koeffizienten

$$1 - 9 + 10 + 5 \text{ für } x + 1$$
$$1 - 12 + 31 - 15 \text{ für } x + 2$$
$$1 - 15 + 58 - 59 \text{ für } x + 3$$
u. s. w.

§. 93.

Dadurch, daß man in der Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

die Wurzel $x = \frac{m}{y}$ setzt, wo $m = 1$ oder jede willkührliche Zahl bedeuten kann, erhält man

$$\frac{m^n}{y^n} + \frac{Am^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{Bm^{n-2}}{y^{n-2}} + \ldots + \frac{Pm}{y} + Q = 0 \text{ oder}$$

$$(I) \quad Qy^n + Pmy^{n-1} + Om^2y^{n-2} + \ldots + Am^{n-1}y + m^n = 0,$$

wo $y = \frac{m}{x}$ ist.

Durch Q dividirt und $m = Q$ gesetzt, giebt

$$(II) \quad fy = y^n + Py^{n-1} + OQy^{n-2} + NQ^2y^{n-3} + \ldots + AQ^{n-2}y + Q^{n-1} = 0,$$

wo $y = \frac{Q}{x}$ ist.

Für $x = \frac{1}{y}$ wird

$$(III) \quad Qy^n + Py^{n-1} + Oy^{n-2} + \ldots\ldots + Ay + 1 = 0,$$

d. h. wenn in der Gleichung $Fx = 0$ der Werth $x = \frac{1}{y}$ gesetzt wird, so entsteht eine Gleichung von demselben Grade, deren Koeffizienten einerlei mit den der gegebenen Gleichung sind, nur daß sie in umgekehrter Ordnung auf einander folgen.

Wäre $x = a$ die größte unter allen reellen Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$, so muß $y = \frac{Q}{a}$ offenbar die kleinste unter den Wurzeln der Gleichung $fy = 0$ seyn.

Beispiel. Von der Gleichung $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ sind 1, 2, 3, 4 die entsprechenden Wurzeln. Setzt man $y = \frac{24}{x}$, so wird

$$y^4 - 50y^3 + 840y^2 - 5760y + 13824 = 0.$$

Hier sind, wegen $y = \frac{24}{x}$, die vier Wurzeln $\frac{24}{1} = 24$; $\frac{24}{2} = 12$; $\frac{24}{3} = 8$ und $\frac{24}{4} = 6$, so daß hier $y = \frac{24}{4} = 6$ die kleinste, dagegen in der gegebenen Gleichung $x = 4$ die größte Wurzel ist.

§. 94.

Von einer Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0,$$

deren erstes Glied die Einheit zum Koeffizienten hat und deren übrige Koeffizienten ganze Zahlen sind, kann **keine Wurzel ein rationaler Bruch** seyn.

Es sey $\frac{\alpha}{\beta}$ dieser Bruch, wo β weder in α noch in eine Potenz von α aufgeht, so erhält man, wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ mit x vertauscht wird,

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} + A\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \ldots + P\frac{\alpha}{\beta} + Q = 0,$$

oder mit β^{n-1} multiplizirt:

$$\frac{\alpha^n}{\beta} + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2}\beta + \ldots + P\alpha\beta^{n-2} + Q\beta^{n-1} = 0.$$

Nur das erste Glied dieser Gleichung ist ein echter oder unechter Bruch, die übrigen sind ganze Zahlen, daher können sämmtliche Glieder nie $= 0$ werden, wie erforderlich ist, wenn die Voraussetzung, daß $\frac{\alpha}{\beta} = x$ eine Wurzel der Gleichung seyn soll, statthaft wäre.

§. 95.

Findet man in einer Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0,$$

wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, für die algebraische Summe aller Glieder oder für den Werth der Gleichung eine positive Größe M, also $F\alpha = M$ und für $x = \beta$ eine negative Größe $- N$, also $F\beta = - N$, so muß zwischen α und β irgend ein Werth a liegen, für welchen, wenn man denselben statt x in die Gleichung $Fx = 0$ setzt, $Fa = 0$ wird.

Denn es sey φx die Summe aller positiven und $- \psi x$ die Summe aller negativen Glieder der Gleichung, also $Fx = \varphi x - \psi x = 0$, daher nach der Voraussetzung

$$F\alpha = \varphi\alpha - \psi\alpha = + M$$
$$F\beta = \varphi\beta - \psi\beta = - N.$$

Hienach ist ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$\varphi\alpha > \psi\alpha \text{ und } \varphi\beta < \psi\beta.$$

Nun sind φx und ψx nur ganze positive Potenzen von x, daher beide zugleich wachsen oder abnehmen, wenn x wächst oder abnimmt. Ist nun $\alpha > \beta$, so muß $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ abnehmen, wenn α abnimmt, und die Abnahme von $\varphi\alpha$ muß schneller erfolgen als bei $\psi\alpha$, weil sonst nicht, wenn $\alpha = \beta$ wird, $\varphi\beta < \psi\beta$ werden kann. Es muß daher zwischen α und β irgend einen Werth a geben, für welchen durch fortgesetzte Verminderung von α endlich $\varphi a = \psi a$ wird.

Wäre $\beta > \alpha$, so muß $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ wachsen wenn α wächst. Weil aber für $\alpha = \beta$ alsdann $\varphi\beta < \psi\beta$ wird, so muß wenn α wächst, $\psi\alpha$ schneller wachsen als $\varphi\alpha$, weil sonst nicht $\varphi\beta < \psi\beta$ werden könnte. Es muß daher auch in diesem Falle zwischen α und β irgend ein Werth a liegen, für welchen $\varphi a = \psi a$ wird.

Hienach findet man $\varphi a - \psi a = 0$ oder $Fa = 0$, daher ist a eine Wurzel der Gleichung $Fx = 0$.

Wenn daher, die positiven Zahlen α und β statt x in $Fx = 0$ gesetzt, für die Summe aller Glieder Werthe mit entgegengesetzten Zeichen geben, so muß zwischen α und β wenigstens eine positive Wurzel der Gleichung $Fx = 0$ liegen.

Wären α und β negative Zahlen und man fände, daß $F(-\alpha)$ und $F(-\beta)$ entgegengesetzte Werthe geben, so muß zwischen $-\alpha$ und $-\beta$ eine negative Wurzel der Gleichung liegen. Denn man nehme h willkührlich groß und setze $x = y - h$ in $Fx = 0$, so wird $F(y-h) = 0$ und $y = h + x$. Aber für $x = -\alpha$ und $x = -\beta$ wird $y = h - \alpha$ und $y = h - \beta$, daher müssen diese Werthe in $F(y-h) = 0$ gesetzt, dieselben Reste mit entgegengesetzten Zeichen

geben. Nun ist h willkührlich groß, man kann daher h so annehmen, daß $h - \alpha$ und $h - \beta$ positiv werden, woraus folgt, daß $F(y - h) = o$ eine positive Wurzel zwischen $h - \alpha$ und $h - \beta$ hat. Diese Wurzel sey $y = h - a$, wo a zwischen α und β liegt; dies giebt $x = y - h = - a$, also ist $- a$ eine Wurzel der Gleichung $Fx = o$, wenn $- \alpha$ und $- \beta$ statt x in Fx gesetzt, entgegengesetzte Werthe geben.

Alle vorhergehende Schlüsse gelten auch dann noch, wenn eine von den Zahlen α oder $\beta = o$ ist.

§. 96.

Zusatz. Erhält eine Gleichung entgegengesetzte Werthe oder Reste, wenn die Zahlen α und β statt x gesetzt werden, so hat die Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel. Weil aber zwischen α und β noch Zahlen liegen können, welche ebenfalls abwechselnde Werthe für die Gleichung geben können, so müssen alsdann auch zwischen α und β noch mehrere Wurzeln liegen. Wären nun α', α'' zwei Werthe zwischen α und β, und man fände für die auf einander folgenden Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta$ die Zeichen $+ - + -$ vor den entsprechenden Werthen der Gleichung, so beweiset dies, daß alsdann zwischen α und β drei reelle Wurzeln liegen, weil drei Uebergänge der Zeichen in den Werthen der Gleichung entstehen. Eben so können 5, 7, 9, und überhaupt jede ungerade Anzahl von Wurzeln zwischen α und β liegen, wenn für diese beide Zahlen die Werthe der Gleichung entgegengesetzte Zeichen erhalten.

Findet man, daß für die beiden Zahlen α und β die Werthe der Gleichung einerlei Zeichen erhalten, so kann dennoch zwischen α und β eine Zahl liegen, welche für den Werth der Gleichung ein entgegengesetztes Zeichen giebt, in welchem Falle zwischen α und β zwei Wurzeln enthalten wären. Liegen zwischen α und β drei Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ welche abwechselnde Werthe für die Gleichung geben, so daß z. B. für die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \beta$ die Werthe der Gleichung die Zeichen $+ - + - +$ erhalten, so ist dies ein Zeichen, daß vier Wurzeln zwischen α und β liegen. Ueberhaupt, wenn für zwei Zahlen α und β die entsprechenden Werthe der Gleichung einerlei Zeichen erhalten, so kann zwischen α und β nur eine gerade Anzahl von Wurzeln enthalten seyn.

§. 97.

In jeder Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = o$$

kann man x so groß annehmen, daß die Summe aller Glieder nicht $= o$, sondern einer positiven Größe gleich sey.

I. Hat die Gleichung durchgängig einerlei Zeichen, und das erste Glied hat, wie hier stets vorausgesetzt wird, das Zeichen $+$, so muß jeder noch so kleine positive Werth für x gesetzt, für die Summe aller Glieder eine positive Größe geben.

II. Hat die Gleichung verschiedene Zeichen, und es ist Gx^{n-r} das erste negative Glied und N der größte negative Koeffizient, so muß offenbar die Summe aller Glieder positiv werden, wenn

$$x^n > N(x^{n-r} + x^{n-r-1} + x^{n-r-2} + \ldots + x + 1),$$

oder, wegen §. 61. (*I*), wenn $x^n > N\frac{x^{n-r+1}-1}{x-1}$ oder auch $x^n > N\frac{x^{n-r+1}}{x-1}$ ist, woraus $x^r - x^{r-1} > N$ folgt. Es ist aber (§. 25.) $(x-1)^r > x^r - x^{r-1}$, also auch $(x-1)^r > N$ oder $x - 1 > \sqrt[r]{N}$. Wenn man daher

$$x = 1 + \sqrt[r]{N} = m$$

annimmt, so wird die Summe aller Glieder der Gleichung $Fx = o$ eine positive Größe seyn, wenn N den **größten** negativen Koeffizienten der Gleichung, positiv genommen, bedeutet, und unter r die Anzahl der positiven Glieder verstanden wird, welche dem **ersten** negativen Gliede vorangehen.

Weil von der Gleichung $Fx = o$ keine Wurzel $x = m$ werden kann, sondern alle positive Wurzeln kleiner als m seyn müssen, so ist

$$m = 1 + \sqrt[r]{N}$$

die Grenze der größten positiven Wurzel.

1. Beispiel. Für die Gleichung

$$x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = o$$

findet man $r = 2$ und $N = 29$, also $m = 1 + \sqrt{29}$ oder $m = 7$ ist die Grenze der größten positiven Wurzel.

Die größte positive Wurzel ist $= 4$.

2. Beispiel. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = o$ giebt $r = 1$ und $N = 50$, also $m = 1 + 50 = 51$, daher wird hienach die Grenze der größten positiven Wurzel $= 51$, obgleich die größte positive Wurzel nur $= 4$ ist.

§. 98.

Zusatz. Das letzte Beispiel zeigt, daß die Grenze der größten positiven Wurzel einer Gleichung noch sehr weit von derselben selbst entfernt seyn kann, wenn man diese Grenze nach dem vorstehenden Verfahren aufsucht.

Engere Grenzen lassen sich in vielen Fällen dann angeben, wenn man im Stande ist, die gegebene Gleichung in solche Theile zu zerlegen, welche aus zwei Faktoren bestehen, wovon der erste positiv und eintheilig, der zweite aber zweitheilig, zuerst x oder eine Potenz von x, und dann eine von x unabhängige Zahl mit dem Zeichen $-$ hat. Läßt sich das letzte Glied nicht zu einem zweitheiligen Faktor verbinden, so muß dasselbe positiv seyn, wenn dies Verfahren Anwendung finden soll.

1. Beispiel. Die Grenze der größten positiven Wurzel der Gleichung

$$x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = o$$

zu finden, verwandle man solche in folgende

$$x^2(x^2 - 29) + x(x^2 - 9) + 180 = o,$$

so giebt $x^2 = 29$ den größten positiven Werth für x, wenn solcher aus den Gliedern in den Parenthesen bestimmt wird, daher muß offenbar der Werth dieser Gleichung positiv werden, wenn

$x^2 = 29$, also $x = \sqrt{29}$ oder $= 6$ wird; daher ist 6 die Grenze der größten positiven Wurzel, wofür man im vorigen §. die Zahl 7 fand.

2. **Beispiel.** Für die Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0 \text{ findet man}$$

$$x^3 (x - 10) + 35x (x - \tfrac{50}{35}) + 24 = 0.$$

Nun giebt $x = 10$ den größten positiven Werth für x, daher ist 10 die Grenze der größten positiven Wurzel, statt daß solche nach dem vorigen §. $= 51$ war.

3. **Beispiel.** Für die Gleichung

$$x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 49x^2 + 52x - 13 = 0 \text{ findet man}$$

$$x^2 (x^3 - 49) + 7x^3 (x - \tfrac{12}{7}) + 52 (x - \tfrac{13}{52}) = 0,$$

also giebt $x^3 = 49$ oder $x = \sqrt[3]{49}$, also $x = 4$ die Grenze der größten positiven Wurzel.

Das vorstehende Verfahren findet keine Anwendung, wenn die Gleichung mehr negative als positive Glieder hat, oder wenn sich keine positive Glieder mit höhern Potenzen von x, mit negativen Gliedern niedrigerer Potenzen verbinden lassen. So ist z. B. dies Verfahren auf Gleichungen, von der Form

$$x^5 - Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 + Dx - E = 0$$

nicht anwendbar.

§. 99.

In jeder Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

kann man x einen solchen Werth geben, daß die Summe aller Glieder negativ wird.

Denn man setze in der vorstehenden Gleichung $-y$ statt x, so wird solche (§. 91.)

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - \ldots \mp Py \pm Q = 0.$$

Ist nun M der größte negative Koeffizient dieser verwandelten Gleichung, so wird (§. 97.) für die Grenze der größten positiven Wurzel derselben

$$y = m' = 1 + \sqrt[r]{M}.$$

Weil aber die größte positive Wurzel der verwandelten Gleichung, mit der größten negativen Wurzel der gegebenen Gleichung einerlei ist (§. 91.), so darf man nur die vorstehenden Zeichen umkehren, und es wird alsdann

$$x = -m' = -1 - \sqrt[r]{M}$$

die Grenze der größten negativen Wurzel der gegebenen Gleichung $Fx = 0$, also erhält dadurch x einen solchen Werth, für welchen die Summe aller Glieder eine negative Zahl ist.

Beispiel. Die Grenzen der größten negativen Wurzel der gegebenen Gleichung $x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = 0$ zu finden, verwandle man solche nach §. 91. in $x^4 - x^3 - 29x^2 + 9x + 180 = 0$, so ist die Grenze der größten positiven Wurzel dieser Gleichung (§. 97.)

$$m' = 1 + 29 = 30,$$

also ist — 30 die Grenze der größten negativen Wurzel der gegebenen Gleichung. Die größte negative Wurzel ist = — 5.

§. 100.

1. Zusatz. In der Gleichung von einem geraden Grade deren letztes Glied negativ ist

$$Fx = x^{2n} + Ax^{2n-1} + \ldots + Px - Q = 0$$

setze man $x = 0$, und nach §. 97. $x = m$, so erhält man zwei Reste von entgegengesetzten Zeichen, also hat die Gleichung eine positive Wurzel (§. 95.). Nun setze man $-y$ statt x, so bleiben die Zeichen des ersten und letzten Gliedes ungeändert, also giebt die verwandelte Gleichung

$$y^{2n} - Ay^{2n-1} + \ldots - Py - Q = 0$$

ebenfalls eine positive Wurzel (§. 95.), daher muß die ursprüngliche Gleichung $Fx = 0$ auch eine negative Wurzel haben (§. 91.).

§. 101.

2. Zusatz. In der Gleichung von einem ungeraden Grade

$$x^{2n+1} + Ax^{2n} + \ldots + Px + Q = 0$$

sey das letzte Glied Q positiv. Setzt man nun $x = -y$, so wird die verwandelte Gleichung

$$y^{2n+1} - Ay^{2n} + \ldots + Py - Q = 0.$$

Für $y = 0$ und $y = m$ (§. 97.), erhält diese Gleichung eine positive Wurzel (§. 95.), daher muß die ursprüngliche Gleichung $Fx = 0$ eine negative Wurzel haben (§. 91).

Wäre hingegen das letzte Glied Q der gegebenen Gleichung negativ, so erhält man für $x = 0$ und $x = m$ (§. 97.) entgegengesetzte Werthe, also muß die gegebene Gleichung eine positive Wurzel haben (§. 97.).

Hieraus folgt, daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade wenigstens eine reelle Wurzel haben muß, deren Zeichen dem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist.

§. 102.

Von der Gleichung $Fx = x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Px + Q = 0$, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, sey a eine positive Wurzel, so muß diese Gleichung durch $x - a$ ohne Rest theilbar seyn (§. 77.), und man findet

$$\frac{Fx}{x-a} = x^{n-1} + A'x^{n-2} + \ldots + P' = 0 \quad [I];$$

wo nach §. 77. die Koeffizienten $A', B', \ldots P'$ ganze Zahlen seyn müssen, wenn $A, B, C, \ldots Q$ und $x - a$ ganze Zahlen sind. Für $x = 1$ wird

$$\frac{F1}{1-a} = 1 + A' + B' + \ldots + P'.$$

Dieser Quotient ist eine ganze Zahl, daher muß auch $\frac{F1}{1-a}$, oder ohne Rücksicht auf das Zeichen des Quotienten, $\frac{F1}{a-1}$ eine ganze Zahl seyn, wenn a eine positive Wurzel ist.

Setzt man -1 statt x in $[I]$, so muß ebenfalls $\frac{F(-1)}{-1-a}$, oder ohne Rücksicht auf das Zeichen des Quotienten, $\frac{F(-1)}{a+1}$ eine ganze Zahl seyn, wenn a eine positive Wurzel ist.

Es sey $-a$ eine negative Wurzel der Gleichung $Fx=0$, so muß dieselbe durch $x+a$ ohne Rest theilbar seyn, und man findet

$$\frac{Fx}{x+a} = x^{n-1} + A'x^{n-2} + \ldots + P' = 0.$$

Für $x=+1$ und $x=-1$ muß daher der Quotient eine ganze Zahl seyn, oder auch, es müssen die Quotienten $\frac{F1}{a+1}$ und $\frac{F(-1)}{a-1}$ ganze Zahlen seyn, wenn a eine negative Wurzel ist.

Hieraus folgt, daß, **wenn die Quotienten $\frac{F1}{a-1}$ und $\frac{F(-1)}{a+1}$ keine ganze Zahlen sind, so kann a keine positive Wurzel, und wenn $\frac{F1}{a+1}$ und $\frac{F(-1)}{a-1}$ keine ganze Zahlen sind, so kann a keine negative Wurzel der Gleichung $Fx=0$ seyn.**

Eben dies gilt, wenn auch nur einer dieser Quotienten keine ganze Zahl ist.

§. 103.

In jeder geordneten Gleichung, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, kann man, wenn eine ihrer Wurzeln a eine ganze Zahl ist, durch diese Wurzel a das letzte Glied dividiren, und dazu den nächst vorhergehenden Koeffizienten addiren; dann wieder diese Summe durch a dividiren und dazu den nächst vorhergehenden Koeffizienten addiren; dann wieder durch a dividiren und dazu den nächst vorhergehenden Koeffizienten addiren. So fortgefahren, bis man endlich den Koeffizienten des ersten Gliedes addirt hat, muß die zuletzt gefundene Summe $=0$ seyn.

Wird diese letzte Summe nicht $=0$, oder geht a in eine von den Summen ohne Rest nicht auf, so ist auch a keine Wurzel der gegebenen Gleichung. Dasselbe gilt, wenn einer dieser Koeffizienten ein Bruch wird.

Wäre die Gleichung

$$Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + Fx + G = 0$$

gegeben, so erhält man dem vorstehenden Verfahren gemäß, wenn a eine Wurzel in ganzen Zahlen ist,

$\frac{G}{a} + F$; durch a dividirt und E addirt

$\frac{G}{a^2} + \frac{F}{a} + E$; durch a dividirt und D addirt

$\frac{G}{a^3} + \frac{F}{a^2} + \frac{E}{a} + D$; durch a dividirt und C addirt

$\frac{G}{a^4} + \frac{F}{a^3} + \frac{E}{a^2} + \frac{D}{a} + C$; durch a dividirt und B addirt

$\frac{G}{a^5} + \frac{F}{a^4} + \frac{E}{a^3} + \frac{D}{a^2} + \frac{C}{a} + B$; endlich durch a dividirt, A addirt und die Summe $=0$ gesetzt giebt

$\frac{G}{a^6} + \frac{F}{a^5} + \frac{E}{a^4} + \frac{D}{a^3} + \frac{C}{a^2} + \frac{B}{a} + A = 0$, oder die Glieder in umgekehrter Ordnung geschrieben und mit a^6 multiplizirt, giebt

$$Aa^6 + Ba^5 + Ca^4 + Da^3 + Ea^2 + Fa + G = 0,$$

wie erfordert wird, wenn a eine Wurzel der vorstehenden Gleichung seyn soll (§. 76.).

Beispiel. Von der gegebenen Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

sey $a = 3$ eine Wurzel, so erhält man

$$\begin{array}{rl} \frac{24}{3} - 50 = & -42 \\ \frac{-42}{3} + 35 = & 21 \\ \frac{21}{3} - 10 = & -3 \\ \frac{-3}{3} - 1 = & 0, \end{array}$$

wie erfordert wird, wenn $a = 3$ eine Wurzel der vorstehenden Gleichung ist.

Wollte man versuchen ob 6 eine Wurzel dieser Gleichung ist, so erhält man

$$\begin{array}{rl} \frac{24}{6} - 50 = & -48 \\ \frac{-48}{6} + 35 = & 27 \\ \frac{27}{6} - 10 = & -5\tfrac{1}{2}; \end{array}$$

da nun 6 in 27 nicht ohne Rest aufgeht, so kann auch 6 keine Wurzel der vorstehenden Gleichung seyn.

§. 104.

Um zu übersehen, wie die Koeffizienten einer Gleichung von ihren Wurzeln abhängen, bezeichne man diese Wurzeln mit $a, b, c, d, e, \ldots\ldots$ welche aus bejahten und verneinten, rationalen und irrationalen, auch unmöglichen Zahlen bestehen mögen, so sind $x - a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$; $\ldots\ldots$ die Wurzelgleichungen, und man erhält durch die Multiplikation derselben:

$$(x-a)(x-b) = x^2 \begin{array}{l|} -a \\ -b \end{array}\, x + ab = 0$$

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 \begin{array}{l|} -a \\ -b \\ -c \end{array}\, x^2 \begin{array}{l|} +ab \\ +ac \\ +bc \end{array}\, x - abc = 0$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 \begin{array}{l|} -a \\ -b \\ -c \\ -d \\ \\ \\ \end{array}\, x^3 \begin{array}{l|} +ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{array}\, x^2 \begin{array}{l|} -abc \\ -abd \\ -acd \\ -bcd \\ \\ \\ \end{array}\, x + abcd = 0$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) = x^5 \begin{array}{r|l|l|l|l} -a & x^4 + ab & x^3 - abc & x^2 + abcd & x - abcde = 0 \\ -b & \;\;\;\;\; + ac & \;\;\;\;\; - abd & \;\;\;\;\; + abce & \\ -c & \;\;\;\;\; + ad & \;\;\;\;\; - abe & \;\;\;\;\; + abde & \\ -d & \;\;\;\;\; + ae & \;\;\;\;\; - acd & \;\;\;\;\; + acde & \\ -e & \;\;\;\;\; + bc & \;\;\;\;\; - ace & \;\;\;\;\; + bcde & \\ & \;\;\;\;\; + bd & \;\;\;\;\; - ade & & \\ & \;\;\;\;\; + be & \;\;\;\;\; - bcd & & \\ & \;\;\;\;\; + cd & \;\;\;\;\; - bce & & \\ & \;\;\;\;\; + ce & \;\;\;\;\; - bde & & \\ & \;\;\;\;\; + de & \;\;\;\;\; - cde & & \end{array}$$

u. s. w.

Geht man auf diese Art weiter, so folgt hieraus, daß in jeder vollständigen Gleichung:

(*I*) der Koeffizient des zweiten Gliedes, der Summe aller Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen gleich ist.

(*II*) Der Koeffizient des dritten Gliedes ist die Summe von den Producten jeder zwei Wurzeln, mit unveränderten Zeichen; u. s. w. Endlich

(*III*) ist das letzte Glied dem Produkt aller Wurzeln gleich mit ihrem Zeichen, wenn der Grad der Gleichung gerade, mit entgegengesetzten Zeichen, wenn er ungerade ist.

Hätte man nun für die n Wurzeln $a, b, c, \ldots . p, q$ die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots . \mp Px \pm Q = 0$$

gefunden, wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten, und es wäre auch bei dieser Gleichung die oben angeführte Eigenschaft der Koeffizienten vorhanden, so erhält man, wenn diese Gleichung mit der Wurzelgleichung $x - r = 0$ multiplizirt wird:

$$x^{n+1} \begin{array}{r|l|l|l} -A & x^n + B & x^{n-1} - \ldots . \pm Q & x \mp rQ = 0. \\ -r & \;\;\;\;\; + rA & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \pm rP & \end{array}$$

Wenn daher die oben angeführten Eigenschaften der Koeffizienten für eine Gleichung vom $n$ten Grade gelten, so gelten sie auch für eine Gleichung vom $n+1$sten Grade. Nun sind solche für den 2ten bis 5ten Grad wahr, daher auch für den $5+1=6$ten, also auch für den 7ten, 8ten, 9ten u. s. w.

Aus den vorstehenden Entwickelungen erhält man noch folgenden Satz:

(*IV*) Der Koeffizient des vorletzten Gliedes einer jeden Gleichung ist der Summe der Quotienten gleich, welche entstehen, wenn man das letzte Glied, mit entgegengesetztem Zeichen, nach einander durch alle Wurzeln der Gleichung dividirt.

Wären $a, b, c, d, \ldots . q$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots . + Px + Q = 0,$$

so erhält man das vorletzte Glied oder

$$P = -\left(\frac{Q}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{Q}{c} + \ldots . + \frac{Q}{q}\right).$$

Wie der Koeffizient eines jeden Gliedes leicht gefunden werden kann, s. m. §. 779. (*III*).

§. 105.

Zusatz. Die vorstehenden Entwickelungen setzen voraus, daß jede Gleichung vom $n$ten Grade

$$(I)\quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots + Px + Q = 0$$

nothwendig n Wurzeln haben muß, welches aber bisher noch nicht bewiesen ist, sondern nur (§. 79.), daß eine Gleichung vom $n$ten Grade nicht mehr als n Wurzeln haben kann. Allein es läßt sich die Frage aufwerfen, ob es nicht Gleichungen, wie die vorstehende, giebt, die gar keine Wurzeln haben, oder für welche unter allen reellen und imaginären Zahlen keine gefunden werden kann, welche statt x gesetzt, die algebraische Summe aller Glieder in Null verwandelt.

Es sey daher die Gleichung (I) eine solche, von der behauptet wird, daß sie keine Wurzeln habe. Nimmt man nun n unbekannte Werthe $a, b, c, \ldots\ldots p, q$ an, deren nähere Bestimmung noch vorbehalten bleibt, so kann man hieraus das Produkt

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-p)\,(x-q)$$

bilden. Durch Multiplikation dieser Faktoren in einander, erhält man alsdann einen Ausdruck von der Form:

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots\ldots + P'x + Q',$$

und wenn man diesen $= 0$ setzt, so entsteht die Gleichung

$$(II)\quad x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots\ldots + P'x + Q' = 0,$$

deren n Wurzeln offenbar die n unbekannten Größen $a, b, c, \ldots\ldots q$ sind. Die n Koeffizienten $A', B', \ldots\ldots Q'$ dieser Gleichung, sind aus den unbekannten Größen $a, b, c, \ldots\ldots q$ zusammengesetzt, wogegen die n Koeffizienten $A, B, C, \ldots\ldots Q$ der Gleichung (I) gegebene oder bekannte Größen sind. Weil nun $a, b, c, \ldots\ldots q$ noch näher zu bestimmende Größen bedeuten, so kann man zur Bestimmung derselben $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$; $\ldots\ldots Q = Q'$ setzen, wodurch eben so viel Gleichungen entstehen als unbekannte Größen $a, b, c, \ldots\ldots q$ vorhanden sind. Es muß daher n Werthe $a, b, c, \ldots\ldots q$ geben, welche diesen n Gleichungen entsprechen, und man kann sich daher diese n Werthe auf irgend eine Weise durch bekannte Größen ausgedrückt vorstellen, welche theils aus reellen theils imaginären Größen bestehen können. Hienach lassen sich die n Wurzeln der Gleichung (II) als bekannte, durch die Koeffizienten $A, B, C, \ldots\ldots Q$ bestimmte, Größen ansehen; daher müssen auch, wegen $A = A'$; $B = B'$; $\ldots\ldots Q = Q'$, die n Größen $a, b, c, \ldots\ldots q$, Wurzeln der Gleichung (I) seyn, oder diese Gleichung muß n Wurzeln haben. Weil sich dies von jeder andern Gleichung des $n$ten Grades eben so beweisen läßt, so folgt allgemein, daß jede Gleichung des $n$ten Grades, nothwendig n Wurzeln haben muß.

Ganz allgemeine Beweise dieses Satzes findet man in

Legendre, Essai sur la théorie des nombres, Paris 1798. *I. Partie*; §. *XIV.*

Gauss, Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii 1799.

Cauchy, Cours d'analyse; Paris, 1821. *I. Partie. Chap. X.* §. 1.

§. 106.

Aufgabe. Die Summe von den gleichen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sey

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0,$$

und $a, b, c, d, \ldots q$ ihre n Wurzeln, so wird nach §. 78.

$$Fx = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-q).$$

Nun setze man um die Summe der verschiedenen Potenzen der Wurzeln auszudrücken

$S_1 = a + b + c + d + \ldots + q$

$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots + q^2$, und überhaupt

$S_n = a^n + b^n + c^n + d^n + \ldots + q^n$, so wird

$S_0 = a^0 + b^0 + \ldots + q^0$, oder weil n Wurzeln sind und $a^0 = 1$ ist

$S_0 = n.$

In den Ausdrücken für Fx werde $y + x$ statt x gesetzt, so erhält man

$$(y+x)^n + A(y+x)^{n-1} + \ldots + P(y+x) + Q = (y+x-a)(y+x-b)(y+x-c)\ldots(y+x-q) = 0,$$

oder nach §. 83., wenn dort $h = x$ gesetzt wird

$$fy = y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + \ldots + P'y + Q' = (y+x-a)(y+x-b)(y+x-c)\ldots(y+x-q) = 0,$$

und es ist alsdann §. 83.

$$Q' = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q. \quad [I]$$

$$P' = nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + \ldots + P. \quad [II]$$

Nun sind (§. 77.) $a-x,\ b-x, \ldots q-x$, die Wurzeln der Gleichung $fy = 0$, daher wird nach §. 104. (IV).

$$P' = -\left(\frac{Q'}{a-x} + \frac{Q'}{b-x} + \frac{Q'}{c-x} + \ldots + \frac{Q'}{q-x}\right), \text{ oder}$$

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \ldots + \frac{1}{x-q}.$$

Nach §. 59. ist aber

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \frac{a^3}{x^4} + \ldots$$

$$\frac{1}{x-b} = \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} + \frac{b^3}{x^4} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{x-q} = \frac{1}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{q^2}{x^3} + \frac{q^3}{x^4} + \ldots$$

daher wenn man die unter einander stehenden Glieder addirt

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} + \ldots \text{ oder}$$

$$P' = Q'\left(\frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} + \ldots\right).$$

Für P' und Q' die Werthe nach [II] und [I] gesetzt, und die angedeutete Multiplikation verrichtet, giebt

$$\begin{array}{l|l|l|l} n x^{n-1} + (n-1) A x^{n-2} + (n-2) B x^{n-3} + (n-3) C x^{n-4} + \ldots & & & \\ = n x^{n-1} + nA & x^{n-2} + nB & x^{n-3} + nC & x^{n-4} + \ldots \text{ daher §. 52.} \\ \quad + S_1 & \quad + S_1 A & \quad + S_1 B & \\ & \quad + S_2 & \quad + S_2 A & \\ & & \quad + S_3 & \end{array}$$

$$n = n$$
$$(n-1) A = nA + S_1$$
$$(n-2) B = nB + S_1 A + S_2$$

. . . . daher auch, und wegen $S_0 = n$

$$(I) \begin{cases} o = S_0 - n \\ o = S_1 + A \\ o = S_2 + AS_1 + 2B \\ o = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C \\ o = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D \\ \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Zur Bildung eines allgemeinen Ausdrucks für S_m, wenn m jede beliebige Zahl bedeutet, werde $Fx = o$ mit x^r multiplizirt, dies giebt

$$x^{n+r} + Ax^{n+r-1} + Bx^{n+r-2} + \ldots + Px^{r+1} + Qx^r = o.$$

Hierin die Wurzeln $a, b, c, \ldots q$ statt x gesetzt, giebt

$$a^{n+r} + Aa^{n+r-1} + Ba^{n+r-2} + \ldots + Pa^{r+1} + Qa^r = o$$
$$b^{n+r} + Ab^{n+r-1} + Bb^{n+r-2} + \ldots + Pb^{r+1} + Qb^r = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q^{n+r} + Aq^{n+r-1} + Bq^{n+r-2} + \ldots + Pq^{r+1} + Qq^r = o,$$

oder nach der angenommenen Bezeichnung, wenn die unter einander stehenden Glieder addirt werden:

$$(II)\ o = S_{n+r} + AS_{n+r-1} + BS_{n+r-2} + \ldots + PS_{r+1} + QS_r.$$

Hierin $r = o$ gesetzt, giebt wegen $S_0 = n$

$$(III)\ o = S_n + AS_{n-1} + BS_{n-2} + \ldots + PS_1 + nQ,$$

welcher Ausdruck auch aus (I) gefolgert werden konnte.

Entwickelt man die auf einander folgenden Summen der Potenzen, so wird:

$$S_0 = n$$
$$S_1 = -A$$
$$\tfrac{1}{2}S_2 = \tfrac{1}{2}A^2 - B$$
$$\tfrac{1}{3}S_3 = -\tfrac{1}{3}A^3 + AB - C$$
$$\tfrac{1}{4}S_4 = \tfrac{1}{4}A^4 - A^2B + AC + \tfrac{1}{2}B^2 - D$$
$$\tfrac{1}{5}S_5 = -\tfrac{1}{5}A^5 + A^3B - A^2C - AB^2 + AD + BC - E$$
$$\tfrac{1}{6}S_6 = \tfrac{1}{6}A^6 - A^4B + A^3C + \tfrac{3}{2}A^2B^2 - A^2D - 2ABC - \tfrac{1}{3}B^3 + AE + BD + \tfrac{1}{2}C^2 - F$$
$$\tfrac{1}{7}S_7 = -\tfrac{1}{7}A^7 + A^5B - A^4C - 2A^3B^2 + A^3D + 3A^2BC + AB^3 - A^2E - 2ABD - AC^2 - B^2C + AF + BE + CD - G$$
$$\tfrac{1}{8}S_8 = \tfrac{1}{8}A^8 - A^6B + A^5C + \tfrac{5}{2}A^4B^2 - A^4D - 4A^3BC - 2A^2B^3 + A^3E + 3A^2BD + \tfrac{3}{2}A^2C^2 + 3AB^2C - A^2F - 2ABE$$
$$- 2ACD + AG + \tfrac{1}{4}B^4 - B^2D - BC^2 + BF + CE + \tfrac{1}{2}D^2 - H.$$

u. s. w.

Die vorstehenden Sätze, welche das Verhalten der Koeffizienten einer Gleichung zu den Potenzen ihrer Wurzeln ausdrücken, sind nach ihrem Erfinder unter dem Namen der Newtonschen bekannt.

Beispiel. Für die Gleichung

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ wird

$A = -10,\ B = 35,\ C = -50,\ D = 24$, daher, weil

$S_1 = -A;\ S_2 = -AS_1 - 2B;\ S_3 = -AS_2 - BS_1 - 3C;$ u. s. w.

erhält man hienach

$$\begin{aligned}
S_1 &= 10 \\
S_2 &= 10S_1 - 2.35 = 100 - 70 = 30 \\
S_3 &= 10S_2 - 35S_1 + 3.50 = 300 - 350 + 150 = 100 \\
S_4 &= 10S_3 - 35S_2 + 50S_1 - 4.24 = 354 \\
S_5 &= 10S_4 - 35S_3 + 50S_2 - 24S_1 = 1300 \\
S_6 &= 10S_5 - 35S_4 + 50S_3 - 24S_2 = 4890 \\
S_7 &= 10S_6 - 35S_5 + 50S_4 - 24S_3 = 18700
\end{aligned}$$

u. s. w.

Ohne daher die Wurzeln der gegebenen Gleichung zu kennen, so weiß man doch, daß ihre Summe = o, die Summe ihrer Quadrate = 30, die Summe ihrer dritten Potenzen = 100, u. s. w. ist.

Es sind aber 1, 2, 3, 4 die Wurzeln der gegebenen Gleichung, und man erhält wie erfordert wird.

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + 4 &= 10 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 &= 30 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 \\
1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 &= 354 \\
1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 &= 1300
\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 107.

1. Zusatz. Die zuletzt gefundenen Ausdrücke für die Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung werden dadurch vereinfacht, wenn man voraussetzt, daß in der gegebenen Gleichung das zweite Glied fehlt. Wäre daher die Gleichung

$$x^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots + Px + Q = 0$$

gegeben, so findet man für die n Wurzeln derselben:

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = -2B$$
$$S_3 = -3C$$
$$S_4 = -BS_2 - 4D$$
$$S_5 = -BS_3 - CS_2 - 5E$$
$$S_6 = -BS_4 - CS_3 - DS_2 - 6F$$
$$S_7 = -BS_5 - CS_4 - DS_3 - ES_2 - 7G$$
$$S_8 = -BS_6 - CS_5 - DS_4 - ES_3 - FS_2 - 8H$$

u. s. w., oder auch

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = -2B$$
$$S_3 = -3C$$
$$S_4 = 2B^2 - 4D$$
$$S_5 = 5BC - 5E$$
$$S_6 = -2B^3 + 6BD + 3C^2 - 6F$$
$$S_7 = -7B^2C + 7BE + 7CD - 7G$$
$$S_8 = 2B^4 - 8B^2D - 8BC^2 + 8BF + 8CE + 4D^2 - 8H$$
$$S_9 = -9B^3C - 9B^2E - 18BCD + 9BG - 3C^3 + 9CF + 9DE - 9I$$
$$S_{10} = -2B^5 + 10B^3D + 15B^2C^2 - 10B^2F - 20BCE - 10BD^2 - 10C^2D + 10BH + 10CG + 10DF + 5E^2 - 10K$$

u. s. w.

Beispiel. Für die Gleichung
$x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$ findet man $B = -10$, $C = -4$, $D = 8$, also

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = 2.10 = 20$$
$$S_3 = 3.4 = 12$$
$$S_4 = 10S_2 - 4.8 = 200 - 32 = 168$$
$$S_5 = 10S_3 + 4S_2 = 120 + 80 = 200$$
$$S_6 = 10S_4 + 4S_3 - 8S_2 = 1680 + 48 - 160 = 1568$$
$$S_7 = 10S_5 + 4S_4 - 8S_3 = 2000 + 672 - 96 = 2576$$
$$S_8 = 10S_6 + 4S_5 - 8S_4 = 15680 + 800 - 1344 = 15136$$

u. s. w.

§. 107. *a.*

2. **Zusatz.** Wären von der Gleichung

$$u^m + A'u^{m-1} + B'u^{m-2} + \ldots + P'u + Q' = 0$$

die m Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \mu$ gegeben, und man setzt

$$S'_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \ldots + \mu^n,$$

so erhält man, wenn die Potenzen der gegebenen Wurzeln als bekannt angenommen, und daraus die Koeffizienten $A', B', C', \ldots\ldots Q'$ nach (I) gesucht werden,

$$A' = -S'_1$$

$$B' = -\frac{S'_2 + A'S'_1}{2}$$

$$C' = -\frac{S'_3 + A'S'_2 + B'S'_1}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q' = -\frac{S'_m + A'S'_{m-1} + B'S'_{m-2} + \cdots + P'S'_1}{m}.$$

§. 108.

Aufgabe. Aus der gegebenen Gleichung $Fx = 0$ eine andere $fu = 0$ zu bilden, deren Wurzeln die Quadrate von den Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Auflösung. Die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$Fx = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

bezeichne man mit $a, b, c, d \ldots . q$.

Um nun die Wurzeln der Gleichung $fu = 0$ für die Quadrate der Differenzen zu erhalten, ziehe man von jeder der gegebenen n Wurzeln $a, b, c \ldots q$ die übrigen $n - 1$ ab und erhebe solche zur zweiten Potenz, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} (a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-d)^2,\ \ldots\ldots\ (a-q)^2 \\ (b-a)^2,\ (b-c)^2,\ (b-d)^2,\ \ldots\ldots\ (b-q)^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (q-a)^2,\ (q-b)^2,\ (q-c)^2,\ \ldots\ldots\ (q-p)^2 \end{array}\right\} [I].$$

Die Anzahl dieser Wurzeln ist daher $= n(n-1)$. Weil aber jede derselben zweimal vorkommt, nemlich

$$(a-b)^2 = (b-a)^2;\ (a-c)^2 = (c-a)^2;\ \ldots.\ (a-q)^2 = (q-a)^2,$$

so ist die Anzahl aller Wurzeln für die Quadrate der Differenzen $= \frac{n(n-1)}{2}$, und von eben diesem Grade muß die Gleichung $fu = 0$ seyn, weil sie eben so viel Wurzeln enthalten muß. Man setze daher $m = \frac{n(n-1)}{2}$, so ist die gesuchte Gleichung, deren Koeffizienten noch zu bestimmen bleiben

$$fu = u^m + A'u^{m-1} + B'u^{m-2} + \ldots . + P'u + Q' = 0,$$

und die m Wurzeln derselben sind

$(a-b)^2;\ (a-c)^2;\ (a-d)^2;\ \ldots\ldots\ (b-c)^2;\ (b-d)^2;\ (b-e)^2;\ \ldots\ldots$
$(c-d)^2;\ (c-e)^2;\ \ldots\ldots$ u. s. w.

Setzt man nun

$$S'_1 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + \ldots\ldots + (p-q)^2 \text{ und überhaupt}$$
$$S'_r = (a-b)^{2r} + (a-c)^{2r} + \ldots\ldots + (p-q)^{2r} \quad [II],$$

so wird (§. 107.)

$$A' = -S'_1$$
$$B' = -\frac{S'_2 + A'S'_1}{2}$$
$$C' = -\frac{S'_3 + A'S'_2 + B'S'_1}{3}$$
u. s. w.

Ferner setze man wie bisher
$$S_n = a^n + b^n + c^n + \ldots + q^n,$$
so erhält man, wenn im nachstehenden Ausdruck die Binomien aufgelöst (§. 25.) und die Glieder nach den Potenzen von x geordnet werden:
$$\begin{aligned}(x-a)^{2r} + (x-b)^{2r} + (x-c)^{2r} + \ldots + (x-q)^{2r} = nx^{2r} &- (2r)\,(a + b + c + \ldots + q)\,x^{2r-1} \\ &+ (2r)_2\,(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + q^2)\,x^{2r-2} \\ &- (2r)_3\,(a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + q^3)\,x^{2r-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \quad (a^{2r} + b^{2r} + c^{2r} + \ldots + q^{2r}),\end{aligned}$$
oder nach der angenommenen Bezeichnung
$$(x-a)^{2r} + (x-b)^{2r} + (x-c)^{2r} + \ldots + (x-q)^{2r} = nx^{2r} - (2r)S_1x^{2r-1} + (2r)_2S_2x^{2r-2} - (2r)_3S_3x^{2r-3} + \ldots + S_{2r}.$$
Hierin nach einander $a, b, c \ldots q$ statt x gesetzt und die entstandenen Ausdrücke zusammen addirt, giebt:
$$\left\{\begin{array}{l}(a-b)^{2r} + (a-c)^{2r} + (a-d)^{2r} + \ldots + (a-q)^{2r} \\ + (b-a)^{2r} + (b-c)^{2r} + (b-d)^{2r} + \ldots + (b-q)^{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (q-a)^{2r} + (q-b)^{2r} + (q-c)^{2r} + \ldots + (q-p)^{2r}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}+ \quad n\,(a^{2r} + b^{2r} + \ldots + q^{2r}) \\ -(2r)\,S_1(a^{2r-1} + b^{2r-1} + \ldots + q^{2r-1}) \\ +(2r)_2S_2(a^{2r-2} + b^{2r-2} + \ldots + q^{2r-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \quad S_{2r}\,(a^0 + b^0 + \ldots + q^0)\end{array}\right\}$$

Für den ersten Theil dieser Gleichung erhält man nach [I] und [II], und für den zweiten Theil nach der angenommenen Bezeichnung:
$$2S'_r = nS_{2r} - (2r)S_1S_{2r-1} + (2r)_2S_2S_{2r-2} - \ldots + S_{2r}S_0;$$
oder weil $S_0 = n$ ist
$$\begin{aligned}2S'_r = nS_{2r} - (2r)S_1S_{2r-1} + (2r)_2S_2S_{2r-2} - (2r)_3S_3S_{2r-3} + \ldots \pm (2r)_rS_rS_r \mp \ldots\ldots \\ \ldots + (2r)_2S_{2r-2}S_2 - (2r)S_{2r-1}S_1 + nS_{2r},\end{aligned}$$
wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades r gelten. Hienach erhält man auch
$$2S'_r = 2nS_{2r} - 2(2r)S_1S_{2r-1} + 2(2r)_2S_2S_{2r-2} - \ldots \pm (2r)_rS_rS_r, \text{ folglich}$$
$$(I)\quad S'_r = nS_{2r} - (2r)S_1S_{2r-1} + (2r)_2S_2S_{2r-2} - (2r)_3S_3S_{2r-3} + \ldots \pm \tfrac{1}{2}(2r)_rS_rS_r.$$

Für $r = 1, 2, 3, \ldots$ wird
$$S'_1 = nS_2 - S_1S_1$$
$$S'_2 = nS_4 - 4_1S_1S_3 + \tfrac{1}{2}.4_2S_2S_2$$
$$S'_3 = nS_6 - 6_1S_1S_5 + 6_2S_2S_4 - \tfrac{1}{2}.6_3S_3S_3$$
u. s. w., oder auch

$$S'_1 = nS_2 - S_1 S_1$$
$$S'_2 = nS_4 - 4S_1 S_3 + 3S_2 S_2$$
$$S'_3 = nS_6 - 6S_1 S_5 + 15S_2 S_4 - 10S_3 S_3$$
$$S'_4 = nS_8 - 8S_1 S_7 + 28S_2 S_6 - 56S_3 S_5 + 35S_4 S_4$$
u. s. w.

Hieraus lassen sich nun die Koeffizienten A', B', C', ... Q' der Gleichung $fu = 0$ finden, da die Werthe S_1, S_2, S_3 .... nach §. 105. aus den gegebenen Koeffizienten gefunden werden, ohne daß die Wurzeln der gegebenen Gleichung $Fx = 0$ bekannt sind.

Beispiel. Für die gegebene Gleichung
$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$$
wird hier $n = 3$ also $m = \frac{3.2}{2} = 3$, $A = 2$, $B = -13$, $C = 10$, daher §. 106.
$S_1 = -2$; $S_2 = 30$; $S_3 = -116$; $S_4 = 642$; $S_5 = -3092$; $S_6 = 15690$. Ferner erhält man hieraus
$$S'_1 = 3.\ \ 30 - 2.2 = 86$$
$$S'_2 = 3.\ \ 642 - 4.2.\ 116 + 3.30.\ 30 = 3698$$
$$S'_3 = 3.15690 - 6.2.3092 + 15.30.642 - 10.116.116 = 164306,$$
daher wird
$$A' = -86$$
$$B' = -\tfrac{1}{2}(3698 - 86.86) = 1849$$
$$C' = -\tfrac{1}{3}(164306 - 86.3698 + 1849.86) = -1764, \text{ folglich}$$
$$u^3 - 86u^2 + 1849u - 1764 = 0.$$

Zur Erläuterung kann man noch bemerken, daß die Wurzeln der gegebenen Gleichung, $+1$; $+2$ und -5 sind, daher erhält man die Quadrate von den Differenzen dieser Wurzeln $(1 - 2)^2 = 1$; $(1 + 5)^2 = 36$; $(2 + 5)^2 = 49$ und es sind 1; 36; 49 die Wurzeln der gefundenen Gleichung, wie erfordert wird.

Auf ähnliche Weise verfährt man für Gleichungen von noch höhern Graden.

Das vorstehende Beispiel, da die gegebene Gleichung nur vom dritten Grade ist, hätte leichter nach §. 110. berechnet werden können.

§. 109.

Zusatz. Unter der Voraussetzung, daß in der gegebenen Gleichung das zweite Glied fehlt, sey
$$x^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots + Px + Q = 0$$
die gegebene Gleichung, und wenn man $m = \frac{n(n-1)}{2}$ setzt, so sey
$$u^m + A'u^{m-1} + B'u^{m-2} + \ldots\ldots + P'u + Q' = 0$$
die gesuchte Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen der Quadrate der gegebenen Gleichung sind. Hienach erhält man, wegen $S_1 = 0$ (§. 107.)

$$S'_1 = n S_2$$
$$S'_2 = n S_4 + 3 S_2 S_2$$
$$S'_3 = n S_6 + 15 S_2 S_4 - 10 S_3 S_3$$
$$S'_4 = n S_8 + 28 S_2 S_6 - 56 S_3 S_5 + 35 S_4 S_4$$
$$S'_5 = n S_{10} + 45 S_2 S_8 - 120 S_3 S_7 + 210 S_4 S_6 - 126 S_5 S_5$$
$$S'_6 = n S_{12} + 66 S_2 S_{10} - 220 S_3 S_9 + 495 S_4 S_8 - 792 S_5 S_7 + 462 S_6 S_6$$

u. s. w.

Hierin die entsprechenden Werthe nach §. 107. gesetzt, giebt

$$S'_1 = -2nB.$$
$$S'_2 = 2(n+6)B^2 - 4nD.$$
$$S'_3 = -2(n+30)B^3 + 6(n+20)BD - 3(30-n)C^2 - 6nF.$$
$$S'_4 = 2(n+126)B^4 - 8(n+112)B^2D + 8(84-n)BC^2 + 4(2n+3)BF - 8(105-n)CE + 4(n+140)D^2 - 8nH.$$

u. s. w.

Nun ist ferner

$$A' = -S'_1$$
$$B' = -\frac{S'_2 + A'S'_1}{2}$$
$$C' = -\frac{S'_3 + A'S'_2 + B'S'_1}{3}$$
$$D' = -\frac{S'_4 + A'S'_3 + B'S'_2 + C'S'_1}{4}$$

u. s. w.

Setzt man hierin die gefundenen Werthe, so wird

$$A' = 2nB$$
$$B' = (2n^2 - n - 6)B^2 + 2nD$$
$$C' = \tfrac{2}{3}(2n^3 - 3n^2 - 17n + 30)B^3 + 2(2n^2 - n - 20)BD + (30-n)C^2 + 2nF$$

u. s. w.

§. 110.

Aufgabe. Die Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

in eine solche zu verwandeln, deren Wurzeln die Quadrate von den Differenzen der gegebenen Gleichung sind.

Auflösung. Hier wird $n = 3$ also $m = \frac{3.2}{2} = 3$, daher ist

$$u^3 + A'u^2 + B'u + C' = 0$$

die gesuchte Gleichung. Die Koeffizienten A'; B'; C' zu bestimmen, entwickele man nach §. 106. die Werthe S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6, bestimme hieraus nach §. 108. die Werthe S'_1; S'_2; S'_3; so findet man hienach, wegen $A' = -S'_1$; $B' = -\frac{1}{2}(S'_2 + A'S'_1)$; $C' = -\frac{1}{3}(S'_3 + A'S'_2 + B'S'_1)$ folgende Ausdrücke:

$$A' = -2\,(A^2 - 3B);$$
$$B' = (A^2 - 3B)^2;$$
$$C' = -\tfrac{4}{3}\,(A^2 - 3B)\,(B^2 - 3\,AC) + \tfrac{1}{3}\,(AB - 9C)^2.$$

Beispiel. Für die gegebene Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0 \text{ wird hier}$$

$A = 2$, $B = -13$, $C = 10$, daher
$A' = -86$, $B' = 1849$, $C' = -1764$, folglich

$$u^3 - 86u^2 + 1849u - 1764 = 0.$$

§. 111.

Zusatz. Fehlt das zweite Glied, so wird $A = 0$, und man erhält aus

$$x^3 + Bx + C = 0$$
$$u^3 + A'u^2 + B'u + C' = 0$$

$A' = 6B$; $B' = 9B^2$; $C' = 4B^3 + 27C^2$, daher auch

$$u^3 + 6Bu^2 + 9B^2u + (4B^3 + 27C^2) = 0.$$

1. **Beispiel.** Die gegebene Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

zu verwandeln, wird $B = -2$, $C = -5$, also

$$u^3 - 12u^2 + 36u + 643 = 0.$$

2. **Beispiel.** Für die Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

wird $B = -7$, $C = -7$, also

$$u^3 - 42u^2 + 441u - 49 = 0.$$

§. 112.

Aufgabe. Die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

in eine solche zu verwandeln, deren Wurzeln die Quadrate von den Differenzen der gegebenen Gleichung sind.

Auflösung. Hier wird $n = 4$ also $m = \frac{4.3}{2} = 6$, daher ist die gesuchte Gleichung

$$u^6 + A'u^5 + B'u^4 + C'u^3 + D'u^2 + E'u + F' = 0.$$

Durch ein ähnliches Verfahren, wie §. 109., erhält man nach §. 107 und 108. die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A' &= 8B \\
B' &= 22B^2 + 8D \\
C' &= 18B^3 - 16BD - 26C^2 \\
D' &= 17B^4 + 24B^2D + 48BC^2 - 112D^2 \\
E' &= 4B^5 + 32B^3D + 54B^2C^2 - 192BD^2 + 216C^2D \\
F' &= 16B^4D - 4B^3C^2 - 128B^2D^2 + 144BC^2D - 27C^4 + 256D^3.
\end{aligned}$$

Aus der Weitläufigkeit dieser Ausdrücke übersieht man die Schwierigkeiten welche entstehen, wenn man diese Koeffizienten für Gleichungen von noch höheren Graden allgemein darstellen will.

§. 113.

Um ein Kennzeichen zu erhalten, ob in einer gegebenen Gleichung gleiche Wurzeln vorhanden seyn können, bemerke man, daß wenn in der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ox^2 + Px + Q = 0,$$

die n verschiedenen Wurzeln $a, b, c \ldots q$ sind, und man multiplizirt diese Gleichung mit $x - r = 0$, so entsteht eine neue Gleichung

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} x^{n+1} - r & x^n - rA & x^{n-1} - \ldots - rN & x^3 - rO & x^2 - rP & x - rQ = 0, \\ +A & + B & + O & + P & + Q & \end{array}$$

von welcher r eine Wurzel ist. Diese Gleichung wieder mit $x - r$ multiplizirt, giebt

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} x^{n+2} - 2r & x^{n+1} + r^2 & x^n + \ldots + r^2 N & x^3 + r^2 O & x^2 + r^2 P & x + r^2 Q = 0, \\ +A & -2rA & -2rO & -2rP & -2rQ & \\ & + B & + P & + Q & & \end{array}$$

und diese Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, $x = r$. Hier wieder mit $x - r$ multiplizirt, giebt

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} x^{n+3} - 3r & x^{n+2} + \ldots - r^3 N & x^3 - r^3 O & x^2 - r^3 P & x - r^3 Q = 0, \\ + A & + 3r^2 O & + 3r^2 P & + 3r^2 Q & \\ & - 3r P & - 3r Q & & \\ & + Q & & & \end{array}$$

und diese Gleichung hat drei gleiche Wurzeln, $x = r$. Hier ferner mit $x - r$ multiplizirt, giebt

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} x^{n+4} - 4r & x^{n+2} + \ldots + r^4 M & x^4 + r^4 N & x^3 + r^4 O & x^2 + r^4 P & x + r^4 Q = 0, \\ + A & -4r^3 N & -4r^3 O & -4r^3 P & -4r^3 Q & \\ & +6r^2 O & +6r^2 P & +6r^2 Q & & \\ & -4r P & - r Q & & & \\ & + Q & & & & \end{array}$$

und diese Gleichung hat vier gleiche Wurzeln, $x = r$.

Geht man auf diese Art weiter und untersucht die gemeinschaftlichen Faktoren der letzten Koeffizienten dieser Gleichungen, so findet man leicht:

I. Wenn eine Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so muß die zweite Potenz dieser Wurzel als Faktor im letzten Gliede, und die Wurzel selbst als Faktor im vorletzten Koeffizienten enthalten seyn.

II. Hat eine Gleichung drei gleiche Wurzeln, so muß die dritte Potenz dieser Wurzel als Faktor im letzten Gliede, die zweite Potenz als Faktor im vorletzten Koeffizienten und die Wurzel selbst als Faktor im nächst vorhergehenden Koeffizienten enthalten seyn.

III. Hat die Gleichung vier gleiche Wurzeln, so muß die vierte Potenz dieser Wurzel als Faktor im letzten Gliede, die dritte Potenz als Faktor im vorletzten Koeffizienten, die zweite

Po-

Potenz als Faktor im nächst vorhergehenden Koeffizienten und die Wurzel selbst in dem hienächst vorhergehenden enthalten seyn.

Aehnliche Regeln gelten von jeder noch so grossen Anzahl gleicher Wurzeln. Nur ist wohl zu bemerken, daß die angeführte Eigenschaft der letzten Koeffizienten einer Gleichung allemal erfordert wird, wenn in derselben gleiche Wurzeln vorhanden sind, daß aber nicht umgekehrt, wenn sich diese Eigenschaften finden, nothwendig gleiche Wurzeln vorhanden seyn dürfen.

§. 114.

Zusatz. Wie in jedem Falle die gleichen Wurzeln einer Gleichung gefunden werden können, s. m. §. 220. Auch kann das Verfahren §. 85. zum Auffinden der gleichen Wurzeln angewandt werden.

Wäre z. B. die Gleichung

$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$ gegeben, so erhält man hieraus nach §. 85. für die Koeffizienten von $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, ...

1	− 10	+ 36	− 54	+ 27
1	− 9	+ 27	− 27	+ 0
1	− 8	+ 19	− 8	
1	− 7	+ 12		
1	− 6	+ 12	− 8	+ 0
1	− 5	+ 7	− 1	− 1
1	− 4	+ 3	+ 2	
1	− 3	+ 0		
1	− 2	+ 0	+ 2	− 1
1	− 1	− 1	+ 1	+ 0
1	+ 0	− 1	+ 0	
1	+ 1	+ 0		
1	+ 2	+ 0	+ 0	+ 0
1	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3
1	+ 4	+ 7	+ 10	
1	+ 5	+ 12		
1	+ 6	+ 12	+ 10	+ 3

u. s. w.

Hienach wird

$$(x-1)^4 - 6(x-1)^3 + 12(x-1)^2 - 8(x-1) = 0$$
$$(x-2)^4 - 2(x-2)^3 + 2(x-2) - 1 = 0$$
$$(x-3)^4 + 2(x-3)^3 = 0$$
$$(x-4)^4 + 6(x-4)^3 + 12(x-4)^2 + 10(x-4) + 3 = 0.$$

Hieraus sieht man, daß $x - 1$ ein Faktor der Gleichung

$$(x-1)^4 - 6(x-1)^3 + 12(x-1)^2 - 8(x-1) = 0$$

ist, daher muß $x = 1$ eine Wurzel sowohl dieser als der gegebenen Gleichung seyn (§. 77.).

Ferner ist $(x-3)^3$ ein Faktor der Gleichung

$$(x-3)^4 + 2(x-3)^3 = 0,$$

daher ist $x = 3$ eine Wurzel dieser und der gegebenen Gleichung, welche hienach drei gleiche Wurzeln $x = 3$ hat.

§. 115.

Hat eine Gleichung, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, **unmögliche Wurzeln**, so müssen solche **paarweise** von folgender Form

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{und}$$
$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

vorhanden seyn, weil nur unter dieser Bedingung die Summe der Wurzeln, welche den Koeffizienten des zweiten Gliedes bilden, und das Produkt der Wurzeln, welches den Koeffizienten des letzten Gliedes bildet (§. 104), ganze Zahlen werden.

Für die Summe der Wurzeln findet man

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\alpha - \beta\sqrt{-1}) = 2\alpha,$$

und für das Produkt der Wurzeln

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}).(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \alpha^2 + \beta^2.$$

Hienach muß eine Gleichung von einem **ungeraden** Grade, **wenigstens eine reelle Wurzel** haben.

Bei einem **ungeraden Grade** müssen die reellen Wurzeln in **ungerader Anzahl** und bei einem **geraden** Grade in **gerader Anzahl** vorhanden seyn.

§. 116.

Haben die auf einander folgenden Glieder einer geordneten Gleichung einerlei Zeichen $+\,+$ oder $-\,-$, so heißt dies eine **Folge**, und wenn diese Zeichen verschieden sind, wie $+\,-$ oder $-\,+$, ein **Wechsel** der Zeichen.

Mit Beibehaltung dieser Benennung läßt sich beweisen, daß, wenn die Zahl der verneinten Wurzeln einer Gleichung um eine vermehrt wird, in der neuen Gleichung alsdann **wenigstens eine Folge** der Zeichen mehr entstehen muß, als sie vorher hatte.

So hat z. B. die Gleichung

$$Fx = x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 3x + 7 = 0$$

zwei Folgen, wenn man, wie erfordert wird, dem ersten Gliede das Zeichen $+$ giebt. Soll nun die negative Wurzel -2 eingeführt werden, so multiplizire man Fx mit der Wurzelgleichung $x + 2 = 0$. Die entsprechende Rechnung ist folgende:

[I]	$x^7 + 2$	$x^6 - 5$	$x^5 - 6$	$x^4 + 4$	$x^3 - 3$	$x^2 + 7$	x
[II]	$+ 2$	$+ 4$	$- 10$	$- 12$	$+ 8$	$- 6$	$+ 14$

[III] $x^7 + 4x^6 - x^5 - 16x^4 - 8x^3 + 5x^2 + x + 14 = 0$

Die gefundene Reihe *III* hat fünf Folgen, also wenigstens eine mehr als Fx.

An diesem Beispiele bemerkt man leicht, daß die Zeichen der Reihen *I* und *II* mit den Zeichen der Reihe Fx einerlei seyn müssen, daß die Zeichen der Reihe *III* mit *I* allemal übereinstimmen, wenn die über einander stehenden Zeichen der Reihen *I* und *II* einerlei sind, und daß nur dann eine Verschiedenheit zwischen den Zeichen der Reihe *I* und *III* möglich ist, wenn die übereinander stehenden Zeichen der Reihen *I* und *II* verschieden sind.

Wären daher, mit Hinweglassung der einzelnen Glieder, die Zeichen irgend einer geordneten Gleichung $Fx = 0$

$$[Fx] \; + + - - + - + + + + - +,$$

welche auch auf jede andere beliebige Weise gewählt werden können, so erhält man, wenn in Fx eine verneinte Wurzel $x = -r$ eingeführt, also Fx mit $x + r$ multiplizirt wird, folgende Zusammenstellung der Zeichen:

[*I*]	+	+	−	−	+	−	+	+	+	+	−	+	
[*II*]		+	+	−	−	+	−	+	+	+	+	−	+
[*III*]	+	+	*u*	−	*u*	*u*	*u*	+	+	+	*u*	*u*	+
													Q

In der Reihe *III*, welche aus *I* und *II* durch Addition entsteht, sind nur die Zeichen ungewiß welche mit *u* bezeichnet sind. Werden nun alle ungewisse Zeichen der Reihe *III* den darüber stehenden Zeichen der Reihe *I* gleich, so entsteht wegen des letzten Zeichens bei *Q*, in *III* gewiß eine Folge mehr als in *I*.

Wenn aber wegen der Ungleichheit der Koeffizienten, die Reihe *III* nicht eben so fortschreitet wie *I*, so muß ein Uebergang der Zeichen aus der Reihe *I* zu den unmittelbar darunter stehenden Zeichen der Reihe *II* entstehen, wodurch jedesmal die Folgen der Reihe *III* um eine Folge vermehrt werden; vorausgesetzt, daß alsdann die noch übrigen Zeichen der Reihe *II* unverändert in *III* übergehen. Entsteht hingegen ein Rückgang zu den Zeichen der Reihe *I*, so mag dieser die Folgen oder die Wechsel der Reihe *III* vermehren, es muß doch alsdann, wenigstens beim letzten Zeichen, wieder ein Uebergang aus *I* in *II* erfolgen. So viel dergleichen Uebergänge und Rückgänge auch entstehen mögen, so muß doch jedesmal die Zahl der Uebergänge, die Zahl der Rückgänge um einen übertreffen. Jeder Uebergang bewirkt aber in der Reihe *III* eine Vermehrung der Folgen um eine, daher muß die Reihe *III* wenigstens eine Folge mehr haben, als die Reihe *I*.

Wenn daher eine Gleichung $Fx = 0$ um eine verneinte Wurzel vermehrt wird, so muß die neu entstandene Gleichung wenigstens eine Folge der Zeichen mehr enthalten als die Gleichung $Fx = 0$. Hieraus folgt ferner, daß eine Gleichung nicht mehr negative Wurzeln haben kann, als sie Folgen der Zeichen enthält.

Hiedurch soll aber keinesweges behauptet werden, daß eine Gleichung eben so viel negative Wurzeln hat, als Folgen der Zeichen in derselben vorkommen, weil die Gleichung auch unmögliche Wurzeln haben kann, welche weder zu den positiven noch zu den negativen Wurzeln gezählt werden können.

§. 117.

Soll die Zahl der bejahten Wurzeln in der Gleichung $Fx = o$ um eine vermehrt werden, so sey $x = r$ diese Wurzel, also $x - r = o$ die Wurzelgleichung.

Verfährt man auf eine ähnliche Weise wie im vorigen §., und es sind mit Hinweglassung der einzelnen Glieder die Zeichen der Gleichung $Fx = o$

$$[Fx]\ + + - - + - + + + + - +,$$

so erhält man, wenn in $Fx = o$ die bejahte Wurzel $+ r$ eingeführt, also $Fx = o$ mit $x - r$ multiplizirt wird, folgende Zusammenstellung der Zeichen:

$$\begin{array}{ll} [I] & + + - - + - + + + + - + \\ [II] & \quad - - + + - + - - - - + - \\ \hline [III] & + u - u + - + u u u - + - \end{array}$$

In der Reihe *III* welche aus *I* und *II* durch Addition entsteht, sind nur die Zeichen ungewiß, welche mit *u* bezeichnet sind. Werden nun all: ungewisse Zeichen der Reihe *III* den Zeichen der Reihe *I* gleich, so entsteht in *III*, wegen des letzten Zeichens, gewiß ein Wechsel mehr als in *I*.

Ueberhaupt muß bei jedem Uebergang aus *I* in *II*, ein Wechsel der Zeichen in *III* erfolgen, daher lassen sich hier eben die Schlüsse für die Vermehrung der Wechsel, wie im vorigen §., für die Folgen anwenden.

Wenn daher eine Gleichung $Fx = o$ um eine bejahte Wurzel vermehrt wird, so muß die neu entstandene Gleichung **wenigstens** einen Wechsel mehr enthalten, als die vorstehende. Hieraus folgt ferner, daß eine Gleichung nicht mehr bejahte Wurzeln haben kann, als sie Wechsel der Zeichen enthält.

§. 118.

In einer Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln reel sind, müssen genau so viel positive Wurzeln als Wechsel, und so viel negative als Folgen der Zeichen enthalten seyn.

Denn es sey *b* die Anzahl der bejahten, und *v* die Anzahl der verneinten Wurzeln; ferner *B* die Anzahl der Wechsel und *V* die Anzahl der Folgen der Zeichen. Da sich nun in jeder Gleichung eben so viel Wurzeln befinden, als Wechsel und Folgen der Zeichen vorhanden sind, so ist

$$b + v = B + V.$$

Wollte man annehmen, daß $B > b$ wäre, so folgt daraus $V < v$, gegen §. 116. Es kann aber auch nicht $B < b$ seyn, wegen §. 117., daher ist $B = b$ und $V = v$.

So sind z. B. von der Gleichung:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = o;$$

die drei möglichen Wurzeln:

$$+ 1;\ + 2;\ + 5.$$

Von der Gleichung:

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = o;$$
$$- 1;\ - 2;\ - 5.$$

Von der Gleichung:

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = o;$$
$$+ 1; + 2; - 5;$$

und von der Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = o;$$
$$- 1; - 2; + 5;$$

wie erfordert wird, wenn man die Zeichen der Wurzeln, mit den Folgen und Wechseln der Gleichungen vergleicht.

Den vorstehenden Lehrsatz hat zuerst **Descartes** in seiner im Jahr 1637 erschienenen Geometrie (*Geometria à Renato des Cartes. Amstelodami*, 1683. *De natura Aequationum, pag.* 70.), aber ohne Beweis, aufgestellt, daher er mit Unrecht der Harriotsche Lehrsatz genannt wird. Sehr umständliche Beweise desselben findet man in den *Mémoires de l'ac. de Paris, année* 1741. *p.* 72 — 96. — *Demonstrations de la Regle de Descartes; par de Gua.* Auch hat **Segner** in den *Mémoires de l'acad. de Berlin.* 1756. *p.* 292. *etc.* und hienächst in seinen *Elem. Analyseos Finitorum. Halae* 1758. *p.* 309. *etc.* einen vollständigen Beweis dieses Satzes gegeben.

§. 119.

1. **Zusatz.** Fehlen in einer Gleichung eins oder mehrere Glieder, so kann man ihre Stelle durch den Ausdruck $\pm o$ ersetzen und hienach die Zahl der Wechsel und Folgen der Gleichung bestimmen, wenn man einmal die obern und dann die untern Zeichen des Ausdrucks $\pm o$ mit den übrigen einfachen Zeichen der Gleichung verbindet.

Bleibt die Anzahl der Wechsel und Folgen einer Gleichung ungeändert, man mag die obern oder untern Zeichen derselben verbinden, so befinden sich in der Gleichung, wenn sämmtliche Wurzeln reel sind, eben so viel bejahte Wurzeln als sie Wechsel, und eben so viel verneinte Wurzeln als sie Folgen enthält. Anstatt der Gleichung:

$$x^4 - 69x^2 + 280x - 300 = o, \text{ erhält man}$$
$$x^4 \pm o - 69x^2 + 280x - 300 = o,$$

also für die obern Zeichen $+ + - + -$
und für die untern $+ - - + -$.

Dies giebt in beiden Fällen drei Wechsel und eine Folge. Sind daher sämmtliche Wurzeln möglich, so müssen drei bejahte und eine verneinte Wurzel vorhanden seyn. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+ 2; + 3; + 5; - 10$.

Aendert sich die Anzahl der Wechsel und Folgen einer Gleichung, wenn man statt der obern Zeichen die untern wählt, so beweist dies, daß in der Gleichung unmögliche Wurzeln vorhanden sind.

Wäre die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx - c = o$ gegeben, so erhält man

$$x^4 + ax^3 \pm o + bx - c = o,$$

also für das obere Zeichen $+ + + + -$
und für das untere $+ + - + -$.

Für die erste Zusammenstellung erhält man einen Wechsel und drei Folgen; für den zweiten, drei Wechsel und eine Folge. Weil nun eine bejahte mit drei verneinten, und zugleich drei bejahten mit einer verneinten Wurzel in einerlei Gleichung nicht vorhanden seyn können, so müssen sich nothwendig unmögliche Wurzeln in dieser Gleichung befinden, weil solche weder zu den bejahten noch verneinten Größen gezählt werden können.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn zwischen zwei Gliedern einer Gleichung, welche verschiedene Zeichen haben, das Zwischenglied fehlt, sich daraus nicht schließen läßt, ob unmögliche Wurzeln vorhanden sind; wenn aber zwischen zwei Gliedern, welche einerlei Zeichen haben, ein Glied fehlt, so muß die Gleichung nothwendig unmögliche Wurzeln enthalten.

Beispiel. Verwandelt man die Gleichung $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$ in eine andere, deren zweites Glied fehlt, so erhält man (§. 89. 2. Beisp.)

$$y^4 - \tfrac{11}{2} y^2 - \tfrac{75}{16} = 0,$$

und wenn man hierin, statt der fehlenden Glieder, ± 0 schreibt

$$y^4 \pm 0 - \tfrac{11}{2} y^2 \pm 0 - \tfrac{75}{16} = 0.$$

Nun haben die Glieder $-\frac{11}{2} y^2$ und $-\frac{75}{16}$ einerlei Zeichen, und das Zwischenglied fehlt, daher muß die gefundene, also auch die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln haben.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind: $+2$; -3; $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

§. 120.

2. **Zusatz.** Wird eine Gleichung, welche reelle Wurzeln enthält, mit $x + r$ oder $x - r$ multiplizirt, so entsteht eine neue Gleichung, welche, außer der Wurzel r, noch eben so viel reelle Wurzeln als die ursprüngliche Gleichung enthalten muß. Findet man alsdann in der neuen Gleichung, mit Rücksicht auf die eingeführte Wurzel, nicht eben so viel Wechsel und Folgen der Zeichen, als nach der ursprünglichen Gleichung vorhanden seyn müssen, so ist dies ein Zeichen, daß unmögliche Wurzeln vorhanden sind.

1. **Beispiel.** Die Gleichung $x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = 0$ hat 2 Wechsel und 2 Folgen. Mit $x + r$ multiplizirt, giebt:

$$x^5 \begin{array}{r|r|r|r|l} +1 & x^4 - 29 & x^3 - 9 & x^2 + 180 & x + 180r = 0. \\ +1r & +1r & -29r & -9r & \end{array}$$

Für $r > 29$ entstehen folgende Zeichen:

$$+ + + - - +, \text{ und für } r < 20$$
$$+ + - - + +,$$

also in beiden Fällen 2 Wechsel und 3 Folgen, woraus auf keine unmögliche Wurzeln geschlossen werden kann.

Die gegebene Gleichung mit $x - r$ multiplizirt, giebt

$$x^5 \begin{array}{r|r|r|r|l} +1 & x^4 - 29 & x^3 - 9 & x^2 + 180 & x - 180r = 0. \\ -1r & -1r & +29r & +9r & \end{array}$$

Für $r > 1$ entstehen folgende Zeichen:

$$+ - - + + -, \text{ und für } r < \tfrac{1}{4}$$
$$+ + - - + -,$$

also in beiden Fällen 3 Wechsel und 2 Folgen, woraus ebenfalls auf keine unmögliche Wurzeln geschlossen werden kann.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichungen sind: $+3$; $+4$; -3; -5.

2. **Beispiel.** Die Gleichung $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = o$ hat 1 Wechsel und 3 Folgen. Mit $x + r$ multiplizirt, giebt

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x^5 + \;\;2 & x^4 - \;\;4 & x^3 - \;\;5 & x^2 - \;\;6 & x - 6r = o. \\ \quad\; + 1r & \quad\; + 2r & \quad\; - 4r & \quad\; - 5r & \end{array}$$

Für $r > 2$ entstehen folgende Zeichen:

$$+ + + - - -, \text{ und für } r < 2$$
$$+ + - - - -,$$

also in beiden Fällen 1 Wechsel und 4 Folgen, woraus auf keine unmögliche Wurzel geschlossen werden kann.

Die gegebene Gleichung mit $x - r$ multiplizirt, giebt

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x^5 + \;\;2 & x^4 - \;\;4 & x^3 - \;\;5 & x^2 - \;\;6 & x + 6r = o. \\ \quad\; - 1r & \quad\; - 2r & \quad\; + 4r & \quad\; + 5r & \end{array}$$

Für $r > 2$ entstehen folgende Zeichen:

$$+ - - + + +, \text{ und für } r < 2$$
$$+ + - - - +,$$

also in beiden Fällen 2 Wechsel und 3 Folgen, weshalb man auch hieraus nicht schließen kann, daß die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln hat, obgleich solche vorhanden seyn können. Nach §. 119. überzeugt man sich, daß die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln haben muß.

3. **Beispiel.** Die Gleichung $x^4 + 111x^3 + 6x^2 + 1993x + 35878 = o$ hat 4 Folgen. Mit $x - r$ multiplizirt, giebt

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x^5 + 111 & x^4 + \;\;6 & x^3 + 1993 & x^2 + \;35878 & x - 35878r = o. \\ \quad - \;\;1r & \quad - 111r & \quad - \;\;6r & \quad - 1993r & \end{array}$$

Für $r > 111$ entstehen folgende Zeichen:

$$+ - - - - -, \text{ und für } r = 1$$
$$+ + - + + -,$$

also im ersten Falle 1 Wechsel und 4 Folgen, und im zweiten Falle 3 Wechsel und 2 Folgen, daher muß die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln enthalten.

§. 121.

Befindet sich in einer Gleichung nicht mehr als ein Wechsel der Zeichen, so enthält sie nothwendig eine, aber nicht mehrere positive Wurzeln.

Dies zu übersehen, bemerke man, daß das erste Glied als positiv vorausgesetzt wird, daher muß nothwendig das letzte Glied negativ seyn. Die Gleichung mag alsdann von einem geraden

oder ungeraden Grade seyn, so muß sie (§. 100 und 101.) nothwendig eine positive Wurzel enthalten. Daß alsdann aber nur eine positive Wurzel vorhanden seyn kann, folgt aus §. 118.

§. 122.

Die aus einer gegebenen Gleichung $Fx = o$ für die Quadrate der Differenzen ihrer Wurzeln abgeleitete Gleichung (§. 108.), welche wie bisher durch $fu = o$ bezeichnet werden soll, giebt zu mehrern wichtigen Bemerkungen über die Beschaffenheit der Wurzeln einer Gleichung Veranlassung.

Sind zwei Wurzeln der Gleichung $Fx = o$ einander gleich, so wird das Quadrat ihrer Differenz $= o$, also hat alsdann die Gleichung $fu = o$ eine Wurzel $= o$, daher muß das letzte Glied derselben $= o$ seyn (§. 104.). Auf eine ähnliche Weise könnte man die Kennzeichen für noch mehrere gleiche Wurzeln ableiten, wenn man nicht lieber das §. 220. beschriebene Verfahren zum Aufsuchen der gleichen Wurzeln einer Gleichung vorzieht.

Wird vorausgesetzt, daß die Wurzeln $a, b, c, \ldots . q$ der Gleichung $Fx = o$ sämmtlich reel sind, so müssen die Quadrate ihrer Differenzen positiv seyn, also kann in diesem Falle die Gleichung $fu = o$ keine andere als positive Wurzeln enthalten, weshalb sie nothwendig (§. 118.) abwechselnde Zeichen haben muß.

Sind in der gegebenen Gleichung $Fx = o$ unmögliche Wurzeln, so müssen solche paarweise von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ vorhanden seyn (§. 115.). Nun ist die Differenz der Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1} = 2\beta\sqrt{-1}$ und das Quadrat derselben $= -4\beta^2$; daher muß in der Gleichung $fu = o$ eine negative Wurzel $= -4\beta^2$ vorkommen, wenn in der Gleichung $Fx = o$ zwei unmögliche Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ enthalten sind. Die übrigen Wurzeln sind positiv oder unmöglich, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn aus den Wurzeln $a, b, c \ldots\ldots (\alpha + \beta\sqrt{-1}), (\alpha - \beta\sqrt{-1})$ der Gleichung $Fx = o$ die Quadrate von den Differenzen dieser Wurzeln gebildet werden. Hieraus folgt, daß, wenn sich in der Gleichung $fu = o$ eine negative Wurzel befindet, also wenn in derselben Folgen von Zeichen vorkommen (§. 118.), so muß die Gleichung $Fx = o$ unmögliche Wurzeln enthalten.

§. 123.

Zusatz. Eine Anwendung der gefundenen Eigenschaften der Wurzeln einer Gleichung auf einen besondern Fall zu geben, wähle man die Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + Bx + C = o,$$

so wird die Gleichung für die Quadrate der Differenzen ihrer Wurzeln (§. 108.), oder

$$fu = u^3 + 6B.u^2 + 9B^2u + (4B^3 + 27C^2) = o.$$

Soll nun die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln haben, so müssen die Zeichen in der Gleichung $fu = o$ abwechseln, also $9B^2$ positiv, dagegen aber $6B$ und $(4B^3 + 27C^2)$ negativ seyn. Nun ist $9B^2$ stets positiv, folglich

(*I*) müssen, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reel seyn sollen,

B und $(4B^3 + 27C^2)$ negativ seyn.

(*II*) Wären aber B und $(4B^3 + 27C^2)$ positiv, oder einer dieser Werthe positiv und der andere negativ, so ist dies ein Zeichen, daß die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

1. Bei-

1. Beispiel. In der Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ ist $B = -7$, $C = -7$ und $4B^3 + 27C^2 = -49$, daher hat die gegebene Gleichung drei reelle Wurzeln, und weil das zweite Glied derselben durch ± 0 ersetzt werden kann, so entstehen in jedem Falle ein Wechsel und zwei Folgen der Zeichen, also hat die Gleichung eine positive und zwei negative Wurzeln (§. 118.).

2. Beispiel. In der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ ist $B = -2$, $C = -5$ und $4B^3 + 27C^2 = +643$, daher hat die gegebene Gleichung nach (*II*) unmögliche Wurzeln.

§. 124.

Diejenigen Gleichungen, in welchen die von beiden Enden gleich weit abstehenden Koeffizienten einander gleich sind, heißen nach **Euler: reziproke Gleichungen.** Z. B.

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$$
$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0.$$

Diese Benennung gründet sich darauf, daß, wenn a eine Wurzel dieser Gleichungen ist, alsdann auch ebenfalls der reziproke oder umgekehrte Werth $\frac{1}{a}$ eine Wurzel derselben seyn muß.

Wäre nemlich von der reziproken Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Bx^2 + Ax + 1 = 0$$

eine ihrer Wurzeln $= a$, so wird

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ba^2 + Aa + 1 = 0,$$

oder durch a^n dividirt und die Glieder in umgekehrter Ordnung geschrieben

$$\frac{1}{a^n} + A\frac{1}{a^{n-1}} + B\frac{1}{a^{n-2}} + \ldots + B\frac{1}{a^2} + A\frac{1}{a} + 1 = 0.$$

Wenn daher a eine Wurzel der vorstehenden Gleichung ist, so muß auch $\frac{1}{a}$ eine seyn, weil sowohl für $x = a$ als für $x = \frac{1}{a}$ die Summe der Glieder der Gleichung $= 0$ wird.

Man hat daher bei dergleichen Gleichungen nur nöthig, die Hälfte von der Anzahl ihrer Wurzeln $a, b, c, \ldots$ zu bestimmen, weil die andere Hälfte $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ seyn muß.

§. 125.

Jede reziproke Gleichung von einem geraden Grade läßt sich in eine andere verwandeln, deren Grad nur halb so hoch ist.

Es sey die gegebene Gleichung

$$x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \ldots + Bx^2 + Ax + 1 = 0.$$

Durch x^n dividirt und die gleich weit von den Enden abstehenden Glieder mit einander verbunden, giebt

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + B\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots = 0.$$

Setzt man nun $x + \frac{1}{x} = y$, so findet man

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \text{ also}$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Ferner ist

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$$

also $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$. Ebenso findet man

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = y^6 - 6y^4 + 9y^2 - 2$$

u. s. w.

Wäre hienach die Gleichung

(I) $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$ gegeben, so wird

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + A\left(x + \frac{1}{x}\right) + B = 0,$$

oder, hierin die vorstehenden Werthe gesetzt und die Gleichung nach y geordnet,

$$y^2 + Ay + (B - 2) = 0.$$

Sind nun α und β die beiden Wurzeln dieser Gleichung, so findet man

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}A + \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B + 2)} \text{ und}$$

$$\beta = -\tfrac{1}{2}A - \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B + 2)},$$

und weil $y = x + \frac{1}{x}$ ist, so wird $x^2 - yx + 1 = 0$ also

$$x = \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}y^2 - 1)}.$$

Sind nun a, b, c, d die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, so erhält man

$$a = \tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - 1)}$$
$$b = \tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - 1)}$$
$$c = \tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 - 1)}$$
$$d = \tfrac{1}{2}\beta - \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 - 1)}$$

Uebrigens ist hier $b = \frac{1}{a}$ und $d = \frac{1}{c}$, wie man sich leicht durch Rechnung überzeugen kann.

Für die Gleichung:

(II) $x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$ wird

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0,$$

oder, hierin die oben gefundenen Werthe gesetzt,

$$y^3 + Ay^2 + (B - 3)y + (C - 2A) = 0.$$

Sind nun α, β, γ die drei Wurzeln dieser Gleichung, und a, b, c, d, e, f die sechs Wurzeln der gegebenen, so erhält man wegen

$$x = \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}y^2 - 1)}$$

$$a = \tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - 1)};\; b = \tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - 1)};\; c = \tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 - 1)};$$
$$d = \tfrac{1}{2}\beta - \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 - 1)};\; e = \tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\gamma^2 - 1)};\; f = \tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{(\tfrac{1}{4}\gamma^2 - 1)}.$$

Für die Gleichung:

(III) $x^8 + Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$

erhält man ebenso

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^4 + Ay^3 - 4 & y^2 - 3A & y + 2 \\ \quad\quad\quad\; + B & \quad + C & \;\; - 2B \\ & & \;\; + D \end{array}\right\} = 0$$

u. s. w.

§. 126.

Jede reziproke Gleichung von einem ungeraden Grade, läßt sich in eine andere reziproke Gleichung verwandeln, welche einen Grad niedriger ist.

Von der Gleichung

$x^{2n+1} + Ax^{2n} + Bx^{2n-1} + \ldots + Lx^{n+1} + Lx^n + \ldots + Ax + 1 = 0$

ist -1 eine Wurzel, denn man findet für $x = -1$

$-1 + A - B + \ldots + B - A + 1 = 0$, daher muß sich die vorstehende Gleichung durch $x + 1 = 0$ ohne Rest dividiren lassen (§. 77.). Nun läßt sich die gegebene Gleichung auf folgende Art schreiben:

$(x^{2n+1} + 1) + Ax(x^{2n-1} + 1) + Bx^2(x^{2n-3} + 1) + \ldots + Kx^{n-1}(x^3 + 1) + Lx^n(x + 1) = 0.$

Hierin mit $x + 1$ dividirt, giebt (§. 61. *III.*), wenn die Glieder nach x geordnet werden,

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} x^{2n} - 1 & x^{2n-1} + 1 & x^{2n-2} - 1 & x^{2n-3} + \ldots\ldots - 1 & x^3 + 1 & x^2 - 1 & x + 1 = 0. \\ \quad\;\; + A & \quad\quad\; - A & \quad\quad\; + A & \quad\quad\quad\quad\quad + A & \;\; - A & \;\; + A & \\ & \quad\quad\; + B & \quad\quad\; - B & \quad\quad\quad\quad\quad - B & \;\; + B & & \\ & & \quad\quad\; + C & \quad\quad\quad\quad\quad + C & & & \end{array}$$

Hienach läßt sich jede reziproke Gleichung von einem ungeraden Grade in eine um einen Grad niedrigere verwandeln, und diese Gleichung von einem geraden Grade kann (§. 125.) in eine Gleichung von einem halb so hohen Grade verwandelt werden.

Hat die erste Hälfte der Glieder einer reziproken Gleichung von einem ungeraden Grade die entgegengesetzten Zeichen von den Gliedern der zweiten Hälfte, so gilt auch noch der vorstehende Satz. Denn es sey die gegebene Gleichung:

$x^{2n+1} + Ax^{2n} + Bx^{2n-1} + \ldots + Lx^{n+1} - Lx^n - \ldots - Bx^2 - Ax - 1 = 0,$

so ist $+1$ eine Wurzel dieser Gleichung, und man findet für $x = 1$

$1 + A + B + \ldots + L - L - \ldots\ldots - B - A - 1 = 0$, daher muß sich die vorstehende Gleichung durch $x - 1 = 0$ dividiren lassen (§. 77.). Schreibt man nun die vorstehende Gleichung auf folgende Weise

$(x^{2n+1} - 1) + Ax(x^{2n-1} - 1) + Bx^2(x^{2n-3} - 1) + \ldots\ldots + Lx^n(x - 1) = 0,$

und dividirt durch $x - 1 = 0$, so findet man (§. 61.), wenn die Glieder nach x geordnet werden,

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} x^{2n} + 1 & x^{2n-1} + 1 & x^{2n-2} + 1 & x^{2n-3} + \ldots\ldots + 1 & x^3 + 1 & x^2 + 1 & x + 1 = 0. \\ \quad\;\; + A & \quad\quad\; + A & \quad\quad\; + A & \quad\quad\quad\quad\quad + A & \;\; + A & \;\; + A & \\ & \quad\quad\; + B & \quad\quad\; + B & \quad\quad\quad\quad\quad + B & \;\; + B & & \\ & & \quad\quad\; + C & \quad\quad\quad\quad\quad + C & & & \end{array}$$

§. 127.

Jede Gleichung von der Form

$$x^n + Ahx^{n-1} + Bh^2x^{n-2} + \ldots + Bh^{n-2}x^2 + Ah^{n-1}x + h^n = 0$$

läßt sich in eine reziproke Gleichung verwandeln.

Denn man setze $x = hy$ und dividire durchgängig durch h^n, so erhält man

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \ldots + By^2 + Ay + 1 = 0.$$

Wäre z. B. die Gleichung

$$x^5 - 6x^4 + 45x^3 + 135x^2 - 162x + 243 = 0 \text{ gegeben, so wird}$$

$$x^5 - 2.3x^4 + 5.3^2x^3 + 5.3^3x^2 - 2.3^4x + 3^5 = 0, \text{ oder für } x = 3y,$$

$$y^5 - 2y^4 + 5y^3 + 5y^2 - 2y + 1 = 0.$$

§. 128.

Es lassen sich nun über die geordneten Gleichungen, deren Koeffizienten sämmtlich ganze Zahlen sind, einige der vorzüglichsten Kennzeichen in Absicht ihrer Wurzeln zusammenstellen.

(*I*) Eine Gleichung vom $n$ten Grade kann nicht mehr als n Wurzeln haben (§. 79.), und sie sind alle reel, wenn die abgeleitete Gleichung für die Quadrate der Differenzen der Wurzeln (§. 108.) durchgängig nur abwechselnde Zeichen hat (§. 122.).

(*II*) Das zweite Glied einer Gleichung ist der Summe, und das letzte dem Produkte ihrer Wurzeln gleich (§. 104.).

(*III*) Fehlt in einer Gleichung das zweite Glied, so ist die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen gleich (§. 104.).

(*IV*) Fehlt das letzte Glied einer Gleichung, so muß eine ihrer Wurzeln $= 0$ seyn (§. 104).

(*V*) Erhält man für die Summe der Glieder einer Gleichung entgegengesetzte Werthe wenn zwei verschiedene positive Zahlen statt x gesetzt werden, so hat die Gleichung wenigstens eine positive Wurzel, welche zwischen diesen Zahlen liegt. Wenn aber zwei negative Zahlen ebenfalls entgegengesetzte Werthe für diese Summe geben, so hat die Gleichung wenigstens eine negative Wurzel, welche zwischen diesen Zahlen liegt. Auch kann eine dieser Zahlen $= 0$ seyn (§. 95.).

(*VI*) Jede Gleichung, welche nicht mehr als einen Wechsel der Zeichen hat, muß nothwendig eine, aber auch nicht mehrere positive Wurzeln enthalten (§. 123.).

(*VII*) Hat eine Gleichung von einem geraden Grade reelle Wurzeln, so müssen solche paarweise vorhanden seyn (§. 115.).

(*VIII*) Jede Gleichung von einem geraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat zwei reelle Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen (§. 100.).

(*IX*) Jede Gleichung von einem ungeraden Grade, hat wenigstens eine reelle Wurzel, deren Zeichen dem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist (§. 101.).

(*X*) Hat eine Gleichung von einem ungeraden Grade mehrere reelle Wurzeln, so ist ihre Anzahl ungerade (§. 115.).

(*XI*) Eine Gleichung kann nicht mehr positive Wurzel haben, als sie Abwechselungen der Zeichen, und nicht mehr negative, als sie Folgen der Zeichen hat (§. 118.).

(*XII*) Hat eine Gleichung r gleiche Wurzeln, deren jede $= a$ ist, so muß a^r ein Faktor des letzten Gliedes, a^{r-1} ein Faktor des vorletzten Koeffizienten, a^{r-2} ein Faktor des nächst vorhergehenden u. s. w. seyn (§. 113.).

(*XIII*) Eine Gleichung hat unmögliche Wurzeln, wenn in der abgeleiteten Gleichung für die Quadrate der Differenzen der Wurzeln eine oder mehrere Folgen von Zeichen vorkommen (§. 122.), und wenn sich in einer Gleichung unmögliche Wurzeln befinden, so müssen solche paarweise vorhanden seyn (§. 115.).

(*XIV*) Ist eine der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung $= \alpha + \beta \sqrt{-1}$, so muß die zweite $= \alpha - \beta \sqrt{-1}$ seyn, oder umgekehrt u. s. w.

(*XV*) Wenn zwischen zwei Gliedern einer Gleichung, welche einerlei Zeichen haben, ein Glied fehlt, so muß die Gleichung unmögliche Wurzeln enthalten (§. 119.).

(*XVI*) Hat eine Gleichung lauter unmögliche Wurzeln, so müssen alle reelle Zahlen, welche statt x in die Gleichung gesetzt werden, für die Summe aller Glieder eine positive Zahl geben.

Denn erhielte man einmal eine positive und für eine andere Zahl eine negative Summe, so müßte die Gleichung eine reelle Wurzel haben (§. 95.), und weil man x so groß annehmen kann, daß die Summe aller Glieder positiv wird (§. 97.), so kann die Summe auch nur positiv seyn.

§. 129.

Aufgabe. Die Wurzeln einer geordneten Gleichung $Fx = 0$, welche ganze Zahlen sind, zu finden.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß sämmtliche Koeffizienten ganze Zahlen sind und der erste $= 1$ ist, werde

(1) das letzte Glied in seine mögliche positive und negative Faktoren, mit Ausnahme von ± 1, zerlegt und hierauf die Werthe der Gleichung für $x = +1$ und $x = -1$ also $F1$ und $F(-1)$ bestimmt.

(2) Hierauf werde $F1$ nach §. 102. durch jeden um 1 verminderten und $F(-1)$ durch jeden um 1 vermehrten positiven Faktor dividirt und alle positive Faktoren weggeworfen, welche im ersten oder zweiten Falle keine ganze Zahlen zu Quotienten geben.

Dann dividire man $F1$ durch jeden um 1 vermehrten und $F(-1)$ durch jeden um 1 verminderten negativen Faktor, werfe alle negative Faktoren weg, welche im ersten oder zweiten Falle keine ganze Zahlen zu Quotienten geben.

Sollte $F1$ oder $F(-1) = 0$ werden, also $+1$ oder -1 eine Wurzel der Gleichung seyn, so dividire man $Fx = 0$ durch $x - 1$ oder $x + 1$ und vermindere dadurch den Grad der Gleichung, mit welcher man alsdann nach (1) und (2) verfährt.

(3) Nun untersuche man nach §. 103. welche von den übrig gebliebenen Faktoren Wurzeln sind; wobei zu bemerken ist, daß man die Rechnung für einen Faktor abbrechen kann, wenn der

Quotient ein Bruch wird, welches in den folgenden Beispielen durch ein Sternchen (*) angedeutet wird.

(4) Hat man hienach eben so viel Wurzeln gefunden, als der Grad der Gleichung anzeigt, so sind weiter keine Wurzeln vorhanden (§. 79.).

(5) Findet man nicht so viel Wurzeln, so dividire man durch die Wurzelgleichungen der gefundenen Wurzeln in die gegebene Gleichung. Erhält man dadurch eine Gleichung vom zweiten Grade so sind auch diese Wurzeln bekannt. Findet man eine Gleichung von einem höhern Grade, so untersuche man, ob von denselben eine der bereits gefundenen Wurzeln ebenfalls eine Wurzel ist, welcher Fall dann eintritt, wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind.

(6) Wären durch das Verfahren (2) noch nicht genug Faktoren ausgeschlossen, oder ist eine sehr große Anzahl von Faktoren vorhanden, so kann man auch die Grenzen der größten positiven und negativen Wurzeln (§. 97. 98. 99.) suchen und die Faktoren noch ausschließen, welche diese Grenze überschreiten.

Durch das vorstehende Verfahren werden offenbar alle mögliche Wurzeln der Gleichung, welche ganze Zahlen sind, erhalten, weil die Gleichung (§. 79) nicht mehr dergleichen Wurzeln haben kann, als Faktoren im letzten Gliede enthalten sind.

Das nachstehende erste Beispiel wird die vorstehenden Regeln umständlich aus einander setzen, bei den folgenden wird man aber die Verfahrungsweise als bekannt voraussetzen.

1. Beispiel. Man soll die Wurzeln nachstehender Gleichung, welche ganze Zahlen sind, finden

$$x^4 - 4x^3 - 43x^2 + 58x + 240 = 0.$$

Die einfachen Faktoren des letzten Gliedes sind $240 = 2.2.2.2.3.5$.

Diese einzeln, dann zu zwei, zu drei u. s. w. mit einander verbunden, geben folgende Zusammenstellung:

2	2.2	2.2.2	2.2.2.2	2.2.2.2.3	2.2.2.2.3.5
3	2.3	2.2.3	2.2.2.3	2.2.2.2.5	
5	2.5	2.2.5	2.2.2.5	2.2.2.3.5	
	3.5	2.3.5	2.2.3.5		

Hieraus entspringen die nach ihrer Folge geordnete Faktoren von 240

2.3.4.5.6.8.10.12.15.16.20.24.30.40.48.60.80.120.240.

Wegen der Menge dieser Faktoren suche man nach (6) die Grenzen der positiven und negativen Wurzeln, so wird (§. 97 bis 99.)

$$m = 1 + 43 = 44 \text{ und } -m' = -1 - \sqrt{58} = -1 - 8 = -9.$$

Es fallen also alle positive Faktoren über 44 und alle negativen über − 9 weg, daher bleiben noch

+2, +3, +4, +5, +6, +8, +10, +12, +15, +16, +20, +24, +30, +40

und −2, −3, −4, −5, −6, −8.

Nun ist $F1 = 252$ und $F(-1) = 144$, also für die positiven Faktoren, wenn man nach (2) die Quotienten, welche Brüche geben und deren Faktoren ausgeschlossen werden, mit * bezeichnet

$\frac{252}{1} = 252;\ \frac{144}{3} = 48$	$\frac{252}{11} = *$
$\frac{252}{2} = 126;\ \frac{144}{4} = 36$	$\frac{252}{14} = 18;\quad \frac{144}{16} = 9$
$\frac{252}{3} = 84;\ \frac{144}{5} = *$	$\frac{252}{15} = *$
$\frac{252}{4} = 63;\ \frac{144}{6} = 24$	$\frac{252}{19} = *$
$\frac{252}{5} = *$	$\frac{252}{23} = *$
$\frac{252}{7} = 36;\ \frac{144}{9} = 16$	$\frac{252}{29} = *$
$\frac{252}{9} = 28;\ \frac{144}{11} = *$	$\frac{252}{39} = *$

Es bleiben also nur noch die positiven Faktoren 2, 3, 5, 8, 15 zur Untersuchung übrig. Zur Ausschließung der negativen Faktoren wird nach (2)

$\frac{252}{3} = 84;\ \frac{144}{1} = 144$	$\frac{252}{6} = 42;\ \frac{144}{4} = 36$
$\frac{252}{4} = 63;\ \frac{144}{2} = 72$	$\frac{252}{7} = 36;\ \frac{144}{5} = *$
$\frac{252}{5} = *$	$\frac{252}{9} = 28;\ \frac{144}{7} = *$

Es bleiben also nur noch die negativen Faktoren 2, 3, 5 übrig.

Sucht man nun nach (3) die Wurzeln, so entsteht folgende Rechnung:

	+ 2	+ 3	+ 5	+ 8	+ 15	− 2	− 3	− 5
	+ 120	+ 80	+ 48	+ 30	+ 16	− 120	− 80	− 48
+ 58	+ 178	+ 138	+ 106	+ 88	+ 74	− 62	− 22	+ 10
	+ 89	+ 46	*	+ 11	*	+ 31	*	− 2
− 43	+ 46	+ 3		− 32		− 12		− 45
	+ 23	+ 1		− 4		+ 6		+ 9
− 4	+ 19	− 3		− 8		+ 2		+ 5
	*	− 1		− 1		− 1		− 1
+ 1		0		0		0		0

In der ersten wagerechten Reihe stehen die Faktoren, welche untersucht werden sollen.

In der zweiten Reihe die Quotienten, wenn mit diesen Faktoren in den Koeffizienten + 240 dividirt wird.

In der dritten Reihe vor dem Strich, der Koeffizient + 58, welcher zu jedem Gliede der zweiten Reihe addirt wird.

In der vierten Reihe die Quotienten, wenn jedes Glied der darüber stehenden Reihe durch den zugehörigen Faktor der ersten Reihe dividirt wird.

In der fünften Reihe vor dem Strich, der Koeffizient − 43, welcher zu jedem Gliede der darüber stehenden Reihe addirt wird.

In der sechsten Reihe die Quotienten, wenn jedes Glied der darüber stehenden Reihe durch den zugehörigen Faktor dividirt wird.

u. s. w.

Nun sind alle Faktoren deren letzte Summe = o wird, Wurzeln der Gleichung (§. 103.), daher müssen $+3$, $+8$, -2 und -5 Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn, oder diese Gleichung ist durch die Faktoren $(x-3)$, $(x-8)$, $(x+2)$ und $(x+5)$ ohne Rest theilbar.

2. **Beispiel.** Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = o,$$

so sind die einfachen Faktoren von $24 = 2.2.2.3$, also die zusammengesetzten Faktoren von 24

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24.$$

Für $x = +1$ findet man $F1 = o$, also ist $+1$ eine Wurzel der Gleichung, und man erhält

$$\frac{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24}{x-1} = x^3 - 9x^2 + 26x - 24;$$

daher darf man nur noch die Wurzeln von $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = o$ suchen.

Weil diese Gleichung durchgängig abwechselnde Zeichen hat, so sind keine negative Wurzeln möglich (§. 118.), daher darf sich die Untersuchung nur auf die positiven Wurzeln beschränken. Für diese Gleichung wird ohne Rücksicht auf die Zeichen $F1 = 6$ und $F(-1) = 60$, daher nach (2)

$$\frac{6}{1} = 6; \quad \frac{60}{3} = 20$$
$$\frac{6}{2} = 3; \quad \frac{60}{4} = 15$$
$$\frac{6}{3} = 2; \quad \frac{60}{5} = 12$$
$$\frac{6}{5} = *$$

Es sind also nur noch die positiven Faktoren 2, 3, 4 nach (3) zu untersuchen, und man erhält

$$\begin{array}{r|rrr}
 & +2 & +3 & +4 \\
 & -12 & -8 & -6 \\
+20 & +14 & +18 & +20 \\
 & +7 & +6 & +5 \\
-9 & -2 & -3 & -4 \\
 & -1 & -1 & -1 \\
+1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

also sind auch noch $+2$, $+3$, $+4$ Wurzeln der letzten, und daher $+1$, $+2$, $+3$, $+4$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

3. **Beispiel.** Die gegebene Gleichung sey

$$x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 21x - 18 = o,$$

so sind die einfachen Faktoren von $18 = 2.3.3$ also die zusammengesetzten: 2; 3; 6; 9; 18.

Fer-

Ferner findet man ohne Rücksicht auf das Zeichen $F1 = 48$ und $F(-1) = 12$, daher nach (2)

$\frac{48}{1} = 48$;	$\frac{12}{3} = 4$	$\frac{48}{3} = 16$;	$\frac{12}{1} = 12$
$\frac{48}{2} = 24$;	$\frac{12}{4} = 3$	$\frac{48}{4} = 12$;	$\frac{12}{2} = 6$
$\frac{48}{5} = *$		$\frac{48}{7} = *$	
$\frac{48}{8} = 6$;	$\frac{12}{10} = *$	$\frac{48}{10} = *$	
$\frac{48}{17} = *$		$\frac{48}{19} = *$	

Es sind also nur die Faktoren $+2$, $+3$ und -2, -3 nach (3) zu untersuchen, und man findet

	$+2$	$+3$	-2	-3
	-9	-6	$+9$	$+6$
-21	-30	-27	-12	-15
	-15	-9	$+6$	$+5$
-17	-32	-26	$+11$	-12
	-16	*	*	$+4$
$+2$	-14			$+6$
	-7			-2
$+5$	-2			$+3$
	-1			-1
$+1$	0			0

Es sind daher $+2$ und -3 Wurzeln der Gleichung, also muß solche durch $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$ theilbar seyn, und es wird

$$\frac{x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 21x - 18}{x^2 + x - 6} = x^3 + 4x^2 + 4x + 3.$$

Sucht man nun die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$, welche nur dann ganze Zahlen seyn können, wenn die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln hat (5), so sieht man leicht, daß solche nur negative Wurzeln haben kann (§. 118.), und man findet für $x = -3$
$-27 + 36 - 12 + 3 = 0$, also ist -3 eine Wurzel derselben. Hienach erhält man

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 3}{x + 3} = x^2 + x + 1,$$ und von der Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ sind die Wurzeln $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung sind daher

$$+2;\ -3;\ -3;\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3};\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

§. 130.

Aufgabe. Die irrationalen Wurzeln einer geordneten Gleichung $Fx = 0$ zu finden.

Auflösung. Vorausgesetzt daß zuvörderst die rationalen Wurzeln der Gleichung nach §. 129. bestimmt worden sind, und dadurch die gegebene Gleichung nach §. 77. auf einen niedrigern Grad gebracht worden, so kann man, wenn die erniedrigte Gleichung vom zweiten Grade ist,

die beiden noch fehlenden Wurzeln leicht finden. Hat aber die Gleichung einen höhern als den zweiten Grad, so kommt es darauf an, zuerst die Grenzen zu finden, zwischen welchen die positiven und negativen irrationalen Wurzeln liegen, und wenn diese bekannt sind, solche Näherungswerthe anzugeben, welche der erforderlichen Genauigkeit genügen. Um die Rechnung zu vereinfachen, wird man hier nur mit positiven Wurzeln rechnen, weil man zur Bestimmung der negativen Wurzeln die gegebene Gleichung leicht nach §. 91. in eine solche verwandeln kann, deren positive Wurzeln den negativen der gegebenen Gleichung gleich sind.

Um daher die positiven Wurzeln zu finden, suche man die Grenzen der Wurzeln dadurch zu bestimmen, daß man in der gegebenen Gleichung für x solche Werthe setzt, welche abwechselnd positive und negative Reste geben, so muß nach §. 95. zwischen den Werthen α und β eine reelle Wurzel liegen.

Diese ermüdende Rechnung mit Leichtigkeit zu verrichten, kann das Verfahren §. 85 bis 88. angewandt werden.

Sind die Werthe α und β für die dazwischen liegende Wurzel a bekannt, so sey der Werth der Gleichung, oder der Rest $= \pm A'$ für $x = \alpha$, und $\mp B'$ für $x = \beta$. Ist nun a' ein Näherungswerth für die Wurzel a und $\beta > \alpha$, so sind $a' - \alpha$ und $\beta - a'$ die Abweichungen vom Näherungswerthe der Wurzel a, zu welchen ohne Rücksicht auf die Vorzeichen die Reste A' und B' gehören. Offenbar werden diese Abweichungen $a' - \alpha$ und $\beta - a'$ desto geringer, je kleiner die Reste A' und B' ohne Rücksicht auf die Vorzeichen sind, und sie würden ganz verschwinden, wenn diese Reste $= 0$ werden (§. 76.). Man kann daher schließen, daß sich diese Reste nahe genug wie die zugehörigen Abweichungen verhalten und zwar desto genauer, je kleiner diese Reste sind. Hienach verhält sich

$$A' : B' = a' - \alpha : \beta - a' \text{ oder}$$
$$A' + B' : A' = \beta - \alpha : a' - \alpha \text{ folglich}$$
$$a' - \alpha = \frac{(\beta - \alpha) A'}{A' + B'}.$$

Ist hienach die Abweichung $a' - \alpha$ bekannt, so darf man nur dazu α addiren, um den Näherungswerth a' zu erhalten, und man kann durch Wiederholung dieses Verfahrens, sich der Wurzel a so weit nähern als erfordert wird.

Hienach erhält man folgende Regeln:

(I) zur Auffindung der Näherungswerthe für die positiven Wurzeln, suche man

(1) die Werthe für $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, ... nach §. 83. und bemerke diejenigen letzten Koeffizienten, deren Zeichen abwechseln, so muß zwischen denselben eine Wurzel liegen, und man hat dadurch zugleich einen Näherungswerth in ganzen Zahlen gefunden.

Kommt man endlich auf Koeffizienten welche einerlei Zeichen haben, so bricht die Rechnung ab, weil alsdann keine Abwechselung der Zeichen der letzten Koeffizienten mehr möglich ist.

Läßt sich übersehen, daß die Abwechselung der Zeichen der letzten Glieder noch weit entfernt ist, so kann man nach §. 86. die Koeffizienten für $x - 20$, $x - 30$, ... oder $x - 100$, $x - 200$, ... suchen.

(2) Kennt man den Näherungswerth in ganzen Zahlen, so lassen sich nun durch Anwendung des Verfahrens §. 87. die Zehntheile, Hunderttheile, Tausendtheile, u. s. w. finden.

(3) Verlangt man alsdann einen noch genaueren Näherungswerth, so bemerke man für die zuletzt gefundenen Koeffizienten mit abwechselnden Zeichen den kleinsten Werth α, zu welchem ein Koeffizient oder Rest A, und den darauf folgenden Werth β, zu welchem der Koeffizient B' (ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) gehört, berechne

$$\frac{(\beta - \alpha) A}{A + B'} = \alpha' - \alpha$$

und addire zum Quotienten den Werth α, so erhält man einen Näherungswerth α'.

(4) Für den Näherungswerth α' kann man nun wieder zwei Zahlen α' und β' suchen, zwischen welchen ein folgender Näherungswerth α'' liegt, wenn man die Reste A'' und B'' bestimmt hat. Hiedurch erhält man

$$\frac{(\beta' - \alpha') A'}{A' + B'} = \alpha'' - \alpha',$$

und wenn hiezu α' addirt wird, so ist α'' gefunden.

Auf diese Art kann man so weit fortgehen, bis man die Wurzel auf so viel Dezimalstellen genau hat, als erfordert wird; nur ist bei diesem Verfahren zu bemerken, daß die Rechnung zur Bestimmung der Reste $A, A', A'' \ldots B', B'', B''' \ldots$ ohne Anwendung der Rechnung nach (2), wegen der weitläuftigen Multiplikationen, sehr beschwerlich wird.

(*II*) Zur Auffindung der Näherungswerthe für die negativen Wurzeln, kehre man die Zeichen der geraden Glieder der gegebenen Gleichung um, suche die positiven Näherungswerthe dieser verwandelten Gleichung nach (*I*), so sind solche die Näherungswerthe der gegebenen Gleichung für die negativen Wurzeln.

1. **Beispiel.** Die Näherungswerthe für die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$$

zu finden, erhält man nach (*I*. 1.) durch das Verfahren nach §. 85. die Koeffizienten

$1 - 7 - 147 + 711$ für $x = 1$
$1 - 4 - 158 + 558$ für $x = 2$
$1 - 1 - 163 + 397$ für $x = 3$
$1 + 2 - 162 + 234$ für $x = 4$
$1 + 5 - 155 + 75$ für $x = 5$
$1 + 8 - 142 - 74$ für $x = 6$
$1 + 11 - 123 - 207$ für $x = 7$
$1 + 14 - 98 - 318$ für $x = 8$
$1 + 17 - 67 - 401$ für $x = 9$
$1 + 20 - 30 - 450$ für $x = 10$
$1 + 23 + 13 - 459$ für $x = 11$
$1 + 26 + 62 - 422$ für $x = 12$
$1 + 29 + 117 - 333$ für $x = 13$
$1 + 32 + 178 - 186$ für $x = 14$
$1 + 35 + 245 + 25$ für $x = 15$

Hier bricht die Rechnung ab, weil alle Koeffizienten einerlei Zeichen haben, und daher keine positive Wurzeln weiter hin möglich sind. Aus den Abwechselungen der Zeichen, vor den letzten Koeffizienten folgt, daß

eine Wurzel a zwischen $x = 5$ und $x = 6$,
eine Wurzel b zwischen $x = 14$ und $x = 15$ liegen muß.

Sucht man zuerst den Näherungswerth für a, so ist hienach bereits $a = 5$ gefunden, welches die nächste ganze Zahl der Wurzel ist. Die darauf folgenden Zehntheile werden aus den Koeffizienten $1 + 5 - 155 + 75$ nach §. 87 gefunden, und man erhält:

$$1 + 5{,}3 - 153{,}97 + 59{,}551 \text{ für } x - 5{,}1$$
$$1 + 5{,}6 - 152{,}88 + 44{,}208 \text{ für } x - 5{,}2$$
$$1 + 5{,}9 - 151{,}73 + 28{,}977 \text{ für } x - 5{,}3$$
$$1 + 6{,}2 - 150{,}52 + 13{,}864 \text{ für } x - 5{,}4$$
$$1 + 6{,}5 - 149{,}25 - 1{,}125 \text{ für } x - 5{,}5$$

daher liegt die Wurzel zwischen 5,4 und 5,5.

Will man nun den folgenden Näherungswerth nach (*I.* 3.) suchen, so wird hier

$$\alpha = 5{,}4;\ A = 13{,}864;\ \beta = 5{,}5;\ B' = 1{,}125$$

also $\beta - \alpha = 0{,}1$, daher

$$\frac{(\beta - \alpha)\,A}{A + B'} = \frac{0{,}1 \,.\, 13{,}864}{14{,}989} = 0{,}0924,$$

daher $5{,}4 + 0{,}0924 = 5{,}4924 = a'$ ein Näherungswerth für a.

Diesen Werth statt x in die gegebene Gleichung gesetzt, giebt zum Rest

$$+ 0{,}009\ 675\ 001\ 024,$$

und wenn man den nächst folgenden Werth 5,4925 statt x in die gegebene Gleichung setzt, so wird der Rest

$$- 0{,}005\ 259\ 796\ 875$$

es muß also zwischen $\alpha' = 5{,}4924$ und $\beta = 5{,}4925$ der folgende Näherungswerth liegen. Diesen zu finden verfahre man nach (*I.* 4.), so erhält man wegen $\beta - \alpha' = 0{,}0001$

$$\frac{0{,}0001 \,.\, 0{,}009\ 675\ 001\ 024}{0{,}014\ 934\ 797\ 899} = 0{,}000\ 064\ 7815, \text{ daher}$$

$$5{,}4924 + 0{,}0000647815 = 5{,}4924647815 = a''$$

ein Näherungswerth für a, von welchem wenigstens neun Dezimalstellen vollkommen genau sind, und man kann sich durch Wiederholung dieses Verfahren der Wurzel a, so weit man will nähern.

Hätte man zur Vermeidung der sehr beschwerlichen Multiplikationen zur Bestimmung der Reste, das Verfahren (*I.* 2.) nach §. 88. zur Bestimmung der Hunderttheile, Tausendtheile, u. s. w. fortsetzen wollen, so findet man durch weitere Ausführung dieser Rechnung

1 + 6,47	— 149,3797	+ 0,368149	für x — 5,49
1 + 6,50	— 149,2500	— 1,125000	für x — 5,50
1 + 6,476	— 149,353808	+ 0,069415488	für x — 5,492
1 + 6,479	— 149,340853	— 0,079931843	für x — 5,493
1 + 6,4772	— 149,34862672	+ 0,009675001024	für x — 5,4924
1 + 6,4775	— 149,34733125	— 0,005259796875	für x — 5,4925
1 + 6,47738	— 149,3478394452	+ 0,000714107338936	für x — 5,49246
1 + 6,47741	— 149,3477098973	— 0,000779370407777	für x — 5,49247
1 + 6,477392	— 149,347787626112	+ 0,000116716084793344	für x — 5,492464
1 + 6,477395	— 149,347774671325	— 0,000032631696355375	für x — 5,492465

wodurch man die Näherung außer allem Zweifel bis auf sechs Dezimalstellen genau erhalten hat. Will man nun nach (*I.* 3.) noch mehrere Dezimalstellen bestimmen, so setze man

$$\alpha = 5{,}492464;\ A' = 0{,}000\,116\,716\,084\,793\,344$$
$$\beta = 5{,}492465;\ B' = 0{,}000\,032\,631\,696\,355\,375,$$ so wird

$\frac{(\beta - \alpha) A'}{A' + B'} = 0{,}000\,000\,781\,505\,3$, daher ist der Näherungswerth für die Wurzel

$$\alpha = 5{,}492\,464\,781\,505\,3 \ldots\ldots$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren kann man die zwischen 14 und 15 liegende Wurzel b finden, und man erhält

$$b = 14{,}896\,431\,373 \ldots\ldots$$

Zur Bestimmung der negativen Wurzeln, da eine derselben vorhanden seyn kann, verfahre man nach (*II.*) und kehre die Zeichen vor den geraden Koeffizienten der gegebenen Gleichung um, so erhält man die Koeffizienten 1 + 10 — 130 — 850, also §. 85.

1	+ 13	— 107	— 969	für x — 1
1	+ 16	— 78	— 1062	für x — 2
1	+ 19	— 43	— 1123	für x — 3
1	+ 22	— 2	— 1146	für x — 4
1	+ 25	+ 45	— 1125	für x — 5
1	+ 28	+ 98	— 1054	für x — 6
1	+ 31	+ 157	— 927	für x — 7
1	+ 34	+ 222	— 738	für x — 8
1	+ 37	+ 293	— 481	für x — 9
1	+ 40	+ 370	— 150	für x — 10
1	+ 43	+ 453	+ 216	für x — 11

also liegt eine Wurzel c zwischen 10 und 11.

Verfährt man zur Bestimmung des Näherungswerthes für c auf die angeführte Weise, so findet man $c = 10{,}388\,896\,155 \ldots\ldots$ also für die gegebene Gleichung

$$c = -10{,}388\,896\,155 \ldots\ldots$$

Weil die gegebene Gleichung nur drei Wurzeln hat, so wäre es zureichend gewesen, nur

eine Wurzel a zu bestimmen und mit Hülfe derselben nach §. 77. aus der gegebenen eine Gleichung vom zweiten Grade abzuleiten, deren Wurzeln b und c alsdann leicht zu finden sind. Begnügt man sich mit 9 Dezimalstellen, so entsteht, wenn die Wurzel $a = 5{,}492\,464\,781$ als bekannt angesehen wird, folgende Rechnung:

$$\frac{x^3 - 10x^2 - 130x + 850}{x - 5{,}492\,464\,781} = x^2 - 4{,}507\,535\,219\,x - 154{,}757\,478\,439.$$

Die gefundene Gleichung $= o$ gesetzt, so erhält man daraus die beiden Wurzeln

$$x = 2{,}253\,767\,609 \pm \sqrt{159{,}836\,946\,874}$$
$$= 2{,}253\,767\,609 \pm 12{,}642\,663\,764$$

und man findet

$$b = 14{,}896\,431\,373$$
$$c = -10{,}388\,896\,155.$$

Für die Summe der drei Wurzeln findet man $a + b + c = 10$, wie nach §. 104. (1.) erfordert wird, wodurch zugleich die Ueberzeugung entsteht, daß kein Fehler in der Rechnung vorgefallen ist.

2. **Beispiel.** Die Näherungswerthe für die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = o$$

zu finden, erhält man nach (*I.* 1.)

$$1 + 3 - 4 - 13 \text{ für } x - 1$$
$$1 + 6 - 5 - 13 \text{ für } x - 2$$
$$1 + 9 + 20 - 1 \text{ für } x - 3$$
$$1 + 12 + 41 + 29 \text{ für } x - 4$$

daher liegt zwischen $x = 3$ und $x = 4$ eine positive Wurzel. Größere positive Wurzeln sind nicht möglich, weil alle Koeffizienten der letzten Reihe einerlei Zeichen haben.

Ferner erhält man aus

$$1 + 9 + 20 - 1 \text{ für } x - 3$$
$$1 + 9{,}3 + 21{,}83 + 0{,}991 \text{ für } x - 3{,}1,$$

also liegt die Wurzel zwischen 3,0 und 3,1. Hienach erhält man ferner

$$1 + 9{,}03 + 20{,}1803 - 0{,}799\,099 \text{ für } x - 3{,}01$$
$$1 + 9{,}06 + 20{,}3612 - 0{,}596\,392 \text{ für } x - 3{,}02$$
$$1 + 9{,}09 + 20{,}5427 - 0{,}391\,873 \text{ für } x - 3{,}03$$
$$1 + 9{,}12 + 20{,}7248 - 0{,}185\,536 \text{ für } x - 3{,}04$$
$$1 + 9{,}15 + 20{,}9075 + 0{,}022\,625 \text{ für } x - 3{,}05.$$

Durch das bereits gezeigte Verfahren läßt sich nun die Wurzel $x = 3{,}04\ldots$ so genau, als es verlangt wird, finden.

Die negativen Wurzeln zu erhalten, müssen in der Gleichung

$$x^3 + 0 - 7x - 7 = o,$$

die Koeffizienten der geraden Glieder entgegengesetzte Zeichen erhalten (11); dies giebt

$$1 - 0 - 7 + 7$$

und hienach findet man

$$1 + 3 - 4 + 1 \text{ für } x = 1$$
$$1 + 6 + 5 + 1 \text{ für } x = 2$$
$$1 + 9 + 20 + 13 \text{ für } x = 3$$

wo die Rechnung abbricht, weil keine größere Wurzeln möglich sind. Hier ist kein Wechsel der Zeichen zwischen den letzten Gliedern. Allein ihre Folge: $+7$, $+1$, $+1$, $+13$ läßt erwarten, daß weil sie zuerst abnehmen und dann wieder wachsen, daß zwischen $x = 1$ und $x = 2$ negative Glieder liegen können. Man untersuche daher die auf $x = 1$ folgende Zehntheile nach (*I.* 2.), so erhält man:

$$1 + 3{,}3 - 3{,}37 + 0{,}631 \text{ für } x = 1{,}1$$
$$1 + 3{,}5 - 2{,}68 + 0{,}328 \text{ für } x = 1{,}2$$
$$1 + 3{,}9 - 1{,}93 + 0{,}097 \text{ für } x = 1{,}3$$
$$1 + 4{,}2 - 1{,}12 - 0{,}056 \text{ für } x = 1{,}4$$
$$1 + 4{,}5 - 0{,}25 - 0{,}125 \text{ für } x = 1{,}5$$
$$1 + 4{,}8 + 0{,}68 - 0{,}104 \text{ für } x = 1{,}6$$
$$1 + 5{,}1 + 1{,}67 + 0{,}013 \text{ für } x = 1{,}7.$$

Hienach liegt zwischen 1,3 und 1,4 sowohl, als zwischen 1,6 und 1,7 eine Wurzel, und man kann nach dem bekannten Verfahren die beiden negativen Wurzeln $-1{,}3\ldots$ und $-1{,}6\ldots$ so genau, als erforderlich ist, finden.

§. 131.

Zusatz. Eine durch die Leichtigkeit der Rechnung sich empfehlende Näherungsmethode zur Auffindung der irrationalen Wurzeln einer Gleichung, welche im wesentlichen mit der von Newton überein kommt, findet man §. 221. auseinander gesetzt.

Ein anderes Verfahren lehrt Lagrange in der §. 145. angeführten Schrift (*Chap. III. pag.* 22.). Die Anwendung dieser Näherungsmethode setzt voraus, daß man für die gegebene Gleichung $Fx = o$ einen Näherungswerth in positiven ganzen Zahlen gefunden habe. Dieser sey α und die gesuchte Wurzel von x liege zwischen α und $\alpha + 1$. Setzt man nun $x = \alpha + \frac{1}{y}$, so wird, weil $\frac{1}{y} < 1$, auch $y > 1$ seyn. Nach §. 90. erhält man für $x = \alpha + \frac{1}{y}$ die verwandelte Gleichung $fy = o$, und wenn man voraussetzt, daß zwischen α und $\alpha + 1$ nur eine Wurzel für x liegt, so kann auch in der Gleichung $fy = o$ nur eine einzige Wurzel $b > 1$ enthalten seyn. Denn wollte man voraussetzen, daß mehrere Wurzeln b', b'', b''', ... in $fy = o$ enthalten wären, welche > 1 sind, so wird auch $y = b'$, $y = b''$, ... also $x = \alpha + \frac{1}{b'}$, $x = \alpha + \frac{1}{b''}$, ... woraus folgt, daß zwischen α und $\alpha + 1$ auch die Werthe $\alpha + \frac{1}{b'}$, $\alpha + \frac{1}{b''}$, ... enthalten sind, welches gegen die Voraussetzung ist.

Sucht man nun ferner von der Gleichung $fy = o$ den nächst kleinsten Näherungswerth in ganzen Zahlen $= \beta$, und setzt $y = \beta + \frac{1}{y}$, so kann man wie vorhin eine verwandelte Glei-

chung nach §. 90. für y' erhalten. Von dieser suche man wieder den kleinsten Näherungswerth in ganzen Zahlen $= \gamma$, setze $y' = \gamma + \frac{1}{y''}$ und gehe auf diese Art weiter, so daß nach einander die Ausdrücke $x = \alpha + \frac{1}{y}$; $y = \beta + \frac{1}{y'}$; $y' = \gamma + \frac{1}{y''}$; $y'' = \delta + \frac{1}{y'''}$; .... entstehen, so erhält man hieraus durch fortgesetzte Vertauschung den Näherungswerth

$$x = \alpha + \frac{1}{y} = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{y'}} = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{y''}}} = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \frac{1}{y'''}}}} \text{ u. s. w.}$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Benennung mit Weglassung von y', y'', y''', ... so findet man für die auf einander folgenden Näherungswerthe, oder

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta};$$

$$x = \alpha + \frac{\gamma}{\beta\gamma + 1};$$

$$x = \alpha + \frac{\gamma\delta + 1}{\beta + (\beta\gamma + 1)\delta};$$

$$x = \alpha + \frac{\gamma + (\gamma\delta + 1)\varepsilon}{1 + \beta\gamma + (\beta + \beta\gamma\delta + \delta)\varepsilon};$$

u. s. w.

Die Anwendung dieses Verfahrens ist deshalb beschwerlich, weil das Berechnen der verwandelten Gleichungen nach §. 90. weitläuftig ist, dagegen hat dasselbe den Vortheil, daß die Genauigkeit des Näherungswerthes sich leicht bestimmen läßt. Hierüber wird im neunten Kapitel von den Kettenbrüchen das Erforderliche abgehandelt.

Die Näherungswerthe negativer Wurzeln lassen sich eben so wie die der positiven Wurzeln finden, wenn man die gegebene Gleichung nach §. 95. verwandelt.

Beispiel. Die Näherungswerthe für die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

zu finden. Nach §. 130. hat diese Gleichung eine mögliche Wurzel zwischen 2 und 3, daher setze man $x = 2 + \frac{1}{y}$, so erhält man nach §. 90. (1. Beispiel) für die verwandelte Gleichung

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Von dieser Gleichung ist der nächste kleinste Näherungswerth in ganzen Zahlen $= 10$, daher setze man $y = 10 + \frac{1}{y'}$ und suche aus der vorstehenden Gleichung die verwandelte (§. 90. 2. Beispiel), so wird diese

$$61y'^3 - 94y'^2 - 20y' - 1 = 0.$$

Hievon ist der nächste kleinste Näherungswerth in ganzen Zahlen $= 1$, daher setze man $y' = 1 + \frac{1}{y''}$, so wird die verwandelte Gleichung (§. 90. 3. Beispiel)

$$54y''^3 + 25y''^2 - 89y'' - 61 = 0.$$

Hievon ist der nächste kleinste Näherungswerth $= 1$, man setze daher $y'' = 1 + \frac{1}{y'''}$, so

findet

findet man

$$71y'''^3 - 123y'''^2 - 187y''' - 54 = 0.$$

Hievon ist der gesuchte Näherungswerth $= 2$, daher setze man $y''' = 2 + \frac{1}{y''''}$.

Geht man auf diese Art weiter, so erhält man, außer den bereits in ganzen Zahlen gefundenen Näherungswerthen 2, 10, 1, 1, 2 noch die Werthe 1, 3, 1, 1, 12, ... Setzt man nun $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 2$, ... so findet man folgende Näherungswerthe für x

$$2\tfrac{1}{10};\ 2\tfrac{1}{11};\ 2\tfrac{2}{21};\ 2\tfrac{5}{53};\ 2\tfrac{7}{74};\ 2\tfrac{26}{275};\ 2\tfrac{33}{349};\ 2\tfrac{59}{624};\ \ldots.$$

oder

2,1
2,090 909 090
2,095 238 095
2,094 339 623
2,094 509 451
2,094 545 454
2,094 555 874
2,094 551 282
u. s. w.

Wird die Rechnung weit genug fortgesetzt, so findet man

2,094 551 482.

§. 132

Es ist nun leicht, nach §. 129. von jeder Gleichung die Wurzeln, welche ganze Zahlen sind, und durch Anwendung des Budanschen Verfahrens, die Näherungswerthe der irrationalen Wurzeln in ganzen Zahlen zu finden. Hiedurch wird offenbar die Anzahl aller reellen Wurzeln einer Gleichung bekannt, und wenn diese gefunden ist, so kann man aus dem Grade der Gleichung auf die etwa noch vorhandene Anzahl der unmöglichen Wurzeln schließen, wenn man zuvor die Ueberzeugung erlangt hat, daß in der Gleichung keine gleiche reelle Wurzeln vorhanden sind (§. 114. und 220.).

Beispiel. Die Anzahl der reellen und unmöglichen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

zu finden, erhält man aus $1 + 0 - 2 - 5$

$$1 + 3 - 1 - 6 \text{ für } x - 1$$
$$1 + 6 + 8 - 3 \text{ für } x - 2$$
$$1 + 7 + 15 + 12 \text{ für } x - 3,$$

also liegt eine positive Wurzel zwischen 2 und 3, aber es ist für keine größere Zahl eine positive Wurzel möglich, weil alle Koeffizienten für $x - 3$ einerlei Zeichen haben.

Die negativen Wurzeln zu finden, erhält man nach §. 130. (*II*) aus $1 + 0 - 2 + 5$,

$$1 + 3 + 1 + 4 \text{ für } x - 1.$$

Es ist daher keine negative Wurzel möglich, weil zwischen $1 + 0 - 2 + 5$ und $1 + 3 + 1 + 4$

keine Koeffizientenreihe liegt, deren letztes Glied negativ ist. Nun hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel, daher müssen noch zwei unmögliche vorhanden seyn.

§. 133.

Die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung zu finden, suche man zuvor mit Hülfe der bekannten reellen Wurzeln die Gleichung auf ihren niedrigsten Grad zu bringen. Ist dies der zweite, so können die unmöglichen Wurzeln leicht gefunden werden. Bei höhern Graden verfahre man auf folgende Weise.

Es sey die gegebene Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Q = o.$$

Setzt man nun, daß eine ihrer unmöglichen Wurzeln $= \alpha + \beta\sqrt{-1}$ ist, wo α und β noch näher zu bestimmen sind, so erhält man, wenn diese Wurzel mit x vertauscht wird,

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^n + A(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + P(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + Q = o.$$

Die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und die Summe der reellen Glieder $= M$, die der unmöglichen $= N\sqrt{-1}$ gesetzt, wird $M + N\sqrt{-1} = o$, wodurch man erhält (§. 14.)

$$M = o \text{ und } N = o.$$

Mittelst dieser beiden Gleichungen kann man α und β finden, wodurch die eine Wurzel $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, also auch die zugehörige (§. 115.) $x = \alpha - \beta\sqrt{-1}$ bekannt ist.

Um dieses Verfahren für einen besonderen Fall näher zu erläutern, sey die Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = o$$

gegeben, von welcher man voraussetzt, daß nach §. 89. das zweite Glied weggeschafft sey. Setzt man nun $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ statt x, so erhält man

$$M = \alpha^4 + A\alpha^2 + B\alpha + C - (A + 6\alpha^2)\beta^2 + \beta^4 = o \text{ und}$$

$$N = 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 + 2A\alpha\beta + B\beta = o, \text{ oder durch } \beta \text{ dividirt}$$

$$4\alpha^3 - 4\alpha\beta^2 + 2A\alpha + B = o \text{ und hieraus}$$

$$\beta^2 = \tfrac{1}{2}A + \alpha^2 + \frac{B}{4\alpha}, \text{ also}$$

$$(I)\ \beta = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}A + \alpha^2 + \frac{B}{4\alpha}\right)}.$$

Den Werth von β^2 in die vorstehende Gleichung $M = o$ gesetzt, und die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen, giebt

$$64\alpha^6 + 32A\alpha^4 + 4(A^2 - 4C)\alpha^2 - B = o,$$

oder wenn man $\alpha^2 = \frac{1}{4}u$ setzt, so wird

$$u^3 + 2Au^2 + (A^2 - 4C)u - B^2 = o.$$

Hat man aus dieser Hülfsgleichung die reelle Wurzel für u gefunden, so erhält man daraus, wegen $\alpha^2 = \frac{1}{4}u$

$$(II)\ \alpha = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{u},$$

und es sind hienach sowohl für α als für β zwei verschiedene Werthe bekannt, aus welchen die vier unmöglichen Wurzeln der gegebenen Gleichung gebildet werden können.

1. **Beispiel.** Die unmöglichen Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 3x^2 + 6x + 35 = 0$$

zu finden, wird hier $A = 3$, $B = 6$, $C = 35$, also $A^2 - 4C = -131$, daher

$$u^3 + 6u^2 - 131u - 36 = 0.$$

Hievon ist (§. 129.), $u = 9$ eine Wurzel, daher nach (II)

$$\alpha = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{u} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{9} = \pm \tfrac{3}{2}$$

oder $\alpha = + \frac{3}{2}$ und $\alpha' = - \frac{3}{2}$.

Für $\alpha = \frac{3}{2}$ wird nach (I)

$$\beta = \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{2} + 1)} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{19}$$

und für $\alpha' = - \frac{3}{2}$ wird

$$\beta' = \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{2} - 1)} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{11}.$$

Hienach erhält man die gesuchten Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{19}\sqrt{-1})$$
$$\alpha - \beta\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{19}\sqrt{-1})$$
$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{11}\sqrt{-1})$$
$$\alpha' - \beta\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}(-3 - \sqrt{11}\sqrt{-1}).$$

2. **Beispiel.** Die unmöglichen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ zu finden, bemerke man, daß diese Gleichung eine reelle Wurzel $= 2{,}094551$ hat, daher erhält man

$$\frac{x^3 - 2x - 5}{x - 2{,}094551} = x^2 + 2{,}094551\,x + 2{,}387\,146.$$

Diesen Quotienten $= 0$ gesetzt, giebt die Wurzeln desselben, oder

$$x = -1{,}047\,276 \pm \sqrt{(-1{,}290\,359)},$$

daher sind

$$x = -1{,}047\,276 \pm 1{,}135\,940\sqrt{-1}$$

die beiden unmöglichen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 134.

Zusatz. Man kann auch, zur Bestimmung der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung, auf folgende Weise verfahren.

Es sey die gegebene Gleichung

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \ldots + Px + Q = 0 \; [I]$$

und die Gleichung für die Quadrate von den Differenzen ihrer Wurzeln (§. 108.)

$$u^m + A'u^{m-1} + B'u^{m-2} + \ldots + Q' = 0. \; [II]$$

Zur Auffindung der negativen Wurzeln dieser Gleichung, setze man $u = -w$, so wird (§. 91.)

$$w^m - A'w^{m-1} + B'w^{m-2} - \ldots \pm Q' = 0.$$

Ist nun α' eine positive Wurzel dieser Gleichung, so muß $-\alpha'$ eine negative Wurzel der Gleichung [II] seyn (§. 91.), und es wird alsdann (§. 123.)

$$\alpha' = 4\beta^2 \text{ daher } \beta = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha'},$$

wenn $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ die beiden unmöglichen Wurzeln der Gleichung [I] sind.

Hiedurch ist β bekannt. Um α zu finden, setze man $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ statt x in [I], so wird $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^n + A\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + P\,(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + Q = 0$.

Die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und die Summe der reellen Glieder $= M$, die der unmöglichen $= N\beta\sqrt{-1}$ gesetzt, wird $M + N\beta\sqrt{-1} = 0$, wodurch man erhält (§. 14.)

$$M = 0 \text{ und } N = 0.$$

In M ist α^n und in N ist α^{n-1} die höchste Potenz von α, und weil α eine Wurzel für beide Gleichungen seyn soll, so müssen sie auch einen gemeinschaftlichen Faktor haben (§. 77.). Wenn daher in M und N der für β gefundene Werth gesetzt ist, suche man den größten gemeinschaftlichen Theiler für beide Ausdrücke, setze denselben $= 0$, so läßt sich daraus der Werth für α finden, wodurch die gesuchten Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ bekannt sind.

§. 135.

Es lassen sich nun noch die allgemeinen Auflösungen der Gleichungen vom dritten und vierten Grade entwickeln, weil es bis jetzt noch nicht gelungen ist, Gleichungen von höheren Graden, als diesen, allgemein aufzulösen. Bei einigen dieser Auflösungen wird vorausgesetzt, daß in der gegebenen vollständigen Gleichung das zweite Glied weggeschafft sey, weil dieses nach §. 89. für jede gegebene Gleichung leicht bewerkstelliget werden kann.

§. 136.

Aufgabe. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + Ax + B = 0$$

ganz allgemein zu bestimmen.

Auflösung. Man setze $x = p + q$, wo p und q noch näher zu bestimmen sind, so wird

$x^3 = p^3 + 3\,(p + q)\,pq + q^3$, oder

$x^3 = p^3 + 3\,x\,p\,q + q^3$, und hieraus

$x^3 - 3pq\,.\,x - (p^3 + q^3) = 0$. Wird diese Gleichung mit

$x^3 + \quad A\,.\,x + \quad B \quad = 0$ verglichen, und

$-3pq = A$ und $-(p^3 + q^3) = B$ gesetzt, so kann man hienach p und q durch A und B bestimmen.

Aus $A = -3pq$ wird $-q = \frac{A}{3p}$, oder $-q^3 = \frac{A^3}{27p^3}$; und aus $B = -(p^3 + q^3)$ wird $-q^3 = p^3 + B = \frac{A^3}{27p^3}$, also hieraus

$p^6 + Bp^3 - \frac{A^3}{27} = 0$, oder, wenn man $p^3 = y$ setzt,

$y^2 + By - \frac{A^3}{27} = 0$, folglich

$y = -\frac{1}{2}B \pm \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)} = p^3$. Aber

$q^3 = -B - p^3$ also $q^3 = -B + \frac{1}{2}B \mp \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)}$, oder

$q = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}B \mp \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)}]} = -\sqrt[3]{[\frac{1}{2}B \pm \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)}]}$ und

$p = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}B \pm \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)}]} = -\sqrt[3]{[\frac{1}{2}B \mp \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)}]}$.

Nun war $x = p + q$; wenn daher die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung mit a, b, c bezeichnet werden, und man $x = a = p + q$ setzt, so findet man die Wurzel

$$a = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}B - \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)}]} - \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}B + \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)}]}.$$

Um die beiden übrigen Wurzeln b und c mit Hülfe der bekannten Wurzel $x = p + q$ zu finden, dividire man die Gleichung $x^3 - 3pqx - p^3 - q^3 = 0$ durch $x - p - q = 0$, so erhält man

$$\frac{x^3 - 3pqx - p^3 - q^3}{x - p - q} = x^2 + (p + q)\,x + p^2 - pq + q^2.$$

Wird nun die Gleichung $x^2 + (p + q)\,x + p^2 - pq + q^2 = 0$ aufgelöst, so erhält man

$$x = -\frac{p + q}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(p + q)^2}{4} - p^2 + pq - q^2\right]} \text{ oder}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}(p + q) \pm \tfrac{1}{2}(p - q)\sqrt{-3},$$

oder man findet für die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$a = p + q$$
$$b = -\tfrac{1}{2}(p + q) + \tfrac{1}{2}(p - q)\sqrt{-3}$$
$$c = -\tfrac{1}{2}(p + q) - \tfrac{1}{2}(p - q)\sqrt{-3}, \text{ wo}$$
$$p = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}B - \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)}]} \text{ und}$$
$$q = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}B + \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)}]} \text{ ist.}$$

Die vorstehenden allgemeinen Ausdrücke für die Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade, deren zweites Glied fehlt, heißt die **cardanische Regel**, von Hieronimus **Cardanus** (geb. 1501, gest. 1575) aus Mailand, welcher sie zuerst bekannt machte, obgleich die Erfindung dem Scipio **Ferreus** aus Bologna gehört.

1. Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung

$$y^3 - 12y^2 + 57y - 94 = 0$$

zu finden, erhält man, wenn nach §. 89. das zweite Glied weggeschafft ist, für $y = x + 4$

$$x^3 + 9x + 6 = 0 \text{ also}$$
$$A = 9;\ B = 6;\ \tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3 = 36;\ \sqrt{36} = 6;$$
$$p = -\sqrt[3]{(3 - 6)} = -\sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{3}$$
$$q = -\sqrt[3]{(3 + 6)} = -\sqrt[3]{9}$$
$$p + q = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = -0{,}6378341$$
$$p - q = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9},$$

mithin findet man für die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + 9x + 6 = 0$

$$a = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = -0{,}6378341$$
$$b = -\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}) + \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})\sqrt{-3}$$
$$c = -\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})\sqrt{-3}.$$

Nun ist $y = 4 + x$, daher erhält man die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}3621659$$
$$4 - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}) + \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})\sqrt{-3}$$
$$4 - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})\sqrt{-3}.$$

2. **Beispiel.** Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 6x + 20 = 0$$

zu finden, wird hier $A = 6$; $B = 20$; $\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3 = 108$; $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, also

$$p = -\sqrt[3]{(10 - 6\sqrt{3})}, \text{ und } q = -\sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})},$$

oder nach §. 50.

$$p = -1 + \sqrt{3} \text{ und } q = -1 - \sqrt{3}, \text{ daher}$$

$p + q = -2$; $p - q = 2\sqrt{3}$, folglich sind die gesuchten drei Wurzeln

$$a = -2$$
$$b = -\tfrac{1}{2}(-2) + \tfrac{1}{2}.2\sqrt{3}\sqrt{-3} = 1 + 3\sqrt{-1}$$
$$c = -\tfrac{1}{2}(-2) - \tfrac{1}{2}.2\sqrt{3}\sqrt{-3} = 1 - 3\sqrt{-1}.$$

§. 137.

Bei Anwendung der cardanischen Regel kann der merkwürdige Fall eintreten, daß $\tfrac{1}{27}A^3$ negativ und größer als $\tfrac{1}{4}B^2$ wird, in welchem Fall die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + Ax + B = 0$ unmöglich zu seyn scheinen, ob sie gleich alsdann (§. 123.) alle drei reell sind. Dieser Umstand hat die Analysten früher vielfältig beschäftigt, und man hat den vorliegenden Fall, den **irreductibelen** (*casus irreductibilis*) genannt, weil die möglichen Wurzeln unter der Form unmöglicher Größen erscheinen, und durch gewöhnliche algebraische Operationen kein endlicher, von unmöglichen Größen befreiter Ausdruck, gefunden wird.

Um für diesen Fall die entsprechenden Wurzeln durch Reihen zu erhalten, setze man in der Voraussetzung, daß $\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3$ negativ sey,

$$\tfrac{1}{2}B = \alpha \text{ und } \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)} = \beta\sqrt{-1} \text{ oder}$$
$$-(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3) = \beta^2, \text{ so findet man (§. 136.)}$$
$$p = -\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})} \text{ und}$$
$$q = -\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}, \text{ daher}$$
$$x = -\left\{\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}\right\},$$

und die beiden übrigen Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})} \pm \left[\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}\right]\sqrt{3}\sqrt{-1}\right\}.$$

Hienach erhält man

(*I*) wenn $\alpha > \beta$ ist,

nach §. 44. und 45. die erste Wurzel

$$x = -2\sqrt[3]{\alpha}\left[1 + \frac{1}{3^2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{5.8}{4.3^5}\frac{\beta^4}{\alpha^4} + \frac{5.8.11.14}{4.5.6.3^7}\frac{\beta^6}{\alpha^6} - \frac{5.8.11.14.17.20}{4.5.6.7.8.3^9}\frac{\beta^8}{\alpha^8} + \ldots\right]$$

und für die beiden übrigen Wurzeln wird

$$x = \sqrt[3]{\alpha}\left[\left(1 + \frac{1}{3^2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{5.8}{4.3^5}\frac{\beta^4}{\alpha^4} + \frac{5.8.11.14}{4.5.\ 6.3^8}\frac{\beta^6}{\alpha^6} - \frac{5.8.11.14.17.20}{4.5.\ 6.\ 7.\ 8.3^9}\frac{\beta^8}{\alpha^8} + \ldots\ldots\right) \pm \left(\frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{5}{3^4}\frac{\beta^3}{\alpha^3} + \frac{5.8.11}{4.5.3^6}\frac{\beta^5}{\alpha^5} - \frac{5.8.11.14.17}{4.5.\ 6.\ 7.3^8}\frac{\beta^7}{\alpha^7} + \ldots\right)\sqrt{3}\right].$$

(*II*) Für $\alpha < \beta$

wird nach §. 47. die erste Wurzel

$$x = -2\sqrt[3]{\beta}\left[\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{5}{3^4}\frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{5.8.11}{4.5.3^6}\frac{\alpha^5}{\beta^5} - \frac{5.8.11.14.17}{4.5.\ 6.\ 7.3^8}\frac{\alpha^7}{\beta^7} + \ldots\ldots\right]$$

und die beiden übrigen

$$x = \sqrt[3]{\beta}\left[\left(\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{5}{3^4}\frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{5.8.11}{4.5.3^6}\frac{\alpha^5}{\beta^5} - \frac{5.8.11.14.17}{4.5.\ 6.\ 7.3^8}\frac{\alpha^7}{\beta^7} + \ldots\ldots\right) \pm \left(1 + \frac{1}{3^2}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{5.8}{4.3^5}\frac{\alpha^4}{\beta^4} + \frac{5.8.11.14}{4.5.\ 6.3^7}\frac{\alpha^6}{\beta^6} - \ldots\right)\sqrt{3}\right],$$

wo $\alpha = \frac{1}{2}B$ und $\beta = \sqrt{[-(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{27}A^3)]}$ für $x^3 + Ax + B = 0$ ist.

Wie die Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade mittelst der trigonometrischen Tafeln gefunden werden können, s. m. §. 175.

Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

zu finden, wird hier $A = -7$; $B = -7$, daher

$\alpha = -3,5$; $\beta = \sqrt{\left(-\frac{49}{4} + \frac{343}{27}\right)} = 0{,}67357$ und $\sqrt[3]{\alpha} = -1{,}518294$. Man findet also, wenn von den vorstehenden Reihen nur die drei ersten Glieder in Rechnung kommen, die erste Wurzel

$$x = 2.1{,}518294.\begin{Bmatrix}+1{,}000009\\-0{,}004115\\-0{,}000050\end{Bmatrix} = +3{,}048930.$$

Für die beiden übrigen Wurzeln erhält man

$$x = -\frac{3{,}048930}{2} \pm 1{,}518294.\begin{Bmatrix}-0{,}064149\\+0{,}000512\\-0{,}000005\end{Bmatrix}.\sqrt{3} \text{ oder}$$

$$x = -1{,}524465 \pm 0{,}167364.$$

Sind daher a, b, c die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung, so findet man

$$a = +3{,}04893$$
$$b = -1{,}35710$$
$$c = -1{,}69183.$$

Genauer findet man diese Wurzeln §. 175. berechnet.

§. 138.

Jede vollständige Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

in welcher $A.B = C$ ist, hat die Wurzeln

$$x = -A;\ x = +\sqrt{-B} \text{ und } x = -\sqrt{-B}.$$

Denn es ist

$$(x + A)(x^2 + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + AB.$$

Setzt man diesen Ausdruck $= o$, so wird (§. 78.)

$$x + A = o \text{ und } x^2 + B = o, \text{ und hieraus}$$

$$x = -A,\ x^2 = -B, \text{ daher } x = \pm\sqrt{-B}.$$

Beispiel. Wäre die Gleichung

$$x^3 + 7x^2 - 12x - 84 = o$$

gegeben, so wird hier $A = 7$, $B = -12$, $AB = -84$ wie erfordert wird, daher sind die Wurzeln

$$x = -A = -7;\ x = \sqrt{-B} = 2\sqrt{3} \text{ und } x = -\sqrt{-B} = -2\sqrt{3}.$$

§. 139.

Jede vollständige Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = o,$$

in welcher $B = \frac{1}{3}A^2$ ist, hat eine Wurzel

$$x = -\tfrac{1}{3}A + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{27}A^3 - C)}.$$

Denn man erhält aus der gegebenen Gleichung, wenn auf beiden Seiten $\frac{1}{27}A^3 - C$ addirt und $B = \frac{1}{3}A^2$ gesetzt wird,

$$x^3 + Ax^2 + \tfrac{1}{3}A^2x + \tfrac{1}{27}A^3 = \tfrac{1}{27}A^3 - C \text{ oder}$$

$$(x + \tfrac{1}{3}A)^3 = \tfrac{1}{27}A^3 - C, \text{ oder } x + \tfrac{1}{3}A = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{27}A^3 - C)}, \text{ folglich}$$

$$x = -\tfrac{1}{3}A + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{27}A^3 - C)}.$$

Die beiden übrigen Wurzeln zu finden, setze man zur Abkürzung: $\frac{1}{27}A^3 - C = \alpha^3$, so wird $x = -\frac{1}{3}A + \alpha$, und man findet wegen $C = \frac{1}{27}A^3 - \alpha^3$

$$\frac{x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2x + C}{x + \frac{1}{3}A - \alpha} = x^2 + (\tfrac{2}{3}A + \alpha)\,x + (\tfrac{1}{9}A^2 + \tfrac{1}{3}\alpha A + \alpha^2).$$

Den gefundenen Quotienten $= o$ gesetzt und daraus die Wurzeln bestimmt, giebt

$$x = -\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{[(\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 - \tfrac{1}{9}A^2 - \tfrac{1}{3}\alpha A - \alpha^2]}$$

$$= -\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(-\tfrac{3}{4}\alpha^2)} = -\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{-3},$$

folglich erhält man für die beiden noch übrigen Wurzeln

$$x = -\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).\sqrt[3]{(\tfrac{1}{27}A^3 - C)}.$$

Beispiel. Von der Gleichung

$$x^3 + 18x^2 + 108x + 145 = o$$

die Wurzeln zu finden, wird hier $A = 18$, $B = 108$ also $\frac{1}{3}A^2 = 108$ wie erfordert wird, daher $\frac{1}{27}A^3 - C = 216 - 145 = 71$, folglich die reelle Wurzel

$$x = -6 + \sqrt[3]{71} = -6 + 4{,}1408178 = -1{,}8591822.$$

Für die beiden unmöglichen Wurzeln findet man

$$x = -6 - \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).\sqrt[3]{71}.$$

§. 140.

§. 140.

Aufgabe. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0 \; [I]$$

ganz allgemein zu bestimmen.

Auflösung. Man setze

$$x = p + q + r$$

wo p, q, r noch näher zu bestimmen sind, so wird

$$x^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + pr + qr) \text{ oder}$$
$$x^2 - (p^2 + q^2 + r^2) = 2(pq + pr + qr).$$

Diesen Ausdruck quadrirt, giebt

$$x^4 - 2(p^2+q^2+r^2)x^2 + (p^2+q^2+r^2)^2 = 4(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2) + 8pqr(p+q+r),$$

oder x statt $(p + q + r)$ gesetzt, giebt

$$x^4 - 2(p^2+q^2+r^2)x^2 - 8pqrx + (p^2+q^2+r^2)^2 - 4(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2) = 0.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der gegebenen Gleichung, und setzt

$$A = -2(p^2 + q^2 + r^2)$$
$$B = -8pqr$$
$$C = (p^2 + q^2 + r^2)^2 - 4(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2), \text{ so wird}$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = -\tfrac{1}{2}A \; [II] \text{ also}$$
$$C = \tfrac{1}{4}A^2 - 4(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2) \text{ oder}$$
$$p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = \tfrac{1}{16}(A^2 - 4C) \; [III]. \text{ Endlich wird}$$
$$pqr = -\tfrac{1}{8}B \text{ also}$$
$$p^2q^2r^2 = \tfrac{1}{64}B^2 \; [IV].$$

Nun sind von der Gleichung

$$y^3 - (p^2 + q^2 + r^2)y^2 + (p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2)y - p^2q^2r^2 = 0$$

nach §. 104., die entsprechenden Wurzeln $y = p^2$; $y = q^2$ und $y = r^2$. Setzt man nun in diese Gleichung die oben gefundenen Werthe [II. III. IV.], so erhält man

$y^3 + \frac{1}{2}Ay^2 + \frac{1}{16}(A^2 - 4C)y - \frac{1}{64}B^2 = 0$, und es sind ebenfalls p^2, q^2, r^2 die Wurzeln dieser Gleichung.

Man setze $y = \frac{1}{4}u$, so entsteht die Hülfsgleichung

$$u^3 + 2Au^2 + (A^2 - 4C)u - B^2 = 0,$$

und wenn α, β, γ die Wurzeln dieser Gleichung sind, so wird wegen $u = 4y$

$$\alpha = 4p^2;\; \beta = 4q^2;\; \gamma = 4r^2, \text{ oder}$$
$$p = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha};\; q = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta};\; r = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}. \; [V]$$

Nun war $x = p + q + r$, daher erhält man aus der Verbindung der vorstehenden Werthe von p, q, r, acht verschiedene Werthe für x. Weil aber die gegebene Gleichung [I] nur vier Wurzeln hat, so müssen unter diesen acht Werthen diejenigen gewählt werden, welche den Bedingungen der Auflösung entsprechen. Eine dieser Bedingungen ist, daß $pqr = -\frac{1}{8}B$ seyn soll, das heißt, wenn in der gegebenen Gleichung [I] B positiv ist, so muß das Produkt p, q, r,

negativ seyn. Nimmt man hienach für $p, q, r,$ diejenigen Werthe aus [V], welche ein negatives Produkt geben, so erhält man für $x = p + q + r$

$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}.$$

Wird hingegen vorausgesetzt, daß in der gegebenen Gleichung [I] der Koeffizient B negativ sey, so muß das Produkt $p, q, r,$ positiv seyn, und man erhält in diesem Falle für die Wurzeln der Gleichung

$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma}.$$

Hieraus folgt, daß wenn die Gleichung

$$(I)\ x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben ist, so sind die entsprechenden Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma})$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}),$$

und wenn die Gleichung

$$(II)\ x^4 + Ax^2 - Bx + C = 0$$

gegeben ist, so sind die entsprechenden Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma})$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma}),$$

wo durchgängig entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen zusammen gehören.

Die Werthe $\alpha, \beta, \gamma,$ sind die Wurzeln der Hülfsgleichung

$$u^3 + 2Au^2 + (A^2 - 4C)u - B^2 = 0.$$

Die vorstehende, von **Euler** zuerst bekannt gemachte, Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade, findet man in dessen Anleitung zur Algebra, 2. Theil, 15. Kapitel, beschrieben. Wegen anderer Auflösungen dieser Gleichungen s. m. **Klügels** mathematisches Wörterbuch, 2. Theil, Art. Gleichung.

1. Beispiel. Aus der Gleichung

$$x^4 - \tfrac{17}{2}x^2 + 10x - \tfrac{31}{16} = 0$$

die Wurzeln zu finden, wird hier

$A = -\tfrac{17}{2}$; $B = 10$; $C = -\tfrac{31}{16}$, also $A^2 - 4C = 80$ daher

$u^3 - 17u^2 + 80u - 100 = 0$. Hievon sind die Wurzeln (§. 129.) $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 10$, folglich nach (I)

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{5} \mp \sqrt{10})$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2} \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{10}),$$

oder wenn man alle vier Wurzeln durch $a, b, c, d,$ bezeichnet

$$a = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10});\quad c = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})$$
$$b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10});\quad d = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{10}).$$

2. **Beispiel.** Die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = o$$

zu finden, wird hier $A = -10$, $B = -4$, $C = 8$, also $A^2 - 4C = 68$, daher die Hülfsgleichung

$$u^3 - 20u^2 + 68u - 16 = o.$$

Hievon ist eine Wurzel $u = 4$, und man erhält

$$\frac{u^3 - 20u^2 + 68u - 16}{u - 4} = u^2 - 16u + 4, \text{ also}$$

$u^2 - 16u + 4 = o$ gesetzt, giebt für die beiden übrigen Wurzeln

$$u = 8 \pm \sqrt{(64 - 4)} = 8 \pm 2\sqrt{15} \text{ also}$$
$$\alpha = 4,\ \beta = 8 + 2\sqrt{15};\ \gamma = 8 - 2\sqrt{15}, \text{ daher nach §. 49.}$$
$$\sqrt{\alpha} = 2;\ \sqrt{\beta} = \sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3};\ \sqrt{\gamma} = \sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

folglich nach (II)

$$x = \tfrac{1}{2}[2 \pm (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \pm (\sqrt{5} - \sqrt{3})]$$
$$x = \tfrac{1}{2}[-2 \pm (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \mp (\sqrt{5} - \sqrt{3})],$$

oder wenn man alle vier Wurzeln mit $a, b, c, d,$ bezeichnet:

$$a = \tfrac{1}{2}[2 + \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}] = 1 + \sqrt{5}$$
$$b = \tfrac{1}{2}[2 - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}] = 1 - \sqrt{5}$$
$$c = \tfrac{1}{2}[-2 + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}] = -1 + \sqrt{3}$$
$$d = \tfrac{1}{2}[-2 - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}] = -1 - \sqrt{3}.$$

§. 141.

Aufgabe. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + Ahx^3 + Bh^2x^2 + Ah^3x + h^4 = o$$

zu finden.

Auflösung. Man setze $x = hy$ in die gegebene Gleichung, und dividire durch h^4, so wird $y^4 + Ay^3 + By^2 + Ay + 1 = o$ eine reziproke Gleichung, also sind nach §. 125. (I) die Wurzeln derselben

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - 1)} \text{ und}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 - 1)}, \text{ wo}$$
$$\alpha = -\tfrac{1}{2}A + \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B + 2)} \text{ und}$$
$$\beta = -\tfrac{1}{2}A - \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B + 2)} \text{ ist.}$$

Nun ist $y = \frac{x}{h}$, daher findet man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha h \pm h\sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - 1)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}\beta h \pm h\sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 - 1)}.$$

Beispiel. Die gegebene Gleichung

$$x^4 - 20x^3 - 75x^2 - 500x + 725 = 0 \text{ schreibe man}$$
$$x^4 - 4.5x^3 - 3.5^2x^2 - 4.5^3x + 5^4 = 0,$$

so wird hier $h = 5$, $A = -4$, $B = -3$, mithin
$\frac{1}{4}A^2 - B + 2 = 9$ also $\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B + 2)} = 3$, daher
$\alpha = 2 + 3 = 5$ und $\beta = 2 - 3 = -1$ folglich

$$x = \tfrac{1}{2}.5.5 \pm 5\sqrt{(\tfrac{25}{4} - 1)} = \tfrac{5}{2}(5 \pm \sqrt{21})$$
$$x = -\tfrac{1}{2}.5 \pm 5\sqrt{\tfrac{1}{4} - 1)} = \tfrac{5}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

Die vier Wurzeln der Gleichung sind daher

$$\tfrac{5}{2}(5 + \sqrt{21});\qquad \tfrac{5}{2}(-1 + \sqrt{-3});$$
$$\tfrac{5}{2}(5 - \sqrt{21});\qquad \tfrac{5}{2}(-1 - \sqrt{-3}).$$

§. 142.

Nach §. 78. ist

$$x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Q = (x - a)(x - b)\ldots(x - q),$$

wenn $a, b \ldots q$ die n Wurzeln der Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Q = 0$ sind. Die oben stehende Gleichung durch x^n dividirt, giebt

$$1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots + \frac{Q}{x^n} = \left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)\ldots\left(1 - \frac{q}{x}\right)$$

und dieser Ausdruck wird ebenfalls $= 0$, wenn x mit a, oder b, oder $c, \ldots$ vertauscht wird. Man setze $y = \frac{1}{x}$, so erhält man

$$1 + Ay + By^2 + \ldots + Qy^n = (1 - ay)(1 - by)\ldots(1 - qy).$$

Von diesem Ausdruck $1 + Ay + By^2 + \ldots$ sind $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots \frac{1}{q}$ die Wurzeln, weil derselbe nur für diese Werthe verschwindet. Setzt man daher

$$\frac{1}{a} = a';\ \frac{1}{b} = b';\ \ldots \frac{1}{q} = q', \text{ so wird}$$
$$a = \frac{1}{a'};\ b = \frac{1}{b'};\ \ldots q = \frac{1}{q'}, \text{ oder}$$
$$1 + Ay + By^2 \ldots + Qy^n = \left(1 - \frac{y}{a'}\right)\left(1 - \frac{y}{b'}\right)\ldots\left(1 - \frac{y}{q'}\right).$$

Wenn daher $a', b', c', \ldots p', q'$ Wurzeln der Gleichung

$$Fy = 1 + Ay + By^2 + \ldots + Py^{n-1} + Qy^n$$

sind, so erhält man auch

$$Fy = \left(1 - \frac{y}{a'}\right)\left(1 - \frac{y}{b'}\right)\left(1 - \frac{y}{c'}\right)\ldots\left(1 - \frac{y}{p'}\right)\left(1 - \frac{y}{q'}\right).$$

So sind z. B. von der Gleichung

$$Fy = 1 - \tfrac{53}{60}y + \tfrac{19}{120}y^2 + \tfrac{1}{30}y^3 - \tfrac{1}{120}y^4 = 0$$

die Wurzeln $+2$; $+3$; $+4$; -5; daher erhält man auch

$$Fy = \left(1 - \frac{y}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{3}\right)\left(1 - \frac{y}{4}\right)\left(1 + \frac{y}{5}\right).$$

§. 143.

Aufgabe. Es sey
$$Fx = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px^{r+1} + Qx^r$$
gegeben, wo $n > r$ ist; man soll die Faktoren dieses Ausdrucks finden.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung erhält man auch
$$\frac{Fx}{Ax^r} = x^{n-r} + \frac{B}{A}x^{n-r-1} + \ldots + \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A}.$$

Sind nun $a, b, c, \ldots p, q$ die Wurzeln der Gleichung
$$x^{n-r} + \frac{B}{A}x^{n-r-1} + \ldots + \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A} = 0,$$
so wird (§. 76.)
$$\frac{Fa}{Aa^r} = 0; \ \frac{Fb}{Ab^r} = 0; \ \frac{Fc}{Ac^r} = 0; \ldots\ldots \frac{Fq}{Aq^r} = 0;$$
also §. 78.
$$\frac{Fx}{Ax^r} = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-q) \text{ folglich}$$
$$Fx = Ax^r(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q).$$

Für $r = 0$ wird
$$Fx = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px + Q$$
und daraus
$$Fx = A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q).$$

§. 144.

Aufgabe. Den gegebenen Ausdruck
$$Fx = Ax^r + Bx^{r+1} + Cx^{r+2} + \ldots + Px^{r+n-1} + Qx^{r+n}$$
in Faktoren zu zerfällen.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung wird auch
$$\frac{Fx}{Ax^r} = 1 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}x^2 + \ldots + \frac{P}{A}x^{n-1} + \frac{Q}{A}x^n.$$

Sind nun $a, b, c, \ldots p, q$ die Wurzeln der Gleichung
$$1 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}x^2 + \ldots\ldots + \frac{P}{A}x^{n-1} + \frac{Q}{A}x^n = 0,$$
so wird
$$\frac{Fa}{Aa^r} = 0; \ \frac{Fb}{Ab^r} = 0; \ \frac{Fc}{Ac^r} = 0; \ldots \frac{Fq}{Aq^r} = 0;$$
also erhält man nach §. 142.
$$\frac{Fx}{Ax^r} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{x}{q}\right), \text{ folglich}$$
$$Fx = Ax^r\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{c}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right).$$

Für $r = o$ wird

$$Fx = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Px^{n-1} + Qx^n,$$

und daraus

$$Fx = A\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{c}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right).$$

§. 145.

Vollständige Untersuchungen über die Eigenschaften und die Auflösung der höhern Gleichungen findet man, von **Euler** und **Lagrange**, im dritten Bande der Michelsenschen Uebersetzung von Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Berlin, 1791, und in:

Traité de la résolution des équations numériques par J. L. Lagrange. Nouv. édit. Paris, 1808.

Fünftes Kapitel.

Einige allgemeine Ausdrücke für Kreisfunkzionen, nebst dem Cotesischen Lehrsatze.

§. 146.

Zur Erleichterung der Hinweisung bei den folgenden Untersuchungen, sollen hier diejenigen trigonometrischen Ausdrücke, welche man als bekannt voraussetzt, zusammengestellt werden. Eigentlich sind hiebei nur die nachstehenden Sätze (29), (30), (31) und (32) als erwiesen anzunehmen, weil sich die übrigen daraus leicht ableiten lassen. Hiebei ist vorausgesetzt, daß $\pi = 3{,}14159\ldots$ den halben Umfang eines Kreises für den Halbmesser $= 1$, und n jede ganze positive Zahl oder auch o bedeutet. Auch ist zu bemerken, daß, wenn doppelte Zeichen in den Ausdrücken vorkommen, alsdann entweder nur sämmtliche obere, oder sämmtliche untere Zeichen als zusammengehörig angesehen werden können. Das Quadrat und die höhern Potenzen der trigonometrischen Linien, z. B. $(\sin\alpha)^2$ wird man hier durch $\sin\alpha^2$ bezeichnen, weil in den Fällen, wo der Sinus von α^2 angezeigt werden soll, dies durch $\sin(\alpha^2)$ angedeutet werden kann, welches jedoch äußerst selten vorkommt. Man pflegt auch $\sin^2\alpha$ anstatt $\sin\alpha^2 = (\sin\alpha)^2$ zu schreiben.

1. $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = o$

2. $\sin\frac{4n+1}{2}\pi = \sin\left(-\frac{4n+3}{2}\pi\right) = +1$

3. $\sin\frac{4n+3}{2}\pi = \sin\left(-\frac{4n+1}{2}\pi\right) = -1$

4. $\sin\alpha = \pm \sin(2n\pi \pm \alpha) = \mp \sin[(2n+1)\pi \pm \alpha]$

5. $\sin\alpha = \mp \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi \pm \alpha\right) = \pm \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi \pm \alpha\right)$

6. $\sin\alpha = \cos\alpha \, . \, tg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha} = \frac{tg\,\alpha}{\sec\alpha} = \frac{1}{cosec\,\alpha}$

7. $\sin\alpha = \sqrt{(1-\cos\alpha^2)} = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{(1+tg\,\alpha^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}$

$= \frac{\sqrt{(\sec\alpha^2-1)}}{\sec\alpha} = 1 - cosvs\,\alpha = \sqrt{[sinvs\,\alpha\,.\,(2-sinvs\,\alpha)]}$

8. $\cos\left(\pm\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$

9. $\cos(\pm 2n\pi) = +1$

10. $\cos[\pm(2n+1)\pi] = -1$

11. $\cos\alpha = \cos(2n\pi \pm \alpha) = -\cos[(2n+1)\pi \pm \alpha]$

12. $\cos\alpha = \sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi \pm \alpha\right) = -\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi \pm \alpha\right)$

13. $\cos\alpha = \sin\alpha\,.\,\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{tg\,\alpha} = \frac{\cot\alpha}{cosec\,\alpha} = \frac{1}{\sec\alpha}$

14. $\cos\alpha = \sqrt{(1-\sin\alpha^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1+tg\,\alpha^2)}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}$

$= \frac{\sqrt{(cosec\,\alpha^2-1)}}{cosec\,\alpha} = 1 - sinvs\,\alpha = \sqrt{[cosvs\,\alpha\,(2-cosvs\,\alpha)]}$

15. $tg\,\alpha = \pm tg(2n\pi \pm \alpha) = \pm tg[(2n+1)\pi \pm \alpha]$

16. $tg\,\alpha = \mp \cot\left(\frac{4n+1}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp \cot\left(\frac{4n+3}{2} \pm \alpha\right)$

17. $tg\,\alpha = \sin\alpha\,.\,\sec\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sec\alpha}{cosec\,\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$

18. $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}} = \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}}{\cos\alpha} = \sqrt{(\sec\alpha^2-1)}$

$= \frac{1}{\sqrt{(cosec\,\alpha^2-1)}} = \frac{\sqrt{[(2-sinvs\,\alpha)\,sinvs\,\alpha]}}{1-sinvs\,\alpha} = \frac{1-cosvs\,\alpha}{\sqrt{[(2-cosvs\,\alpha)\,cosvs\,\alpha]}}$

19. $\cot\alpha = \pm \cot(2n\pi \pm \alpha) = \pm \cot[(2n+1)\pi \pm \alpha]$

20. $\cot\alpha = \mp tg\left(\frac{4n+1}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp tg\left(\frac{4n+3}{2}\pi \pm \alpha\right)$

21. $\cot\alpha = \cos\alpha\,.\,cosec\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{cosec\,\alpha}{\sec\alpha} = \frac{1}{tg\,\alpha}$

22. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\sec\alpha^2-1)}}$

$= \sqrt{(cosec\,\alpha^2-1)} = \frac{1-sinvs\,\alpha}{\sqrt{[(2-sinvs\,\alpha)\,sinvs\,\alpha]}} = \frac{\sqrt{[(2-cosvs\,\alpha)\,cosvs\,\alpha]}}{1-cosvs\,\alpha}$

23. $\sec\alpha = tg\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{cosec\,\alpha}{\cot\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

24. $\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}} = \sqrt{(1+tg\,\alpha^2)} = \frac{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}{\cot\alpha}$

$= \frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{(cosec\,\alpha^2-1)}} = \frac{1}{1-sinvs\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{[(2-cosvs\,\alpha)\,cosvs\,\alpha]}}$

25. $cosec\ \alpha = cot\ \alpha \,.\, sec\ \alpha = \frac{cot\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sec\ \alpha}{tg\ \alpha} = \frac{1}{sin\ \alpha}$

26. $cosec\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 - cos\ \alpha^2)}} = \frac{\sqrt{(1 + tg\ \alpha^2)}}{tg\ \alpha} = \sqrt{(1 + cot\ \alpha^2)}$

$= \frac{sec\ \alpha}{\sqrt{(sec\ \alpha^2 - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{[(2 - sinvs\ \alpha)\ sinvs\ \alpha]}} = \frac{1}{1 - cosvs\ \alpha}$

27. $sinvs\ \alpha = 1 - \sqrt{(1 - sin\ \alpha^2)} = 1 - cos\ \alpha = \frac{\sqrt{(tg\ \alpha^2 + 1)} - 1}{\sqrt{(tg\ \alpha^2 + 1)}}$

$= \frac{\sqrt{(cot\ \alpha^2 + 1)} - cot\ \alpha}{\sqrt{(cot\ \alpha^2 + 1)}} = \frac{sec\ \alpha - 1}{sec\ \alpha} = \frac{cosec\ \alpha - \sqrt{(cosec\ \alpha^2 - 1)}}{cosec\ \alpha} = 1 - \sqrt{[(2 - cosvs\ \alpha)\ cosvs\ \alpha]}$

28. $cosvs\ \alpha = 1 - sin\ \alpha = 1 - \sqrt{(1 - cos\ \alpha^2)} = \frac{\sqrt{(tg\ \alpha^2 + 1)} - tg\ \alpha}{\sqrt{(tg\ \alpha^2 + 1)}} = \frac{\sqrt{(cot\ \alpha^2 + 1)} - 1}{\sqrt{(cot\ \alpha^2 + 1)}}$

$= \frac{sec\ \alpha - \sqrt{(sec\ \alpha^2 - 1)}}{sec\ \alpha} = \frac{cosec\ \alpha - 1}{cosec\ \alpha} = 1 - \sqrt{[(2 - sinvs\ \alpha)\ sinvs\ \alpha]}$

29. $sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$

30. $sin\ (\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta$

31. $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta$

32. $cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sin\ \alpha\ sin\ \beta$

33. $sin\ \alpha\ sin\ \beta = \frac{1}{2}\ cos\ (\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\ cos\ (\alpha + \beta)$ [31. 32.]

34. $sin\ \alpha\ cos\ \beta = \frac{1}{2}\ sin\ (\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\ sin\ (\alpha - \beta)$ [29. 30.]

35. $cos\ \alpha\ sin\ \beta = \frac{1}{2}\ sin\ (\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\ sin\ (\alpha - \beta)$ [29. 30.]

36. $cos\ \alpha\ cos\ \beta = \frac{1}{2}\ cos\ (\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\ cos\ (\alpha + \beta)$ [31. 32.]

37. $sin\ \alpha + sin\ \beta = 2\ sin\ \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, cos\ \frac{\alpha - \beta}{2}$ [34.]

38. $sin\ \alpha - sin\ \beta = 2\ cos\ \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, sin\ \frac{\alpha - \beta}{2}$ [35.]

39. $cos\ \alpha + cos\ \beta = 2\ cos\ \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, cos\ \frac{\alpha - \beta}{2}$ [36.]

40. $cos\ \alpha - cos\ \beta = 2\ sin\ \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, sin\ \frac{\beta - \alpha}{2}$ [33.]

$= -2\ sin\ \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, sin\ \frac{\alpha - \beta}{2}$

41. $sin\ (\alpha + \beta) - sin\ \alpha = 2\ cos\ (\alpha + \frac{1}{2}\beta)\ sin\ \frac{1}{2}\beta$ [38.]

42. $1 = sin\ \alpha^2 + cos\ \alpha^2$

43. $sin\ \alpha^2 = \frac{1}{2}\ (1 - cos\ 2\alpha)$ [33.]

44. $cos\ \alpha^2 = \frac{1}{2}\ (1 + cos\ 2\alpha)$ [36.]

45. $sin\ 2\alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$ [29.]

46. $cos\ 2\alpha = cos\ \alpha^2 - sin\ \alpha^2$ [31.]

$= 2\ cos\ \alpha^2 - 1 = 1 - 2\ sin\ \alpha^2$ [40.]

47. $sin\ \alpha + cos\ \alpha = \sqrt{(1 + sin\ 2\alpha)}$ [42. zu 45. addirt]

48. $sin\ \alpha - cos\ \alpha = \sqrt{(1 - sin\ 2\alpha)}$ [42. 45.]

49. $sin\ \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\ 2\alpha)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\ 2\alpha)}$ [47. 48.]

50. $cos\ \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\ 2\alpha)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\ 2\alpha)}$ [47. 48.]

51. $\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 2\sin n\alpha \cdot \cos\alpha$ [37.]
$\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos n\alpha$ [38.]

52. $\cos(n-1)\alpha + \cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha \cdot \cos\alpha$ [39.]
$\cos(n-1)\alpha - \cos(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha \cdot \sin\alpha$ [40.]

53. $tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta}$ [6. 7. 11. 12.]

54. $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$ [6. 7. 11. 12.]

55. $tg\,\frac{\alpha \pm \beta}{2} = \frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ [37. 38. 39]

56. $\cot\frac{\alpha \pm \beta}{2} = \frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$ [37. 38. 40.]

57. $tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha^2} = \frac{2\cot\alpha}{\cot\alpha^2 - 1} = \frac{2}{\cot\alpha - tg\,\alpha}$ [53.]

58. $tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = cosec\,2\alpha - \cot 2\alpha$ [55. 56.]

59. $\cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha - tg\,\alpha}{2} = \frac{1 - tg\,\alpha^2}{2\,tg\,\alpha}$ [57. 22.]

60. $\cot\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = cosec\,2\alpha + \cot 2\alpha$ [58. 22.]

61. $cosec\,2\alpha = tg\,\alpha + \cot 2\alpha = \cot\alpha - \cot 2\alpha = \frac{tg\,\alpha + \cot\alpha}{2}$ [59. 60.]

62. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ [$n = 0$ in 4.]
63. $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$ [11.]
64. $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$ [15.]
65. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ [18.]
66. $\sec(-\alpha) = +\sec\alpha$ [23.]
67. $cosec(-\alpha) = -cosec\,\alpha$ [25.]
68. $\sin\alpha = \sin(\pm 2n\pi + \alpha)$ [29. 1. 9.]
69. $\cos\alpha = \cos(\pm 2n\pi + \alpha)$ [31. 9. 1.]

Wegen $\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$, und $tg\,\frac{1}{4}\pi = 1$ wird

70. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \alpha) = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{1}{4}\pi - \alpha)$ [29. 5.]

71. $\cos(\frac{1}{4}\pi + \alpha) = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}} = \sin(\frac{1}{4}\pi - \alpha)$ [31. 12.]

72. $tg(\frac{1}{4}\pi \pm \alpha) = \frac{1 \pm tg\,\alpha}{1 \mp tg\,\alpha}$ [53.]

73. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2 = \cos(\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2 = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$ [70. 45.]

74. $\sin(\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2 = \cos(\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2 = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$ [71. 45.]

75. $tg(\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2 = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$ [73. 74.]

76. $tg(\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2 = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$ [74. 73.]

Wenn für den Halbmesser = 1 von irgend einem Bogen α, die zugehörigen Werthe $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, ..., bekannt sind, und man will, wenn z. B. $\sin\alpha = a$ gegeben ist, den Bogen α entwickelt darstellen, so ist hienach offenbar der Bogen, welcher zu einem durch a bezeichneten Sinus gehört, $= \alpha$, welches man durch $Arc\,(\sin = a) = \alpha$ oder kürzer durch $Arc \sin a = \alpha$ bezeichnen kann, wo alsdann a den Sinus und α den zugehörigen Bogen bezeichnet. Hienach wird:

77. $Arc \sin a = \alpha$, wenn $\sin\alpha = a$ ist.

Auf gleiche Weise wird

78. $Arc \cos a = \alpha$, wenn $\cos\alpha = a$ ist;

79. $Arc\, tg\, a = \alpha$, wenn $tg\,\alpha = a$ ist;

u. s. w.

Auch erhält man, wenn hierin statt a der entsprechende Werth gesetzt wird:

80. $Arc \sin(\sin\alpha) = \alpha$

81. $Arc \cos(\cos\alpha) = \alpha$

82. $Arc\, tg\,(tg\,\alpha) = \alpha$

u. s. w.

Statt durch α den Bogen eines Kreises auszudrücken, dessen Halbmesser = 1 ist, kann auch α die Grade, Minuten, Sekunden u. s. w. des entsprechenden Winkels bezeichnen, und es wird alsdann $\pi = 180$ Grad oder $\pi = 180°$. Hienach erhält man:

$$\sin\alpha = \pm \sin(\pm\alpha) = \pm \sin(360° \pm \alpha) = \mp \sin(180° \pm \alpha)$$
$$= \mp \cos(90° \pm \alpha) = \pm \cos(270° \pm \alpha).$$
$$\cos\alpha = + \cos(\pm\alpha) = + \cos(360° \pm \alpha) = - \cos(180° \pm \alpha)$$
$$= + \sin(90° \pm \alpha) = - \sin(270° \pm \alpha).$$
$$tg\,\alpha = \pm tg(\pm\alpha) = \pm tg(360° \pm \alpha) = \pm tg(180° \pm \alpha)$$
$$= \mp \cot(90° \pm \alpha) = \mp \cot(270° \pm \alpha).$$
$$\cot\alpha = \pm \cot(\pm\alpha) = \pm \cot(360° \pm \alpha) = \pm \cot(180° \pm \alpha)$$
$$= \mp tg(90° \pm \alpha) = \mp tg(270° \pm \alpha).$$

Noch entsteht zur bessern Uebersicht folgende Zusammenstellung.

Bogen	Grade	Sin.	Cos.	Tang.	Cotang.	Sec.	Cosec.	Sinvers.	Cosinvers.
von o bis $\frac{1}{2}\pi$	von o bis 90	+	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{1}{2}\pi$ bis π	90 bis 180	+	−	−	−	−	+	+	+
π bis $\frac{3}{2}\pi$	180 bis 270	−	−	+	+	−	−	+	+
$\frac{3}{2}\pi$ bis 2π	270 bis 360	−	+	−	−	+	−	+	+
Für o	Für o	o	1	o	∞	1	∞	o	1
$\frac{1}{2}\pi$	90	1	o	∞	o	∞	1	1	o
π	180	o	−1	o	∞	−1	∞	2	1
$\frac{3}{2}\pi$	270	−1	o	∞	o	∞	−1	1	2

§. 147.

Man setze $n\alpha$ statt α und α statt β in [29.] und [31.], so wird

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha \;[I] \text{ und}$$
$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha \;[II].$$

Die erste Gleichung mit einer willkührlich angenommenen Größe t multiplizirt und dazu die zweite addirt, giebt

$$\cos(n+1)\alpha + t\sin(n+1)\alpha = (\cos\alpha + t\sin\alpha)\cos n\alpha + (\cos\alpha - \tfrac{1}{t}\sin\alpha)\,t\sin n\alpha.$$

Man setze $t = \sqrt{-1}$, so wird $\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-1}$, also $-\frac{1}{t} = +\sqrt{-1}$, daher

$$\cos(n+1)\alpha + \sin(n+1)\alpha.\sqrt{-1} = (\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})(\cos n\alpha + \sin n\alpha.\sqrt{-1}).$$

Hierin nach einander 1, 2, 3, . . . statt n und t statt $\sqrt{-1}$ gesetzt, giebt

$$\cos 2\alpha + t\sin 2\alpha = (\cos\alpha + t\sin\alpha)^2$$
$$\cos 3\alpha + t\sin 3\alpha = (\cos\alpha + t\sin\alpha)^3$$
$$\cos 4\alpha + t\sin 4\alpha = (\cos\alpha + t\sin\alpha)^4$$

u. s. w., daher für jede ganze Zahl n

$$\cos n\alpha + t\sin n\alpha = (\cos\alpha + t\sin\alpha)^n \;[III].$$

Die Gleichung [I] mit $t = \sqrt{-1}$ multiplizirt und von [II] abgezogen, giebt

$$\cos(n+1)\alpha - t\sin(n+1)\alpha = (\cos\alpha - t\sin\alpha)\cos n\alpha - (\cos\alpha + \tfrac{1}{t}\sin\alpha)\,t\sin n\alpha,$$

oder eben so wie vorhin

$$\cos(n+1)\alpha - t\sin(n+1)\alpha = (\cos\alpha - t\sin\alpha)(\cos n\alpha - t\sin n\alpha),$$

hierin 1, 2, 3 . . . statt n gesetzt, giebt

$$\cos 2\alpha - t\sin 2\alpha = (\cos\alpha - t\sin\alpha)^2$$
$$\cos 3\alpha - t\sin 3\alpha = (\cos\alpha - t\sin\alpha)^3$$
$$\cos 4\alpha - t\sin 4\alpha = (\cos\alpha - t\sin\alpha)^4$$

u. s. w., daher für jede ganze Zahl n

$$\cos n\alpha - \sin n\alpha.\sqrt{-1} = (\cos\alpha - \sin\alpha.\sqrt{-1})^n.$$

Hieraus und aus [III] folgt für jede ganze Zahl n

$$(I)\quad \cos n\alpha \pm \sin n\alpha.\sqrt{-1} = (\cos\alpha \pm \sin\alpha.\sqrt{-1})^n.$$

Setzt man daher

$$(II)\quad x = \cos\alpha \pm \sin\alpha.\sqrt{-1}, \text{ so wird}$$
$$(III)\quad x^n = \cos n\alpha \pm \sin n\alpha.\sqrt{-1}.$$

Daß diese Sätze auch noch gelten, wenn statt n ein Bruch gesetzt wird, beweist man auf folgende Art.

Es ist, wenn m eine positive ganze Zahl wäre,

$$(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^m = \cos m\alpha \pm \sin m\alpha \,.\, \sqrt{-1}, \text{ also auch}$$

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1} = (\cos m\alpha \pm \sin m\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}, \text{ daher auch}$$

$$(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^n = (\cos m\alpha \pm \sin m\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}. \text{ Es ist aber}$$

$$(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^n = \cos n\alpha \pm \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1}, \text{ daher}$$

$$(\cos m\alpha \pm \sin m\alpha \sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \cos n\alpha \pm \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1}.$$

Nun gilt dieser Satz für jeden möglichen Werth welchen α erhalten kann, daher muß er auch noch gelten wenn $\frac{\alpha}{m}$ statt α gesetzt wird. Dadurch erhält man

$$(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m}\alpha \pm \sin\frac{n}{m}\alpha \,.\, \sqrt{-1},$$

weshalb der Satz (*III*) auch gilt, wenn n ein positiver Bruch ist. Um solchen auch für jede negative Zahl zu beweisen, setze man $2n$ statt n in (*III*), so hat man auch:

$$\frac{(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^n}{(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{2n}} = \frac{\cos n\alpha \pm \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1}}{\cos 2n\alpha \pm \sin 2n\alpha \,.\, \sqrt{-1}} \,.\, [I].$$

Durch die Multiplikation wird:

$$(\cos 2n\alpha \pm \sin 2n\alpha \,.\, \sqrt{-1}) \,.\, (\cos n\alpha \mp \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1})$$
$$= \begin{Bmatrix} \cos n\alpha \,.\, \cos 2n\alpha \\ \sin n\alpha \,.\, \sin 2n\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \pm \sin 2n\alpha \,.\, \cos n\alpha \,.\, \sqrt{-1} \\ \mp \sin n\alpha \,.\, \cos 2n\alpha \,.\, \sqrt{-1} \end{Bmatrix}$$
$$= \cos n\alpha \pm \sin n\alpha \,,\, \sqrt{-1}$$

wegen (32) und (29) §. 146; also hieraus

$$\cos n\alpha \mp \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1} = \frac{\cos n\alpha \pm \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1}}{\cos 2n\alpha \pm \sin 2n\alpha \,.\, \sqrt{-1}}.$$

Nun ist nach (11) und (4) §. 146.

$$\cos n\alpha = \cos(-n\alpha) \text{ und } \mp \sin n\alpha = \pm \sin(-n\alpha) \text{ also auch}$$

$$\cos(-n\alpha) \pm \sin(-n\alpha).\sqrt{-1} = \frac{\cos n\alpha \pm \sin n\alpha \,.\, \sqrt{-1}}{\cos 2n\alpha \pm \sin 2n\alpha.\sqrt{-1}}.$$

Ferner ist

$$(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{-n} = \frac{(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^n}{(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{2n}}.$$

Werden daher diese zuletzt gefundenen Ausdrücke in die Gleichung [*I*] gesetzt, so findet man

$$(\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{-n} = \cos(-n\alpha) \pm \sin(-n\alpha) \,.\, \sqrt{-1}.$$

Es gilt daher der Ausdruck (*III*) ganz allgemein, n mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn.

Hienach erhält man auch

$$(IV)\ (\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{a+nh} = \cos(a+nh)\,\alpha \pm \sin(a+nh)\,\alpha \,.\, \sqrt{-1},$$

oder wenn man $a = 1$ und $h = \frac{\beta}{\alpha}$ setzt:

$$(V)\ (\cos\alpha \pm \sin\alpha \,.\, \sqrt{-1})^{1+n\frac{\beta}{\alpha}} = \cos(\alpha + n\beta) \pm \sin(\alpha + n\beta) \,.\, \sqrt{-1}.$$

§. 148.

Das Aufsuchen der Faktoren irgend eines Ausdrucks $a + bx + cx^2 + \ldots + qx^n$, hätte keine Schwierigkeiten, wenn man die einzelnen Wurzeln einer jeden Gleichung $a + bx + cx^2 + \ldots = 0$ anzugeben im Stande wäre. Denn wenn $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ Wurzeln dieser Gleichung sind, so müssen auch $\alpha - x, \alpha' - x, \alpha'' - x, \ldots$ Faktoren dieses Ausdrucks seyn. Dergleichen Faktoren wie $\alpha - x$, heißen **zweitheilige** und $x^2 + \alpha x + \beta$, **dreitheilige Faktoren** eines Ausdrucks.

Das Auffinden der Faktoren von $x^{2n} - 2a^n x^n \cos w + a^{2n}$ und $x^n \pm a^n$ verdient, wegen der häufig vorkommenden Anwendungen, eine besondere Untersuchung, wozu die folgende Auseinandersetzung die nähere Anleitung enthält.

Aus (I) §. 147. erhält man:

$$(I)\ y - (\cos z \pm \sin z \,.\, \sqrt{-1}) = 0, \text{ oder}$$
$$y - (\cos z + \sin z \,.\, \sqrt{-1}) = 0 \text{ und}$$
$$y - (\cos z - \sin z \,.\, \sqrt{-1}) = 0.$$

Beide letzte Ausdrücke mit einander multiplizirt, giebt

$$(II)\ y^2 - 2y \cos z + 1 = 0.$$

Ferner erhält man aus (III) §. 147.

$$y^n - (\cos nz + \sin nz \,.\, \sqrt{-1}) = 0 \text{ und}$$
$$y^n - (\cos nz - \sin nz \,.\, \sqrt{-1}) = 0,$$

daher, wenn man diese beide Ausdrücke mit einander multiplizirt,

$$(III)\ y^{2n} - 2y^n \cos nz + 1 = 0.$$

Ist daher der Ausdruck (II) gegeben, so folgt daraus auch (§. 147.) die Richtigkeit des Ausdrucks (III), und wenn für einen bestimmten Werth von $\cos z$ in (II) $y = \alpha$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, so muß auch $y = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung (III) seyn.

Aus (II) und (III) erhält man noch

$$(IV)\ 2 \cos z = y + \frac{1}{y}$$
$$(V)\ 2 \cos nz = y^n + \frac{1}{y^n}.$$

Erhält $\cos z$ in (II) einen bestimmten Werth, und es ist alsdann $y = \alpha$, so ist α eine Wurzel von den beiden Gleichungen (II) (III). Setzt man nun in (IV) und (V) $y = \alpha$, so erhält man dieselben Werthe, als wenn $y = \frac{1}{\alpha}$ gesetzt wird; daher haben beide Gleichungen (II) (III) zwei gemeinschaftliche Wurzeln. Aber (II) kann nicht mehr als zwei Wurzeln haben, und da diese zugleich Wurzeln von (III) sind, so muß (III) ohne Rest durch (II) theilbar seyn, oder (II) ist **ein dreitheiliger Faktor** von (III). Da nun (I) ein zweitheiliger Faktor von (II) ist, so muß auch (I) **ein zweitheiliger Faktor von** (III) seyn.

§. 149.

Für den Halbmesser $= 1$ sey $\pi = 3{,}14159 \ldots$ der halbe Umfang des Kreises und r irgend eine ganze Zahl welche auch $= 0$ seyn kann. Man setze in (II) und (III)

$y = \frac{x}{a}$ und $nz = 2r\pi \pm \omega$, so wird

$z = \frac{2r\pi \pm \omega}{n}$ und $\cos nz = \cos(2r\pi \pm \omega) = \cos\omega$ (§. 146.), daher erhält man für den Ausdruck

$$(I)\ x^{2n} - 2a^n x^n \cos\omega + a^{2n}$$

den dreitheiligen Faktor

$$(II)\ x^2 - 2ax \cos\frac{2r\pi \pm \omega}{n} + a^2.$$

Da nun r sowohl o als jede ganze Zahl bedeuten kann, so erhält man für (I) alle dreitheilige Faktoren, wenn man nach einander 0, 1, 2, 3 .... statt r setzt. Wird $2r$ größer als n, so entstehen Ausdrücke welche den schon gefundenen gleich sind; daher ist es nur nöthig, zur Auffindung sämmtlicher Faktoren, für $2r$, alle gerade Zahlen, die Null mit inbegriffen, zu nehmen, welche kleiner als n oder höchstens $= n$ sind.

§. 150.

Setzt man nach einander 2, 3, 4, ... statt n, so erhält man

I. für $n = 2$ und o; 1; statt r, den Ausdruck:

$$x^4 - 2a^2x^2 \cos\omega + a^4,$$

und hiezu die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos\frac{\omega}{2} + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos\frac{2\pi \pm \omega}{2} + a^2 = a^2 + 2ax \cos\frac{\omega}{2} + a^2.$$

II. Für $n = 3$ und 0; 1; statt r, den Ausdruck:

$$x^6 - 2a^3x^3 \cos\omega + a^6,$$

und hiezu die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos\frac{\omega}{3} + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos\frac{2\pi + \omega}{3} + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos\frac{2\pi - \omega}{3} + a^2.$$

III. Für $n = 4$ und 0; 1; 2; statt r, den Ausdruck:

$$x^8 - 2a^4x^4 \cos\omega + a^8,$$

und hiezu die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos\frac{\omega}{4} + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos\frac{2\pi + \omega}{4} + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos\frac{2\pi - \omega}{4} + a^2$$

$$x^2 - 2ax \cos\frac{4\pi \pm \omega}{4} + a^2 = x^2 + 2ax \cos\frac{\omega}{4} + a^2.$$

Auf diese Art kann man leicht weiter gehen, auch lassen sich eben so leicht die zugehörigen zweitheiligen Faktoren angeben.

§. 151.

Behalten n und r die angenommene Bedeutung (§. 149.), so ist $2r$ eine gerade, und $2r+1$ eine ungerade Zahl. Man setze $nz = 2r\pi$, also $z = \frac{2r\pi}{n}$, so ist (§. 146.) $\cos 2r\pi = +1$. Werden diese Ausdrücke in (I) (II) und (III) (§. 147.) gesetzt, so findet man:

$$y - \left(\cos\frac{2r}{n}\pi \pm \sin\frac{2r}{n}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = 0$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{2r}{n}\pi + 1 = 0 \text{ und}$$

$$y^{2n} - 2y^n + 1 = 0, \text{ oder } (y^n - 1)^2 = 0.$$

Es sind daher (§. 148.) die vorstehenden beiden Ausdrücke Faktoren von $(y^n - 1)^2$, daher auch von $y^n - 1$. Nur wenn der dreitheilige Faktor $y^2 - 2\cos\frac{2r}{n}\pi + 1$ zwei gleiche Wurzeln hat, so sind zwar beide Faktoren von $(y^n - 1)^2$, aber nur einer derselben ein Faktor von $y^n - 1$. Es ist daher nur derjenige dreitheilige Faktor zugleich ein Faktor von $y^n - 1$, welcher nicht zwei gleiche Wurzeln hat.

Man setze ferner $nz = (2r+1)\pi$, so ist $z = \frac{2r+1}{n}\pi$, und da $\cos(2r+1)\pi = -1$ ist, so findet man, wenn diese Werthe in (I) (II) und (III) (§. 148.) gesetzt werden,

$$y - \left(\cos\frac{2r+1}{n}\pi \pm \sin\frac{2r+1}{n}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = 0$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{2r+1}{n}\pi + 1 = 0 \text{ und}$$

$$y^{2n} + 2y^n + 1 = 0 \text{ oder } (y^n + 1)^2 = 0.$$

Es sind daher die vorstehenden zwei- und dreitheiligen Faktoren zugleich Faktoren von $(y^n + 1)^2$, oder mit der, in Absicht der dreitheiligen Faktoren, bemerkten Ausnahme auch Faktoren von $y^n + 1$.

Die beiden gefundenen Sätze lassen sich auf folgende Weise darstellen, wenn für jeden besondern Fall nur die oberen oder die unteren Zeichen als gültig angenommen werden:

Für den Ausdruck $y^n \pm 1$ ist

$$y - \left(\cos\frac{4r+1\pm1}{2n}\pi \pm \sin\frac{4r+1\pm1}{2n}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right)$$

ein zweitheiliger, und

$$y^2 - 2y\cos\frac{4r+1\pm1}{2n}\pi + 1$$

ein dreitheiliger Faktor.

Man setze $\frac{x}{a}$ statt y, so wird für den Ausdruck

$$(I)\ x^n \pm a^n;$$

$$(II)\quad x - a\left(\cos\frac{4r+1\pm 1}{2n}\pi \pm \sin\frac{4r+1\pm 1}{2n}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right)$$

ein zweitheiliger Faktor, und

$$(III)\quad x^2 - 2ax\cos\frac{4r+1\pm 1}{2n}\pi + a^2$$

ein dreitheiliger Faktor, mit Ausnahme desjenigen Falles, wo der dreitheilige Faktor zwei gleiche Wurzeln hat.

Weil r sowohl o als jede ganze Zahl bedeuten kann, so erhält man so viel zwei- und dreitheilige Faktoren, als man verschiedene Werthe 0, 1, 2, 3, . . . statt r annimmt. Allein man überzeugt sich leicht, daß wenn $2r$ größer als n angenommen wird, die vorhergegangenen Faktoren wieder erhalten werden, und daß man nicht mehr als die dem Ausdruck $x^n \pm a^n = o$ und seinen n Wurzeln entsprechende Anzahl Faktoren findet.

Der vorstehende Satz, nach welchem man die Faktoren des Ausdrucks $x^n \pm a^n$ angeben kann, heißt nach seinem Erfinder **Cotes**, der **Cotesische Lehrsatz**.

Cotes lehrt die Faktoren zuerst geometrisch darstellen. M. s.

Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis etc. per Rogerum Cotesium. Cantabrigiae, 1722. p. 114.

§. 152.

Für den Ausdruck $x^n + a^n$ sind die zweitheiligen Faktoren

$$x - a\left(\cos\frac{2r+1}{n}\pi \pm \sin\frac{2r+1}{n}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right)$$

und die dreitheiligen Faktoren

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2r+1}{n}\pi + a^2.$$

Wird dies auf besondere Fälle angewandt, indem man nach einander 2, 3, 4 . . . statt n und in jedem besondern Falle 0, 1, 2, 3, . . . statt r setzt, dann aber abbricht, wenn schon gefundene Resultate wieder vorkommen, oder wenn der dreitheilige Faktor zwei gleiche Wurzeln enthält, so findet man

I. für $n = 2$, den Ausdruck:

$$x^2 + a^2;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi + \sin\tfrac{1}{2}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = x - a\sqrt{-1}$$
$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin\tfrac{1}{2}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = x + a\sqrt{-1}$$

wegen $\cos\frac{1}{2}\pi = o$ und $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$.

II. Für $n = 3$, den Ausdruck:

$$x^3 + a^3;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{3}\pi + \sin\tfrac{1}{3}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = x - \tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}\right)$$
$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{3}\pi - \sin\tfrac{1}{3}\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = x - \tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}\right)$$
$$x - a\left(\cos\pi \pm \sin\pi \,.\, \sqrt{-1}\right) = x + a,$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{3}\pi + a^2 = x^2 - ax + a^2$$

wegen $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$.

III. Für $n = 4$, den Ausdruck:

$$x^4 + a^4;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos\tfrac{1}{4}\pi + \sin\tfrac{1}{4}\pi.\sqrt{-1}) = x - a(1 + \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x - a(\cos\tfrac{1}{4}\pi - \sin\tfrac{1}{4}\pi.\sqrt{-1}) = x - a(1 - \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x - a(\cos\tfrac{3}{4}\pi + \sin\tfrac{3}{4}\pi.\sqrt{-1}) = x + a(1 - \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x - a(\cos\tfrac{3}{4}\pi - \sin\tfrac{3}{4}\pi.\sqrt{-1}) = x + a(1 + \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{4}\pi + a^2 = x^2 - ax\sqrt{2} + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{3}{4}\pi + a^2 = x^2 + ax\sqrt{2} + a^2$$

wegen $\cos\frac{1}{4}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos\frac{3}{4}\pi = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\sin\frac{3}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

IV. Für $n = 5$, den Ausdruck:

$$x^5 + a^5;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos\tfrac{1}{5}\pi + \sin\tfrac{1}{5}\pi.\sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos\tfrac{1}{5}\pi - \sin\tfrac{1}{5}\pi.\sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos\tfrac{3}{5}\pi + \sin\tfrac{3}{5}\pi.\sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 - \sqrt{5}) + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos\tfrac{3}{5}\pi - \sin\tfrac{3}{5}\pi.\sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos\pi \pm \sin\pi.\sqrt{-1}) = x + a,$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{5}\pi + a^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})ax + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{3}{5}\pi + a^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})ax + a^2$$

wegen $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$; $\sin\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$; $\cos\frac{3}{5}\pi = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$; $\sin\frac{3}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$.

V. Für $n = 6$, den Ausdruck:

$$x^6 + a^6;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos\tfrac{1}{6}\pi + \sin\tfrac{1}{6}\pi.\sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} + \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos\tfrac{1}{6}\pi - \sin\tfrac{1}{6}\pi.\sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} - \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos\tfrac{1}{2}\pi + \sin\tfrac{1}{2}\pi.\sqrt{-1}) = x - a\sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin\tfrac{1}{2}\pi.\sqrt{-1}) = x + a\sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos\tfrac{5}{6}\pi + \sin\tfrac{5}{6}\pi.\sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} - \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos\tfrac{5}{6}\pi - \sin\tfrac{5}{6}\pi.\sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} + \sqrt{-1}),$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{6}\pi + a^2 = x^2 - ax\sqrt{3} + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{2}\pi + a^2 = x^2 + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{5}{6}\pi + a^2 = x^2 + ax\sqrt{3} + a^2$$

wegen $\sin \frac{1}{6} \pi = \sin \frac{5}{6} \pi = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$; $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$; $\cos \frac{5}{6} \pi = - \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

§. 153.

Nach §. 151. sind für den Ausdruck:

$$x^n - a^n;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a\left(\cos \frac{2r}{n} \pi \pm \sin \frac{2r}{n} \pi . \sqrt{-1}\right),$$

und die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2r}{n} \pi + a^2,$$

daher erhält man

I. für $n = 2$, den Ausdruck:

$$x^2 - a^2;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos 0 \pi \pm \sin 0 \pi . \sqrt{-1}) = x - a$$
$$x - a(\cos 1 \pi \pm \sin 1 \pi . \sqrt{-1}) = x + a$$

wegen $\cos 0 \pi = 1$; $\sin 0 \pi = \sin \pi = 0$; $\cos \pi = -1$.

II. Für $n = 3$, den Ausdruck:

$$x^3 - a^3;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos 0 \pi \pm \sin 0 \pi . \sqrt{-1}) = x - a$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{3} \pi + \sin \tfrac{2}{3} \pi . \sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2} a (1 - \sqrt{3} \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{3} \pi - \sin \tfrac{2}{3} \pi . \sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2} a (1 + \sqrt{3} \sqrt{-1}),$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{2}{3} \pi + a^2 = x^2 + ax + a^2$$

wegen $\cos \frac{2}{3} \pi = - \frac{1}{2}$; $\sin \frac{2}{3} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

III. Für $n = 4$, den Ausdruck:

$$x^4 - a^4;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos 0 \pi \pm \sin 0 \pi . \sqrt{-1}) = x - a$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{4} \pi + \sin \tfrac{2}{4} \pi . \sqrt{-1}) = x - a \sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{4} \pi - \sin \tfrac{2}{4} \pi . \sqrt{-1}) = x + a \sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos \pi \pm \sin \pi . \sqrt{-1}) = x + a,$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{2} \pi + a^2 = x^2 + a^2$$

wegen $\cos \frac{1}{2} \pi = 0$ und $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$.

IV. Für $n = 5$, den Ausdruck:

$$x^5 - a^5;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$x - a(\cos 0\pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$

$x - a(\cos \frac{2}{5}\pi + \sin \frac{2}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a\,[(1-\sqrt{5}) - \sqrt{(10+2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$

$x - a(\cos \frac{2}{5}\pi - \sin \frac{2}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a\,[(1-\sqrt{5}) + \sqrt{(10+2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$

$x - a(\cos \frac{4}{5}\pi + \sin \frac{4}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a\,[(1+\sqrt{5}) - \sqrt{(10-2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$

$x - a(\cos \frac{4}{5}\pi - \sin \frac{4}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a\,[(1+\sqrt{5}) + \sqrt{(10-2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$,

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2}{5}\pi + a^2 = x^2 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\,ax + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\frac{4}{5}\pi + a^2 = x^2 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\,ax + a^2$$

wegen $\cos\frac{2}{5}\pi = -\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$; $\cos\frac{4}{5}\pi = -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$; $\sin\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$; $\sin\frac{4}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$.

V. Für $n = 6$, den Ausdruck:

$$x^6 - a^6;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$x - a(\cos 0.\pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$

$x - a(\cos \frac{2}{6}\pi + \sin \frac{2}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x - \frac{1}{2}a\,(1 + \sqrt{3}\,\sqrt{-1})$

$x - a(\cos \frac{2}{6}\pi - \sin \frac{2}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x - \frac{1}{2}a\,(1 - \sqrt{3}\,\sqrt{-1})$

$x - a(\cos \frac{4}{6}\pi + \sin \frac{4}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}a\,(1 - \sqrt{3}\,\sqrt{-1})$

$x - a(\cos \frac{4}{6}\pi - \sin \frac{4}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}a\,(1 + \sqrt{3}\,\sqrt{-1})$

$x - a(\cos \pi \pm \sin \pi . \sqrt{-1}) = x + a$,

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax\cos\frac{1}{3}\pi + a^2 = x^2 - ax + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\frac{2}{3}\pi + a^2 = x^2 + ax + a^2$$

wegen $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{1}{3}\pi = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

Hiebei ist noch zu bemerken, daß aus der Verbindung der gefundenen zweitheiligen Faktoren noch mehrere dreitheilige entwickelt werden können.

§. 154.

Es ist nun auch leicht die n Wurzeln des Ausdrucks $\sqrt[n]{\pm 1}$ anzugeben, wenn man in $x^n \pm a^n = 0$ (§. 151.) $a = 1$ setzt, alsdann erhält man $x = \sqrt[n]{\pm 1}$.

Für verschiedene Werthe von n erhält man daher aus §. 152. und 153., wenn daselbst $a = 1$ gesetzt und daraus x entwickelt wird, die verschiedenen Ausdrücke für $\sqrt[n]{-1}$ und $\sqrt[n]{+1}$;

$$\sqrt[2]{-1} = \begin{cases} +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} +\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,\sqrt{-1}) \\ +\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,\sqrt{-1}) \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-1} = \begin{cases} +(1+\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ +(1-\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ -(1-\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ -(1+\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{-1} = \begin{cases} +\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})+\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ +\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ +\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ +\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{-1} = \begin{cases} +\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{-1}) \\ +\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{-1}) \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ -\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{-1}) \end{cases}$$

u. s. w.

$$\sqrt[2]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})+\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{+1} = \begin{cases} +1 \\ +\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ +\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -1 \end{cases}$$

u. s. w.

§. 155.

Nach §. 147. ist

$$\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1} = (\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})^n, \text{ und}$$
$$\cos n\alpha - \sin n\alpha . \sqrt{-1} = (\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1})^n.$$

Die Differenz beider Ausdrücke giebt $2 \sin n\alpha \sqrt{-1}$ und ihre Summe $2 \cos n\alpha$, daher ist

$$(I) \quad \sin n\alpha = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})^n - (\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

$$(II) \quad \cos n\alpha = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha \sqrt{-1})^n + (\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1})^n}{2}.$$

Aus (*I*) erhält man nach §. 45. (*II*).

$$(III) \quad \sin n\alpha = n_1 \sin\alpha \cos\alpha^{n-1} - n_3 \sin\alpha^3 \cos\alpha^{n-3} + n_5 \sin\alpha^5 \cos\alpha^{n-5} - \ldots\ldots$$

und aus (*II*) nach §. 44. (*II*)

$$(IV) \quad \cos n\alpha = \cos\alpha^n - n_2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^{n-2} + n_4 \sin\alpha^4 \cos\alpha^{n-4} - n_6 \sin\alpha^6 \cos\alpha^{n-6} + \ldots\ldots$$

Man setze nach einander 1, 2, 3, ... statt n und $\sin\alpha = s$, $\cos\alpha = c$, so erhält man

$$\sin\alpha = s;$$
$$\sin 2\alpha = 2sc;$$
$$\sin 3\alpha = 3sc^2 - s^3;$$
$$\sin 4\alpha = 4sc^3 - 4s^3c;$$
$$\sin 5\alpha = 5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5;$$
$$\sin 6\alpha = 6sc^5 - 20s^3c^3 + 6s^5c;$$

. . . .

$$\cos\alpha = c;$$
$$\cos 2\alpha = c^2 - s^2;$$
$$\cos 3\alpha = c^3 - 3s^2c;$$
$$\cos 4\alpha = c^4 - 6s^2c^2 + s^4;$$
$$\cos 5\alpha = c^5 - 10s^2c^3 + 5s^4c;$$

. . . .

§. 156.

Zusatz. Nach der angenommenen Bezeichnung der Binomialkoeffizienten (§. 20.) ist

$$\sin n\alpha = n_1 \sin\alpha \cos\alpha^{n-1} - n_3 \sin\alpha^3 \cos\alpha^{n-3} + n_5 \sin\alpha^5 \cos\alpha^{n-5} - \ldots.$$
$$\cos n\alpha = \cos\alpha^n - n_2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^{n-2} + n_4 \sin\alpha^4 \cos\alpha^{n-4} - \ldots.$$

oder weil $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$, so ist auch

$$(I) \quad \sin n\alpha = \cos\alpha^n (n_1 tg\,\alpha - n_3 tg\,\alpha^3 + n_5 tg\,\alpha^5 - n_7 tg\,\alpha^7 + \ldots)$$

$$(II) \quad \cos n\alpha = \cos\alpha^n (1 - n_2 tg\,\alpha^2 + n_4 tg\,\alpha^4 - n_6 tg\,\alpha^6 + \ldots), \text{ folglich}$$

$$(III) \quad tg\,n\alpha = \frac{n_1 tg\,\alpha - n_3 tg\,\alpha^3 + n_5 tg\,\alpha^5 - n_7 tg\,\alpha^7 + \ldots\ldots}{1 - n_2 tg\,\alpha^2 + n_4 tg\,\alpha^4 - n_6 tg\,\alpha^6 + \ldots.}$$

Wird nach einander 2, 3, 4, ... statt n und $tg\,\alpha = t$ gesetzt, so erhält man

$$tg\ 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$tg\ 3\alpha = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$tg\ 4\alpha = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$tg\ 5\alpha = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}$$

. . . .

§. 157.

Zur Entwickelung der Potenzen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ nach den Sinussen und Cosinussen ihrer vielfachen Bogen setze man

$\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1} = x$ und $\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1} = y$, so wird

$2\sin\alpha . \sqrt{-1} = x - y$; $2\cos\alpha = x + y$ und $xy = 1$.

Wird $x - y$ und $x + y$ auf die $n$te Potenz erhoben, alsdann durchgängig $xy = 1$ gesetzt, und die §. 20. angenommene Bezeichnung der Binomialkoeffizienten beibehalten, so findet man, wenn n eine ganze positive Zahl ist:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = x^n - n_1 x^{n-2} + n_2 x^{n-4} - n_3 x^{n-6} + \ldots\ldots \pm n_2 y^{n-4} \mp n_1 y^{n-2} \pm y^n; \quad [I]$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades und die unteren für ein ungerades n gelten. Ferner ist:

$$2^n \cos\alpha^n = x^n + n_1 x^{n-2} + n_2 x^{n-4} + n_3 x^{n-6} + n_4 x^{n-8} + \ldots\ldots + n_2 y^{n-4} + n_1 y^{n-2} + y^n. \quad [II]$$

Nach §. 147. (I. II.) ist auch

$x^r = \cos r\alpha + \sin r\alpha . \sqrt{-1}$ und $y^r = \cos r\alpha - \sin r\alpha . \sqrt{-1}$.

Giebt man nun r die verschiedenen Werthe n; $n-2$; $n-4$; ..... und setzt solche in die Gleichung [I], so wird:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = [\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1}] - n_1 [\cos(n-2)\alpha + \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1}] + \ldots\ldots$$
$$\ldots \mp n_1 [\cos(n-2)\alpha - \sin(n-2)\alpha \sqrt{-1}] \pm [\cos n\alpha - \sin n\alpha . \sqrt{-1}]. \quad [III]$$

Das zum $r$ten Binomialkoeffizienten gehörige Glied ist:

$$= n_r [\cos(n-2r)\alpha \pm \sin(n-2r)\alpha . \sqrt{-1}].$$

Ist n eine **gerade** Zahl, so gelten die oberen Zeichen in [III] und man erhält alsdann, wenn die von beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder zusammen addirt werden, nach §. 28.

$$2^n(\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = 2\cos n\alpha - 2.n_1 \cos(n-2)\alpha + 2.n_2 \cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots \mp 2.n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha \pm n_{\frac{1}{2}n} \cos o, \quad [IV]$$

wo $\cos o = 1$ ist, und das obere Zeichen für ein gerades, das untere aber für ein ungerades $\frac{n}{2}$ gilt.

Wird n **ungerade**, so gelten in [III] die untern Zeichen und man erhält (§. 28.)

$$2^n(\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = 2\sin n\alpha . \sqrt{-1} - 2.n_1 \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1} + \ldots\ldots \pm 2.n_{\frac{n-3}{2}} \sin 3\alpha \mp 2.n_{\frac{n-1}{2}} \sin\alpha, \quad [V]$$

wo das obere Zeichen für ein gerades und das untere für ein ungerades $\frac{n+1}{2}$ gilt.

Um nun die verschiedenen Fälle näher zu bestimmen, für welche $\sin\alpha^n$ entwickelt werden kann, bedeute r durchgängig jede ganze positive Zahl oder o, so wird für $n = 4r + 1$; $(\sqrt{-1})^n = \sqrt{-1}$ (§. 14.). Wenn man also in [V] durchgängig mit $2.\sqrt{-1}$ dividirt, so wird

(*I*) $2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \sin(n-4)\alpha - \ldots\ldots - \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+5)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-3)} \sin 3\alpha + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-1)} \sin \alpha;$$

wo $n = 4r + 1$ ist.

Für $n = 4r + 2$ wird $(\sqrt{-1})^n = -1$ (§. 14.); wenn daher dieser Werth in [*IV*] gesetzt und durchgängig durch 2 dividirt wird, so findet man

(*II*) $-2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \cos n\alpha - n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+2}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+1}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n};$$

wo $n = 4r + 2$ ist.

Für $n = 4r + 3$ ist $(\sqrt{-1})^n = -\sqrt{-1}$; wenn man daher diesen Werth in [*V*] setzt und durchgängig durch $2\sqrt{-1}$ dividirt, so wird

(*III*) $-2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \sin(n-4)\alpha - \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+5)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-3)} \sin 3\alpha - \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-1)} \sin \alpha;$$

wo $n = 4r + 3$ ist.

Für $n = 4r + 4$ ist $(\sqrt{-1})^n = +1$; diesen Werth in [*IV*] gesetzt und durchgängig durch 2 dividirt, giebt

(*IV*) $2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \cos n\alpha - n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots - \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+2}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+1}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n};$$

wo $n = 4r + 4$ ist.

Endlich erhält man aus [*II*], wenn statt x und y die entsprechenden Werthe gesetzt werden:

$$2^n \cos \alpha^n = [\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1}] + n_1 [\cos(n-2)\alpha + \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1}] + \ldots\ldots$$
$$\ldots + n_1 [\cos(n-2)\alpha - \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1}] + [\cos n\alpha - \sin n\alpha . \sqrt{-1}].$$

Werden die von beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder addirt, so findet man, wenn n eine gerade Zahl ist (§. 28.)

$$2^n \cos \alpha^n = 2 \cos n\alpha + 2 . n_1 \cos(n-2)\alpha + 2 . n_2 \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + 2 . n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha + n_{\frac{1}{2}n} \cos 0,$$

und wenn n ungerade ist (§. 28.)

$$2^n \cos \alpha^n = 2 \cos n\alpha + 2 . n_1 \cos(n-2)\alpha + 2 . n_2 \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + 2 . n_{\frac{n-3}{2}} \cos 3\alpha + 2 . n_{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha.$$

Dividirt man die beiden zuletzt gefundenen Ausdrücke durchgängig durch 2, so ist

(*V*) $2^{n-1} \cos \alpha^n$

$$= \cos n\alpha + n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+2}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+1}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n};$$

wo n eine **gerade** Zahl ist.

(*VI*) $2^{n-1} \cos \alpha^n$

$$= \cos n\alpha + n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+5)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-3)} \cos 3\alpha + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-1)} \cos \alpha;$$

wo n eine **ungerade** Zahl ist.

Beim Gebrauche dieser Ausdrücke ist zu bemerken, daß,

wenn $n =$

2; 6; 10; 14; 18; .... so gelten die Ausdrücke (*II*) und (*V*)
3; 7; 11; 15; 19; .... so gelten die Ausdrücke (*III*) und (*VI*)
4; 8; 12; 16; 20; .... so gelten die Ausdrücke (*IV*) und (*V*)
5; 9; 13; 17; 21; .... so gelten die Ausdrücke (*I*) und (*VI*)

Hienach sind folgende besondere Werthe berechnet

$$2 \sin\alpha^2 = -\cos 2\alpha + 1$$
$$4 \sin\alpha^3 = -\sin 3\alpha + 3 \sin\alpha$$
$$8 \sin\alpha^4 = +\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3$$
$$16 \sin\alpha^5 = +\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin\alpha$$
$$32 \sin\alpha^6 = -\cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha - 15 \cos 2\alpha + 10$$
$$64 \sin\alpha^7 = -\sin 7\alpha + 7 \sin 5\alpha - 21 \sin 3\alpha + 35 \sin\alpha$$
$$128 \sin\alpha^8 = +\cos 8\alpha - 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha - 56 \cos 2\alpha + 35$$

. . . .

$$2 \cos\alpha^2 = \cos 2\alpha + 1$$
$$4 \cos\alpha^3 = \cos 3\alpha + 3 \cos\alpha$$
$$8 \cos\alpha^4 = \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3$$
$$16 \cos\alpha^5 = \cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos\alpha$$
$$32 \cos\alpha^6 = \cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha + 10$$
$$64 \cos\alpha^7 = \cos 7\alpha + 7 \cos 5\alpha + 21 \cos 3\alpha + 35 \cos\alpha$$
$$128 \cos\alpha^8 = \cos 8\alpha + 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha + 56 \cos 2\alpha + 35$$

. . . .

Für die Fälle, in welchen n keine positive ganze Zahl ist, hat **Poisson** zuerst Untersuchungen bekannt gemacht. M. s.

Poisson, Note sur le développement des puissances des sinus et des cosinus, etc. Correspondance sur l'école polytechnique, par Hachette, Tome II. Paris, 1813. *p.* 212—217.

Wegen der neuesten hieher gehörigen Untersuchungen s. m.

A. L. **Crelle**, Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten. Berlin, 1823. S. 321. u. f.

M. **Ohm**, Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik. Berlin, 1823. S. 8. u. f.

§. 158.

Noch andere allgemeine Ausdrücke für trigonometrische Größen, sind §. 168. 174. 194. 199. 201. 210. 286. 304. 388. 424. 473. 506. und 965. entwickelt.

Sechstes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 159.

Die Exponenten von Potenzen, welche aus gleichen Wurzeln oder Grundzahlen entstanden sind, heißen **Logarithmen** oder **Verhältnißzahlen** derselben. Die Potenzen werden die den Logarithmen **zugehörigen Zahlen** (**Logarithmanden**) genannt. Wäre z. B.

$$a^b = B,$$

so ist b der Logarithme der Zahl B für die Grundzahl a.

Diese **Grundzahl** a heißt auch die **Basis**, und alle Logarithmen, welche aus einerlei Grundzahlen entstanden sind, heißen Logarithmen von einerlei **Systeme**.

Es giebt daher so viel verschiedene logarithmische Systeme, als man verschiedene Grundzahlen annehmen kann.

Bezeichnet man die Logarithmen eines jeden Systems überhaupt durch $Lg.$; so ist $Lg\ B = b$, also b der Logarithme und B die zugehörige Zahl für die Grundzahl a, und man kann hier und in der Folge allemal dasjenige, was von den so bezeichneten Logarithmen bewiesen ist, auf jedes besondere System anwenden, dessen Wurzel $= a$ gesetzt wird.

Für besondere Logarithmen schreibt man: $Lg.\ nat.$; $Lg.\ brigg.$; u. s. w.

§. 160.

Wäre $a^b = B$, so ist §. 159. $b = Lg\ B$, daher

$$(I)\quad a^{Lg\,B} = B.$$

Weil $a^{Lg\,B} = B$, also auch

$a^{Lg\,C} = C$ ist, so folgt hieraus

$a^{Lg\,B + Lg\,C} = B\,.\,C$, daher nach (I)

$$(II)\quad Lg\ BC = Lg\ B + Lg\ C.$$

Eben so findet man

$$(III)\quad Lg\ \frac{B}{C} = Lg\ B - Log\ C.$$

Für $a^b = B$ wird $a^{nb} = B^n$, also $Lg\ B^n = nb$. Aber $b = Lg\ B\ (I)$, folglich

$$(IV)\quad Lg\ B^n = n\ Lg\ B.$$

Für $n = \frac{1}{m}$ erhält man auf gleiche Weise

$$(V)\quad Lg\ B^{\frac{1}{m}} = Lg\ \sqrt[m]{B} = \frac{1}{m}\ Lg\ B.$$

$$(II)\quad x - a\left(\cos\frac{4r+1\pm1}{2n}\pi \pm \sin\frac{4r+1\pm1}{2n}\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$$

ein zweitheiliger Faktor, und

$$(III)\quad x^2 - 2ax\cos\frac{4r+1\pm1}{2n}\pi + a^2$$

ein dreitheiliger Faktor, mit Ausnahme desjenigen Falles, wo der dreitheilige Faktor zwei gleiche Wurzeln hat.

Weil r sowohl o als jede ganze Zahl bedeuten kann, so erhält man so viel zwei- und dreitheilige Faktoren, als man verschiedene Werthe 0, 1, 2, 3, . . . statt r annimmt. Allein man überzeugt sich leicht, daß wenn $2r$ größer als n angenommen wird, die vorhergegangenen Faktoren wieder erhalten werden, und daß man nicht mehr als die dem Ausdruck $x^n \pm a^n = 0$ und seinen n Wurzeln entsprechende Anzahl Faktoren findet.

Der vorstehende Satz, nach welchem man die Faktoren des Ausdrucks $x^n \pm a^n$ angeben kann, heißt nach seinem Erfinder **Cotes**, der **Cotesische Lehrsatz**.

Cotes lehrt die Faktoren zuerst geometrisch darstellen. M. s.

Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis etc. per Rogerum Cotesium. Cantabrigiae, 1722. *p.* 114.

§. 152.

Für den Ausdruck $x^n + a^n$ sind die zweitheiligen Faktoren

$$x - a\left(\cos\frac{2r+1}{n}\pi \pm \sin\frac{2r+1}{n}\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$$

und die dreitheiligen Faktoren

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2r+1}{n}\pi + a^2.$$

Wird dies auf besondere Fälle angewandt, indem man nach einander 2, 3, 4 . . . statt n und in jedem besondern Falle 0, 1, 2, 3, . . . statt r setzt, dann aber abbricht, wenn schon gefundene Resultate wieder verkommen, oder wenn der dreitheilige Faktor zwei gleiche Wurzeln enthält, so findet man

I. für $n = 2$, den Ausdruck:

$$x^2 + a^2;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi + \sin\tfrac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{-1}\right) = x - a\sqrt{-1}$$
$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin\tfrac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{-1}\right) = x + a\sqrt{-1}$$

wegen $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ und $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$.

II. Für $n = 3$, den Ausdruck:

$$x^3 + a^3;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{3}\pi + \sin\tfrac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{-1}\right) = x - \tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}\right)$$
$$x - a\left(\cos\tfrac{1}{3}\pi - \sin\tfrac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{-1}\right) = x - \tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}\right)$$
$$x - a\left(\cos\pi \pm \sin\pi \cdot \sqrt{-1}\right) = x + a,$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{3}\pi + a^2 = x^2 - ax + a^2$$

wegen $\cos \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}$; $\sin \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos \pi = -1$ und $\sin \pi = 0$.

III. Für $n = 4$, den Ausdruck:

$$x^4 + a^4;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin \tfrac{1}{4}\pi . \sqrt{-1}) = x - a(1 + \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x - a(\cos \tfrac{1}{4}\pi - \sin \tfrac{1}{4}\pi . \sqrt{-1}) = x - a(1 - \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x - a(\cos \tfrac{3}{4}\pi + \sin \tfrac{3}{4}\pi . \sqrt{-1}) = x + a(1 - \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x - a(\cos \tfrac{3}{4}\pi - \sin \tfrac{3}{4}\pi . \sqrt{-1}) = x + a(1 + \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{4}\pi + a^2 = x^2 - ax\sqrt{2} + a^2$$
$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{3}{4}\pi + a^2 = x^2 + ax\sqrt{2} + a^2$$

wegen $\cos \tfrac{1}{4}\pi = \sin \tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $\cos \tfrac{3}{4}\pi = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und $\sin \tfrac{3}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

IV. Für $n = 5$, den Ausdruck:

$$x^5 + a^5;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos \tfrac{1}{5}\pi + \sin \tfrac{1}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos \tfrac{1}{5}\pi - \sin \tfrac{1}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos \tfrac{3}{5}\pi + \sin \tfrac{3}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 - \sqrt{5}) + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos \tfrac{3}{5}\pi - \sin \tfrac{3}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{4}a[(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\sqrt{-1}]$$
$$x - a(\cos \pi \pm \sin \pi . \sqrt{-1}) = x + a,$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{5}\pi + a^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})ax + a^2$$
$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{3}{5}\pi + a^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})ax + a^2$$

wegen $\cos \tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$; $\sin \tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$; $\cos \tfrac{3}{5}\pi = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$; $\sin \tfrac{3}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$.

V. Für $n = 6$, den Ausdruck:

$$x^6 + a^6;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos \tfrac{1}{6}\pi + \sin \tfrac{1}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} + \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos \tfrac{1}{6}\pi - \sin \tfrac{1}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x - \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} - \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos \tfrac{1}{2}\pi + \sin \tfrac{1}{2}\pi . \sqrt{-1}) = x - a\sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos \tfrac{1}{2}\pi - \sin \tfrac{1}{2}\pi . \sqrt{-1}) = x + a\sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos \tfrac{5}{6}\pi + \sin \tfrac{5}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} - \sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos \tfrac{5}{6}\pi - \sin \tfrac{5}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} + \sqrt{-1}),$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{6}\pi + a^2 = x^2 - ax\sqrt{3} + a^2$$
$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{2}\pi + a^2 = x^2 + a^2$$
$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{5}{6}\pi + a^2 = x^2 + ax\sqrt{3} + a^2$$

wegen $\sin \frac{1}{6}\pi = \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$; $\cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

§. 153.

Nach §. 151. sind für den Ausdruck:

$$x^n - a^n;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a\left(\cos \frac{2r}{n}\pi \pm \sin \frac{2r}{n}\pi . \sqrt{-1}\right),$$

und die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2r}{n}\pi + a^2,$$

daher erhält man

I. für $n = 2$, den Ausdruck:

$$x^2 - a^2;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos 0\pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$$
$$x - a(\cos 1\pi \pm \sin 1\pi . \sqrt{-1}) = x + a$$

wegen $\cos 0\pi = 1$; $\sin 0\pi = \sin \pi = 0$; $\cos \pi = -1$.

II. Für $n = 3$, den Ausdruck:

$$x^3 - a^3;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos 0\pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{3}\pi + \sin \tfrac{2}{3}\pi . \sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2}a(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{3}\pi - \sin \tfrac{2}{3}\pi . \sqrt{-1}) = x + \tfrac{1}{2}a(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{2}{3}\pi + a^2 = x^2 + ax + a^2$$

wegen $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

III. Für $n = 4$, den Ausdruck:

$$x^4 - a^4;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$$x - a(\cos 0\pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{4}\pi + \sin \tfrac{2}{4}\pi . \sqrt{-1}) = x - a\sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos \tfrac{2}{4}\pi - \sin \tfrac{2}{4}\pi . \sqrt{-1}) = x + a\sqrt{-1}$$
$$x - a(\cos \pi \pm \sin \pi . \sqrt{-1}) = x + a,$$

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \tfrac{1}{2}\pi + a^2 = x^2 + a^2$$

wegen $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ und $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$.

IV. Für $n = 5$, den Ausdruck:

$$x^5 - a^5;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$x - a(\cos 0\pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$
$x - a(\cos \frac{2}{5}\pi + \sin \frac{2}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a[(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$
$x - a(\cos \frac{2}{5}\pi - \sin \frac{2}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a[(1 - \sqrt{5}) + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$
$x - a(\cos \frac{4}{5}\pi + \sin \frac{4}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a[(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$
$x - a(\cos \frac{4}{5}\pi - \sin \frac{4}{5}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4}a[(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} . \sqrt{-1}]$,

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2}{5}\pi + a^2 = x^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})ax + a^2$$
$$x^2 - 2ax \cos \frac{4}{5}\pi + a^2 = x^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})ax + a^2$$

wegen $\cos \frac{2}{5}\pi = -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$; $\cos \frac{4}{5}\pi = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$; $\sin \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$; $\sin \frac{4}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

V. Für $n = 6$, den Ausdruck:

$$x^6 - a^6;$$

die zweitheiligen Faktoren:

$x - a(\cos 0 . \pi \pm \sin 0\pi . \sqrt{-1}) = x - a$
$x - a(\cos \frac{2}{6}\pi + \sin \frac{2}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x - \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})$
$x - a(\cos \frac{2}{6}\pi - \sin \frac{2}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x - \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})$
$x - a(\cos \frac{4}{6}\pi + \sin \frac{4}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})$
$x - a(\cos \frac{4}{6}\pi - \sin \frac{4}{6}\pi . \sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})$
$x - a(\cos \pi \pm \sin \pi . \sqrt{-1}) = x + a$,

die dreitheiligen Faktoren:

$$x^2 - 2ax \cos \frac{1}{3}\pi + a^2 = x^2 - ax + a^2$$
$$x^2 - 2ax \cos \frac{2}{3}\pi + a^2 = x^2 + ax + a^2$$

wegen $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{1}{3}\pi = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

Hiebei ist noch zu bemerken, daß aus der Verbindung der gefundenen zweitheiligen Faktoren noch mehrere dreitheilige entwickelt werden können.

§. 154.

Es ist nun auch leicht die n Wurzeln des Ausdrucks $\sqrt[n]{\pm 1}$ anzugeben, wenn man in $x^n \pm a^n = 0$ (§. 151.) $a = 1$ setzt, alsdann erhält man $x = \sqrt[n]{\pm 1}$.

Für verschiedene Werthe von n erhält man daher aus §. 152. und 153., wenn daselbst $a = 1$ gesetzt und daraus x entwickelt wird, die verschiedenen Ausdrücke für $\sqrt[n]{-1}$ und $\sqrt[n]{+1}$;

$$\sqrt[2]{-1} = \begin{cases} +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} +\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ +\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-1} = \begin{cases} +(1+\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ +(1-\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ -(1-\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ -(1+\sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{-1} = \begin{cases} +\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})+\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ +\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ +\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ +\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{-1} = \begin{cases} +\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{-1}) \\ +\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{-1}) \\ +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ -\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{-1}) \end{cases}$$

u. s. w.

$$\sqrt[2]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \\ -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{+1} = \begin{cases} +1 \\ -\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{5})+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \\ -\tfrac{1}{4}[(1+\sqrt{5})+\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}] \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{+1} = \begin{cases} +1 \\ +\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ +\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}) \\ -1 \end{cases}$$

u. s. w.

§. 155.

Nach §. 147. ist

$$\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1} = (\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})^n, \text{ und}$$
$$\cos n\alpha - \sin n\alpha . \sqrt{-1} = (\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1})^n.$$

Die Differenz beider Ausdrücke giebt $2 \sin n\alpha \sqrt{-1}$ und ihre Summe $2 \cos n\alpha$, daher ist

$$(I) \quad \sin n\alpha = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})^n - (\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}.$$

$$(II) \quad \cos n\alpha = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha \sqrt{-1})^n + (\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1})^n}{2}.$$

Aus (*I*) erhält man nach §. 45. (*II*).

$$(III) \quad \sin n\alpha = n_1 \sin\alpha \cos\alpha^{n-1} - n_3 \sin\alpha^3 \cos\alpha^{n-3} + n_5 \sin\alpha^5 \cos\alpha^{n-5} - \ldots\ldots$$

und aus (*II*) nach §. 44. (*II*)

$$(IV) \quad \cos n\alpha = \cos\alpha^n - n_2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^{n-2} + n_4 \sin\alpha^4 \cos\alpha^{n-4} - n_6 \sin\alpha^6 \cos\alpha^{n-6} + \ldots\ldots$$

Man setze nach einander 1, 2, 3, ... statt n und $\sin\alpha = s$, $\cos\alpha = c$, so erhält man

$$\sin\alpha = s;$$
$$\sin 2\alpha = 2sc;$$
$$\sin 3\alpha = 3sc^2 - s^3;$$
$$\sin 4\alpha = 4sc^3 - 4s^3c;$$
$$\sin 5\alpha = 5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5;$$
$$\sin 6\alpha = 6sc^5 - 20s^3c^3 + 6s^5c;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\alpha = c;$$
$$\cos 2\alpha = c^2 - s^2;$$
$$\cos 3\alpha = c^3 - 3s^2c;$$
$$\cos 4\alpha = c^4 - 6s^2c^2 + s^4;$$
$$\cos 5\alpha = c^5 - 10s^2c^3 + 5s^4c;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 156.

Zusatz. Nach der angenommenen Bezeichnung der Binomialkoeffizienten (§. 20.) ist

$$\sin n\alpha = n_1 \sin\alpha \cos\alpha^{n-1} - n_3 \sin\alpha^3 \cos\alpha^{n-3} + n_5 \sin\alpha^5 \cos\alpha^{n-5} - \ldots.$$
$$\cos n\alpha = \cos\alpha^n - n_2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^{n-2} + n_4 \sin\alpha^4 \cos\alpha^{n-4} - \ldots.$$

oder weil $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$, so ist auch

$$(I) \quad \sin n\alpha = \cos\alpha^n (n_1\, tg\,\alpha - n_3\, tg\,\alpha^3 + n_5\, tg\,\alpha^5 - n_7\, tg\,\alpha^7 + \ldots)$$
$$(II) \quad \cos n\alpha = \cos\alpha^n (1 - n_2\, tg\,\alpha^2 + n_4\, tg\,\alpha^4 - n_6\, tg\,\alpha^6 + \ldots), \text{ folglich}$$
$$(III) \quad tg\, n\alpha = \frac{n_1\, tg\,\alpha - n_3\, tg\,\alpha^3 + n_5\, tg\,\alpha^5 - n_7\, tg\,\alpha^7 + \ldots\ldots}{1 - n_2\, tg\,\alpha^2 + n_4\, tg\,\alpha^4 - n_6\, tg\,\alpha^6 + \ldots\ldots}$$

Wird nach einander 2, 3, 4, ... statt n und $tg\,\alpha = t$ gesetzt, so erhält man

$$tg\ 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$tg\ 3\alpha = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$tg\ 4\alpha = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$tg\ 5\alpha = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}$$

. . . .

§. 157.

Zur Entwickelung der Potenzen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ nach den Sinussen und Cosinussen ihrer vielfachen Bogen setze man

$\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1} = x$ und $\cos\alpha - \sin\alpha . \sqrt{-1} = y$, so wird
$2\sin\alpha . \sqrt{-1} = x - y$; $2\cos\alpha = x + y$ und $xy = 1$.

Wird $x - y$ und $x + y$ auf die $n$te Potenz erhoben, alsdann durchgängig $xy = 1$ gesetzt, und die §. 20. angenommene Bezeichnung der Binomialkoeffizienten beibehalten, so findet man, wenn n eine ganze positive Zahl ist:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = x^n - n_1 x^{n-2} + n_2 x^{n-4} - n_3 x^{n-6} + \ldots\ldots \pm n_2 y^{n-4} \mp n_1 y^{n-2} \pm y^n; \quad [I]$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades und die unteren für ein ungerades n gelten. Ferner ist:

$$2^n \cos\alpha^n = x^n + n_1 x^{n-2} + n_2 x^{n-4} + n_3 x^{n-6} + n_4 x^{n-8} + \ldots\ldots + n_2 y^{n-4} + n_1 y^{n-2} + y^n. \quad [II]$$

Nach §. 147. (*I. II.*) ist auch

$$x^r = \cos r\alpha + \sin r\alpha . \sqrt{-1} \text{ und } y^r = \cos r\alpha - \sin r\alpha . \sqrt{-1}.$$

Giebt man nun r die verschiedenen Werthe n; $n - 2$; $n - 4$; ..... und setzt solche in die Gleichung [*I*], so wird:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = [\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1}] - n_1 [\cos(n-2)\alpha + \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1}] + \ldots\ldots$$
$$\ldots \mp n_1 [\cos(n-2)\alpha - \sin(n-2)\alpha \sqrt{-1}] \pm [\cos n\alpha - \sin n\alpha . \sqrt{-1}]. \quad [III]$$

Das zum $r$ten Binomialkoeffizienten gehörige Glied ist:

$$= n_r [\cos(n - 2r)\alpha \pm \sin(n - 2r)\alpha . \sqrt{-1}].$$

Ist n eine **gerade** Zahl, so gelten die oberen Zeichen in [*III*] und man erhält alsdann, wenn die von beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder zusammen addirt werden, nach §. 28.

$$2^n(\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = 2\cos n\alpha - 2.n_1 \cos(n-2)\alpha + 2.n_2 \cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots \mp 2.n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha \pm n_{\frac{1}{2}n} \cos o, \quad [IV]$$

wo $\cos o = 1$ ist, und das obere Zeichen für ein gerades, das untere aber für ein ungerades $\frac{n}{2}$ gilt.

Wird n **ungerade**, so gelten in [*III*] die untern Zeichen und man erhält (§. 28.)

$$2^n(\sqrt{-1})^n \sin\alpha^n = 2\sin n\alpha . \sqrt{-1} - 2.n_1 \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1} + \ldots\ldots \pm 2.n_{\frac{n-3}{2}} \sin 3\alpha \mp 2.n_{\frac{n-1}{2}} \sin\alpha, \quad [V]$$

wo das obere Zeichen für ein gerades und das untere für ein ungerades $\frac{n+1}{2}$ gilt.

Um nun die verschiedenen Fälle näher zu bestimmen, für welche $\sin\alpha^n$ entwickelt werden kann, bedeute r durchgängig jede ganze positive Zahl oder o, so wird für $n = 4r + 1$; $(\sqrt{-1})^n = \sqrt{-1}$ (§. 14.). Wenn man also in [*V*] durchgängig mit $2.\sqrt{-1}$ dividirt, so wird

(*I*) $2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \sin(n-4)\alpha - \ldots\ldots - \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+5)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-3)} \sin 3\alpha + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-1)} \sin \alpha;$$

wo $n = 4r + 1$ ist.

Für $n = 4r + 2$ wird $(\sqrt{-1})^n = -1$ (§. 14.); wenn daher dieser Werth in [*IV*] gesetzt und durchgängig durch 2 dividirt wird, so findet man

(*II*) $-2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \cos n\alpha - n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+2}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha - \tfrac{1}{2} . \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+1}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n};$$

wo $n = 4r + 2$ ist.

Für $n = 4r + 3$ ist $(\sqrt{-1})^n = -\sqrt{-1}$; wenn man daher diesen Werth in [*V*] setzt und durchgängig durch $2\sqrt{-1}$ dividirt, so wird

(*III*) $-2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \sin(n-4)\alpha - \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+5)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-3)} \sin 3\alpha - \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-1)} \sin \alpha;$$

wo $n = 4r + 3$ ist.

Für $n = 4r + 4$ ist $(\sqrt{-1})^n = +1$; diesen Werth in [*IV*] gesetzt und durchgängig durch 2 dividirt, giebt

(*IV*) $2^{n-1} \sin \alpha^n$

$$= \cos n\alpha - n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots - \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+2}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2} . \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+1}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n};$$

wo $n = 4r + 4$ ist.

Endlich erhält man aus [*II*], wenn statt x und y die entsprechenden Werthe gesetzt werden:

$$2^n \cos \alpha^n = [\cos n\alpha + \sin n\alpha . \sqrt{-1}] + n_1 [\cos(n-2)\alpha + \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1}] + \ldots\ldots$$
$$\ldots + n_1 [\cos(n-2)\alpha - \sin(n-2)\alpha . \sqrt{-1}] + [\cos n\alpha - \sin n\alpha . \sqrt{-1}].$$

Werden die von beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder addirt, so findet man, wenn n eine gerade Zahl ist (§. 28.)

$$2^n \cos \alpha^n = 2 \cos n\alpha + 2 . n_1 \cos(n-2)\alpha + 2 . n_2 \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + 2 . n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha + n_{\frac{1}{2}n} \cos 0,$$

und wenn n ungerade ist (§. 28.)

$$2^n \cos \alpha^n = 2 \cos n\alpha + 2 . n_1 \cos(n-2)\alpha + 2 . n_2 \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + 2 . n_{\frac{n-3}{2}} \cos 3\alpha + 2 . n_{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha.$$

Dividirt man die beiden zuletzt gefundenen Ausdrücke durchgängig durch 2, so ist

(*V*) $2^{n-1} \cos \alpha^n$

$$= \cos n\alpha + n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+2}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n-1} \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2} \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}n+1}{1.2 \ldots \frac{1}{2}n};$$

wo n eine gerade Zahl ist.

(*VI*) $2^{n-1} \cos \alpha^n$

$$= \cos n\alpha + n \cos(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+5)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-3)} \cos 3\alpha + \frac{n.n-1 \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1.2 \ldots \frac{1}{2}(n-1)} \cos \alpha;$$

wo n eine ungerade Zahl ist.

Beim Gebrauche dieser Ausdrücke ist zu bemerken, daß,

wenn $n =$

2; 6; 10; 14; 18; .... so gelten die Ausdrücke (*II*) und (*V*)
3; 7; 11; 15; 19; .... so gelten die Ausdrücke (*III*) und (*VI*)
4; 8; 12; 16; 20; .... so gelten die Ausdrücke (*IV*) und (*V*)
5; 9; 13; 17; 21; .... so gelten die Ausdrücke (*I*) und (*VI*)

Hienach sind folgende besondere Werthe berechnet

$$2 \sin\alpha^2 = -\cos 2\alpha + 1$$
$$4 \sin\alpha^3 = -\sin 3\alpha + 3 \sin\alpha$$
$$8 \sin\alpha^4 = +\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3$$
$$16 \sin\alpha^5 = +\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin\alpha$$
$$32 \sin\alpha^6 = -\cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha - 15 \cos 2\alpha + 10$$
$$64 \sin\alpha^7 = -\sin 7\alpha + 7 \sin 5\alpha - 21 \sin 3\alpha + 35 \sin\alpha$$
$$128 \sin\alpha^8 = +\cos 8\alpha - 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha - 56 \cos 2\alpha + 35$$

. . . .

$$2 \cos\alpha^2 = \cos 2\alpha + 1$$
$$4 \cos\alpha^3 = \cos 3\alpha + 3 \cos\alpha$$
$$8 \cos\alpha^4 = \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3$$
$$16 \cos\alpha^5 = \cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos\alpha$$
$$32 \cos\alpha^6 = \cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha + 10$$
$$64 \cos\alpha^7 = \cos 7\alpha + 7 \cos 5\alpha + 21 \cos 3\alpha + 35 \cos\alpha$$
$$128 \cos\alpha^8 = \cos 8\alpha + 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha + 56 \cos 2\alpha + 35$$

. . . .

Für die Fälle, in welchen n keine positive ganze Zahl ist, hat **Poisson** zuerst Untersuchungen bekannt gemacht. M. s.

Poisson, Note sur le développement des puissances des sinus et des cosinus, etc. Correspondance sur l'école polytechnique, par Hachette, Tome II. Paris, 1813. *p.* 212—217.

Wegen der neuesten hieher gehörigen Untersuchungen s. m.

A. L. Crelle, Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten. Berlin, 1823. S. 321. u. f.

M. Ohm, Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik. Berlin, 1823. S. 8. u. f.

§. 158.

Noch andere allgemeine Ausdrücke für trigonometrische Größen, sind §. 168. 174. 194. 199. 201. 210. 286. 304. 388. 424. 473. 506. und 965. entwickelt.

Sechs.

Sechstes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 159.

Die Exponenten von Potenzen, welche aus gleichen Wurzeln oder Grundzahlen entstanden sind, heißen **Logarithmen** oder **Verhältnißzahlen** derselben. Die Potenzen werden die den Logarithmen **zugehörigen Zahlen** (**Logarithmanden**) genannt. Wäre z. B.

$$a^b = B,$$

so ist b der Logarithme der Zahl B für die Grundzahl a.

Diese **Grundzahl** a heißt auch die **Basis**, und alle Logarithmen, welche aus einerlei Grundzahlen entstanden sind, heißen Logarithmen von einerlei **Systeme**.

Es giebt daher so viel verschiedene logarithmische Systeme, als man verschiedene Grundzahlen annehmen kann.

Bezeichnet man die Logarithmen eines jeden Systems überhaupt durch $Lg.$; so ist $Lg\,B = b$, also b der Logarithme und B die zugehörige Zahl für die Grundzahl a, und man kann hier und in der Folge allemal dasjenige, was von den so bezeichneten Logarithmen bewiesen ist, auf jedes besondert System anwenden, dessen Wurzel $= a$ gesetzt wird.

Für besondere Logarithmen schreibt man: $Lg.\ nat.$; $Lg.\ brigg.$; u. s. w.

§. 160.

Wäre $a^b = B$, so ist §. 159. $b = Lg\,B$, daher

$$(I)\quad a^{Lg\,B} = B.$$

Weil $a^{Lg\,B} = B$, also auch
$a^{Lg\,C} = C$ ist, so folgt hieraus
$a^{Lg\,B + Lg\,C} = B \cdot C$, daher nach (I)

$$(II)\quad Lg\,BC = Lg\,B + Lg\,C.$$

Eben so findet man

$$(III)\quad Lg\,\frac{B}{C} = Lg\,B - Log\,C.$$

Für $a^b = B$ wird $a^{nb} = B^n$, also $Lg\,B^n = nb$. Aber $b = Lg\,B$ (I), folglich

$$(IV)\quad Lg\,B^n = n\,Lg\,B.$$

Für $n = \frac{1}{m}$ erhält man auf gleiche Weise

$$(V)\quad Lg\,B^{\frac{1}{m}} = Lg\,\sqrt[m]{B} = \frac{1}{m}\,Lg\,B.$$

§. 161.

Weil $a^1 = a$ ist, so wird §. 160.

$$(I)\quad Lg\, a = 1,$$

d. h. in jedem logarithmischen Systeme ist der Logarithme der Grundzahl dieses Systems der Einheit gleich, oder die Zahl, deren Logarithme $= 1$, ist die Grundzahl des Systems.

Es ist $Lg\,\frac{B}{B} = Lg\,B - Lg\,B$ (§. 160. *III.*), weil $\frac{B}{B} = 1$ ist, daher wird

$$(II)\quad Lg\,1 = 0,$$

d. h. in allen logarithmischen Systemen ist der Logarithme von der Einheit $= 0$.

Wäre $y = Lg\,x$, so erhält man, wenn a die Grundzahl des Systems ist, $Lg\,a = 1$, (*I*) also $y = y\,Lg\,a = Lg\,a^y$ (§. 160. *IV.*) daher $Lg\,x = Lg\,a^y$ also $x = a^y$.

Wenn daher a die Grundzahl eines Systems ist, und man findet

$$(III)\quad \begin{cases} y = Lg\,x, \text{ so ist auch} \\ a^y = x \text{ und} \\ y = Lg.\,a^y. \end{cases}$$

In dem Ausdruck $a^y = x$, wo y der Logarithme von der Zahl x ist, und a irgend eine positive Zahl bedeutet, wird x jederzeit positiv, man mag y positiv oder negativ annehmen, daher ist es unmöglich, für x einen negativen Werth zu erhalten, so lange a positiv bleibt, folglich müssen in jedem Logarithmensysteme, dessen Grundzahl positiv ist, alle den verschiedenen Logarithmen entsprechende Zahlen positiv seyn, und es ist unmöglich, für eine negative Zahl einen entsprechenden Logarithmen anzugeben (§. 167.).

In $y = Lg\,a^y$ setze man $y = x\,Lg\,z$, so wird $x\,Lg\,z = Lg\,a^{x\,Lg\,z}$ oder §. 160. (*IV.*)

$$Lg\,z^x = Lg\,a^{x\,Lg\,z}.$$

Da nun zu gleichen Logarithmen in einerlei Systeme auch gleiche Zahlen gehören, so wird auch, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$(IV)\quad z^x = a^{x\,Lg\,z}$$

wo a die Grundzahl des zugehörigen Logarithmensystems ist.

Weil nach (*III*) §. 160. $Lg\,\frac{1}{x} = Lg\,1 - Lg\,x$ ist, so erhält man wegen (*II*)

$$(V)\quad Lg\,\frac{1}{x} = -Lg\,x.$$

Uebrigens wird allgemein bemerkt, daß $Lg\,(x^n)$ durch $Lg\,x^n$ und $(Lg\,x)^n$ durch $Lg^n\,x$, ausgedrückt werden soll.

§. 162.

Zur Entwickelung der vorzüglichsten Ausdrücke für die Logarithmen, setze man $a^y = x$. Hierin $a = 1 + b$ gesetzt, giebt nach dem binomischen Lehrsatze (§. 25.)

$$a^y = (1+b)^y = 1 + \frac{y}{1}\,b + \frac{y \cdot y-1}{1.2}\,b^2 + \frac{y \cdot y-1 \cdot y-2}{1.2.3}\,b^3 + \ldots.$$

oder $a - 1$ mit b vertauscht:

$$(I)\ a^y = 1 + \frac{y}{1}(a-1) + \frac{y.y-1}{1.2}(a-1)^2 + \frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}(a-1)^3 + \ldots\ldots$$

Da diese Reihe alle Potenzen von y enthält, so kann man setzen

$$a^y = 1 + Ay + A_1 y^2 + A_2 y^3 + A_3 y^4 + \ldots\ldots [I]$$

wo A; A_1; ... noch näher zu bestimmende Koeffizienten sind.

Multiplizirt man in (I) die Faktoren $y.y-1.y-2\ldots\ldots$ mit einander und sondert die Glieder ab, welche den Faktor y enthalten, so findet man (§. 52.)

$$y\left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\right] = Ay \text{ folglich}$$

$$(II)\ A = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \frac{(a-1)^5}{5} - \ldots\ldots$$

Wird z statt y in $[I]$ gesetzt, so erhält man

$$a^z = 1 + Az + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \ldots\ldots \text{ also}$$

$$a^z - a^y = A(z-y) + A_1(z^2-y^2) + A_2(z^3-y^3) + \ldots\ldots$$

Man setze $z = y + u$ oder $a^z = a^{y+u} = a^y . a^u$, also

$$a^z - a^y = a^y(a^u - 1) = a^y(Au + A_1 u^2 + A_2 u^3 + \ldots\ldots), \text{ daher}$$

$$a^y(Au + A_1 u^2 + A_2 u^3 + \ldots) = A(z-y) + A_1(z^2-y^2) + A_2(z^3-y^3) + \ldots$$

oder, mit $u = z - y$ dividirt,

$$a^y(A + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots) = A + A_1 \frac{z^2-y^2}{z-y} + A_2 \frac{z^3-y^3}{z-y} + \ldots [II]$$

Nach §. 60. ist $\frac{z^n-y^n}{z-y} = z^{n-1} + yz^{n-2} + \ldots + y^{n-2}z + y^{n-1}$, und es wird, für $z=y$, $\frac{z^n-y^n}{z-y} = ny^{n-1}$. Wenn daher $z = y$ also $u = o$ in $[II]$ gesetzt wird, so findet man

$$Aa^y = A + 2A_1 y + 3A_2 y^2 + 4A_3 y^3 + \ldots\ldots \text{ und nach } [I]$$

$$Aa^y = A + AAy + AA_1 y^2 + AA_2 y^3 + \ldots\ldots$$

hieraus nach §. 71.

$$A_1 = \frac{AA}{2};\ A_2 = \frac{AA_1}{3};\ A_3 = \frac{AA_2}{4};\ A_4 = \frac{AA_3}{5};\ \ldots \text{ daher}$$

$$A_1 = \frac{A^2}{1.2};\ A_2 = \frac{A^3}{1.2.3};\ A_3 = \frac{A^4}{1.2.3.4};\ \ldots\ldots \text{ folglich nach } [I]$$

$$(III)\ a^y = 1 + \frac{A}{1}y + \frac{A^2}{1.2}y^2 + \frac{A^3}{1.2.3}y^3 + \frac{A^4}{1.2.3.4}y^4 + \ldots$$

Weil $a^y = x$, also $y = Lg\,x$ für die willkührliche Grundzahl a ist, so erhält man

$$(IV)\ x = 1 + \frac{A}{1}Lg\,x + \frac{A^2}{1.2}Lg^2\,x + \frac{A^3}{1.2.3}Lg^3\,x + \frac{A^4}{1.2.3.4}Lg^4\,x + \ldots$$

Wird in (III) $y = 1$ gesetzt, so giebt dies

$$(V)\ a = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

Wenn daher die Grundzahl a willkührlich angenommen wird, so kann nach (II) daraus der Werth von A, und wenn A willkührlich angenommen wird, daraus die Grundzahl a des entsprechenden Logarithmensystems gefunden werden.

Dasjenige Logarithmensystem, für welches $A = 1$ ist, heißt das **natürliche System** und die zugehörigen Logarithmen heißen **natürliche Logarithmen**, welche hier durch *Lg. nat.* oder kürzer durch *lgn* oder *lg.* bezeichnet werden sollen. Wäre e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so erhält man aus (III) (V) und (IV)

$$(VI)\quad e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$(VII)\quad e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \text{ oder}$$
$$= 2{,}718\,281\,828\,459\,045 \ldots\ldots$$

$$(VIII)\quad x = 1 + \frac{lgn\, x}{1} + \frac{lgn^2 x}{1.2} + \frac{lgn^3 x}{1.2.3} + \frac{lgn^4 x}{1.2.3.4} + \frac{lgn^5 x}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

In (II) und (V) werde y statt a, und z statt A gesetzt, so erhält man:

$$z = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \ldots [III]$$

$$y = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

In (VI) werde y mit z vertauscht, so wird

$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$ also $y = e^z$; daher für jedes Logarithmensystem, $Lg\,y = z\,Lg\,e$, oder nach [III] $Lg\,y = Lg\,e . \left[\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots\right]$.

Hierin $y = a$ gesetzt, giebt $Lg\,a = Lg\,e \left[\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \ldots\ldots\right]$, oder es wird wenn a die Grundzahl dieses Logarithmensystems ist, $Lg\,a = 1$, und man erhält, wegen (II),

$$1 = A\,Lg\,e \text{ oder } Lg\,e = \frac{1}{A}, \text{ also}$$

$$(IX)\quad Lg\,y = \frac{1}{A}\left[\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \frac{(y-1)^5}{5} - \ldots\ldots\right]$$

Aus $y = e^z$ erhält man für die natürlichen Logarithmen $lgn\,y = z\,lgn\,e$, oder es wird, weil e die Grundzahl, also $lgn\,e = 1$ ist,

$$(X)\quad lgn\,y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \frac{(y-1)^5}{5} - \ldots\ldots$$

Hienach erhält man sowohl für die natürlichen als auch für die Logarithmen eines jeden andern Systems allgemeine Ausdrücke, welche den Zusammenhang dieser Logarithmen mit den zugehörigen Zahlen angeben. Der einfachste Ausdruck wird für die natürlichen Logarithmen erhalten, weil hier $A = 1$ ist. Für jedes andere System muß A bekannt seyn oder willkührlich angenommen werden, daher auch alle Logarithmensysteme, für welche A größer oder kleiner als 1 ist, **künstliche Logarithmensysteme** genannt werden. Die Logarithmen solcher künstlichen Systeme werden mit *Lg. art.* oder kürzer mit *Lg.* bezeichnet.

Aus IX und X erhält man $Lg\,y = \frac{1}{A}\,lgn\,y$. Wenn daher die natürlichen Logarithmen bekannt sind, so erhält man die Logarithmen eines jeden künstlichen Systems, wenn erstere mit $\frac{1}{A}$ multiplizirt werden. Der Faktor $\frac{1}{A}$ heißt der **Model** oder das **Maaß** desjenigen künstlichen Systems, dessen Grundzahl $= a$ ist. Man setze durchgängig $\frac{1}{A} = M$ so wird

(XI) $Lg\,y = M\,lgn\,y$, oder auch

$$Lg\,y = M\left[\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \ldots\right]$$

und nach (II) der Model

$$(XII)\quad M = \frac{1}{\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots}$$

auch wird nach (IV) (V) und (III)

$$(XIII)\quad y = 1 + \frac{Lg\,y}{1.M} + \frac{Lg^2\,y}{1.2M^2} + \frac{Lg^3\,y}{1.2.3M^3} + \frac{Lg^4\,y}{1.2.3.4M^4} + \ldots$$

$$(XIV)\quad a = 1 + \frac{1}{1M} + \frac{1}{1.2M^2} + \frac{1}{1.2.3M^3} + \frac{1}{1.2.3.4M^4} + \ldots$$

$$(XV)\quad a^y = 1 + \frac{y}{1M} + \frac{y^2}{1.2M^2} + \frac{y^3}{1.2.3M^3} + \frac{y^4}{1.2.3.4M^4} + \ldots$$

Bedeutet u eine willkührliche Größe und man setzt u^x statt x in (VIII), so wird wegen $lgn\,u^x = x\,lgn\,u$

$$(XVI)\quad u^x = 1 + \frac{x\,lgn\,u}{1} + \frac{x^2\,lgn^2\,u}{1.2} + \frac{x^3\,lgn^3\,u}{1.2.3} + \frac{x^4\,lgn^4\,u}{1.2.3.4} + \ldots$$

Alle vorstehende Ausdrücke gelten für die natürlichen Logarithmen, wenn in denselben $M = 1$ und $a = e$ gesetzt wird.

§. 163.

Zur Erleichterung der Berechnung der Logarithmen können folgende Ausdrücke dienen.

Man setze $1 + y$ statt y in (XI) §. 162., so wird

$$(I)\quad Lg\,(1+y) = M\,(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{6}y^6 + \ldots)$$

Hierin $-y$ statt y gesetzt, giebt

$$(II)\quad Lg\,(1-y) = -M\,(y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 + \ldots)$$

Weil $Lg\,(1+y) - Lg\,(1-y) = Lg\,\frac{1+y}{1-y}$ ist, so erhält man hieraus

$$(III)\quad Lg\,\frac{1+y}{1-y} = 2M\,(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \tfrac{1}{9}y^9 + \ldots)$$

Man setze $\frac{1+y}{1-y} = x$, so wird $y = \frac{x-1}{x+1}$ daher

$$(IV)\quad Lg\,x = 2M\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \ldots\right]$$

Wird $\frac{1+y}{1-y} = \frac{x+1}{x}$ also $y = \frac{1}{2x+1}$ gesetzt, so ist wegen

$$Lg\,\frac{1+y}{1-y} = Lg\,\frac{x+1}{x} = Lg\,(x+1) - Lg\,x, \text{ nach } (III)$$

$$(V)\quad Lg\,(1+x) = Lg\,x + 2M\left[\frac{1}{2x+1} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{(2x+1)^3} + \tfrac{1}{5}\,\frac{1}{(2x+1)^5} + \ldots\right]$$

oder $x - 1$ statt x gesetzt:

$$(VI)\quad Lg\,x = Lg\,(x-1) + 2M\left[\frac{1}{2x-1} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{(2x-1)^3} + \tfrac{1}{5}\,\frac{1}{(2x-1)^5} + \ldots\right]$$

In dieser Reihe setze man x^2 statt x und bezeichne die in den Klammern enthaltene Reihe mit S, so wird $Lg\,x^2 = Lg\,(x^2 - 1) + 2MS$, oder weil $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ ist, $2\,Lg\,x = Lg\,(x+1) + Lg\,(x-1) + 2MS$, daher

$$(VII)\quad Lg\,(x+1) = 2\,Lg\,x - Lg\,(x-1) - 2M\left[\frac{1}{2x^2-1} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{(2x^2-1)^3} + \tfrac{1}{5}\,\frac{1}{(2x^2-1)^5} + \ldots\right]$$

Sind x und r zwei große, wenig von einander verschiedene Zahlen, und es ist $Lg\,r$ bekannt, so setze man $\frac{x}{r}$ statt x in (IV), so wird wegen $Lg\,\frac{x}{r} = Lg\,x - Lg\,r$

$$(VIII)\quad Lg\,x = Lg\,r + 2M\left[\frac{x-r}{x+r} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-r}{x+r}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-r}{x+r}\right)^5 + \ldots\right]$$

wodurch eine schnell abnehmende Reihe entsteht. Bedeutet a die Grundzahl desjenigen Systems dessen Model $= M$ ist, so setze man $x = a$ in (IV), dann wird $Lg\,a = 1$; folglich

$$(IX)\quad M = \frac{1}{2\left[\frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \ldots\right]}$$

wodurch eine schneller abnehmende Reihe als §. 162. (XII) entsteht.

Wäre x eine große und h eine verhältnißmäßig kleine Zahl, so setze man $\frac{h}{x}$ statt y in (I). Dadurch wird, wegen $Lg\left(1+\frac{h}{x}\right) = Lg\,\frac{x+h}{x} = Lg\,(x+h) - Lg\,x$,

$$(X)\quad Lg\,(x+h) = Lg\,x + M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \frac{h^5}{5x^5} - \ldots\right)$$

In (XI) §. 162. setze man $y = \frac{1}{x}$, so wird

$$y - 1 = \frac{1-x}{x} = -\left(\frac{x-1}{x}\right);\quad Lg\,y = Lg\,\frac{1}{x} = -Lg\,x, \text{ daher}$$

$$(XI)\quad Lg\,x = M\left[\frac{x-1}{x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x}\right)^5 + \ldots\right]$$

Die vorstehenden Ausdrücke gelten für jedes logarithmische System, dessen Model $= M$ ist.

Wegen noch anderer hieher gehöriger Reihen s. m. §. 210. 300. 324. 614. 963. 966 und 969.

§. 164.

Für die natürlichen Logarithmen wird der Model $M = 1$, und wenn die Grundzahl derselben wie bisher $= e$ gesetzt wird, so erhält man für dieses Logarithmensystem, mit Hülfe der vorhergehenden Ausdrücke, folgende Zusammenstellung:

$$lgn\,e = 1.$$

$$(I)\quad e^{lgn\,x} = x. \quad (§.\ 160.\ I.)$$

Wenn $y = lgn\, x$ ist, so wird (§. 161. *III.*)

$$(II) \begin{cases} e^y = x \text{ und} \\ y = lgn\, e^y. \end{cases}$$

$$(III)\quad z^x = e^{x\, lg\, z}.$$

$$(IV)\quad lgn\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots\ldots$$

$$(V)\quad lgn\,(1-x) = -\left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{6}x^6 + \ldots\ldots\right)$$

$$(VI)\quad lgn\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{11}x^{11} + \ldots\ldots\right)$$

$$(VII)\quad lgn\,x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^9 + \ldots\ldots\right]$$

$$(VIII)\quad lgn\,x = lgn\,(x-1) + 2\left[\frac{1}{2x-1} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{(2x-1)^3} + \tfrac{1}{5}\,\frac{1}{(2x-1)^5} + \tfrac{1}{7}\,\frac{1}{(2x-1)^7} + \ldots\ldots\right]$$

$$(IX)\quad lgn\,x = lgn\,r + 2\left[\frac{x-r}{x+r} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-r}{x+r}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-r}{x+r}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{x-r}{x+r}\right)^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(X)\quad lgn\,x = \frac{x-1}{x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x}\right)^5 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{x-1}{x}\right)^6 + \ldots\ldots$$

$$(XI)\quad lgn\,(x+h) = lgn\,x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \frac{h^5}{5x^5} - \frac{h^6}{6x^6} + \ldots\ldots;$$

Hierin $h = -1$ gesetzt, giebt

$$(XII)\quad lgn\,(x-1) = lgn\,x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} - \ldots\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$lgn\,x = lgn\,(x-1) + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{6x^6} + \ldots\ldots$$

Für $x = 1$ in (*IV*) wird

$$(XIII)\quad lgn\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \ldots\ldots \text{ hiezu}$$

$$lgn\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots \text{ addirt, giebt}$$

$$(XIV)\quad 2\,lgn\,2 = 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} - \ldots\ldots$$

Weil $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3.4}$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5.6}$; ..... ist, so erhält man, wenn in (*XIII*) jede zwei auf einander folgende Glieder addirt werden,

$$(XV)\quad lgn\,2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{13.14} + \ldots\ldots$$

Für $x = 1$ in (*V*) wird

$$+\,lgn\,(1-1) = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} - \ldots\ldots \text{ und}$$

$$-\,lgn\,(1-1) = +1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \ldots\ldots$$

die über einander stehenden Glieder addirt, giebt

$$(XVI)\quad 1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \ldots\ldots$$

Nach §. 65. erhält man ferner, wegen (*IV*),

$$(XVII)\quad \frac{1}{lgn(1+x)} = \frac{G}{x} - G_1 + G_2 x - G_3 x^2 + G_4 x^3 - G_5 x^4 + G_6 x^5 - G_7 x^6 + \ldots\ldots$$

wo die Koeffizienten $G\ G_1\ G_2\ G_3 \ldots$ §. 65. näher bestimmt sind.

Nach §. 162 (*XIII*) wird

$$(XVIII)\quad x = 1 + \frac{lg\,x}{1!} + \frac{lg^2 x}{2!} + \frac{lg^3 x}{3!} + \frac{lg^4 x}{4!} + \frac{lg^5 x}{5!} + \frac{lg^6 x}{6!} + \frac{lg^7 x}{7!} + \ldots\ldots$$

Entwickelt man nach (*XI*) $lg\,(x-h)$ und zieht die entsprechende Reihe von (*XI*) ab, so wird

$$(XIX)\quad lg\,\frac{x+h}{x-h} = 2\left[\frac{h}{x} + \frac{h^3}{3x^3} + \frac{h^5}{5x^5} + \frac{h^7}{7x^7} + \frac{h^9}{9x^9} + \frac{h^{11}}{11x^{11}} + \ldots\ldots\right]$$

Hierin $h = b\sqrt{-1}$ gesetzt, giebt

$$log\,\frac{x+b\sqrt{-1}}{x-b\sqrt{-1}} = 2\left[\frac{b}{x} - \frac{b^3}{3x^3} + \frac{b^5}{5x^5} - \frac{b^7}{7x^7} + \frac{b^9}{9x^9} - \frac{b^{11}}{11x^{11}} + \ldots\ldots\right].\sqrt{-1},$$

oder auf beiden Seiten mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt

$$(XX)\quad \sqrt{-1}.\,lg\,\frac{x+b\sqrt{-1}}{x-b\sqrt{-1}} = -2\left[\frac{b}{x} - \frac{b^3}{3x^3} + \frac{b^5}{5x^5} - \frac{b^7}{7x^7} + \frac{b^9}{9x^9} - \frac{b^{11}}{11x^{11}} + \ldots\ldots\right].$$

§. 165.

Es ist nun leicht, mittelst der zuletzt gefundenen Ausdrücke, wenn für irgend ein Logarithmensystem die Grundzahl a gegeben ist, daraus den Model, oder, wenn dieser gegeben wäre, die zugehörige Grundzahl zu finden, weil man eine dieser Größen willkührlich annehmen kann. Die natürlichen Logarithmen lassen sich zwar am leichtesten berechnen; sie sind aber für den gemeinen Gebrauch nicht so bequem als wenn man ein solches System aufstellt, dessen Grundzahl $a = 10$ gesetzt wird. Die Logarithmen dieses Systems heißen **briggische** oder **gemeine** und werden durch *Lg. brigg.*; *Lg. vulg.* oder hier durchgängig durch *Lgb* oder auch *Lg* angezeigt, um sie von den natürlichen Logarithmen zu unterscheiden, welche das Zeichen *lgn* oder auch *lg.* erhalten haben.

Weil für die gemeinen Logarithmen die Grundzahl $= 10$ ist, so erhält man für $a = 10$ in (*IX*) §. 163., wenn der Model der gemeinen Logarithmen mit m bezeichnet wird,

$$m = \frac{1}{2\left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\frac{9^3}{11^3} + \frac{1}{5}\frac{9^5}{11^5} + \ldots\ldots\right]} = 0,434\,294\,481\,903\,251 \ldots\ldots \text{ und}$$

$$\frac{1}{m} = 2,302\,585\,092\,994\,045 \ldots\ldots$$

Nach §. 163. (*IV*) ist

$$Lg\,x = 2m\left[\frac{x-1}{x+1} + \ldots\ldots\right] \text{ und}$$

$$lgn\,x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \ldots\ldots\right] \text{ daher}$$

$$\frac{Lg\,x}{lgn\,x} = m, \text{ folglich}$$

$$(I)\quad Lg\,x = m\,lgn\,x$$

$$(II)\quad lgn\,x = \frac{1}{m}\,Lg\,x,$$

so

so daß man hienach mittelst des Models der gemeinen Logarithmen, die natürlichen in gemeine oder umgekehrt, die gemeinen in natürliche Logarithmen verwandeln kann.

Für die gemeinen Logarithmen ist $Log\ 10 = 1$. Ist daher der natürliche Logarithme der Zahl 10 bekannt, so erhält man nach (I) für $x = 10$ den Model der gemeinen Logarithmen, oder

$$(III)\quad m = \frac{1}{lgn\ 10}.$$

Für die natürlichen Logarithmen ist $lg\ e = 1$, dagegen wird

$$Lgb\ e = 0,\ 434\ 294\ 481\ 903\ \ldots\ldots.$$

§. 166.

Unter den verschiedenen Reihen, welche auf die Berechnung der Logarithmen angewandt werden können, verdient die §. 163. (VII), wegen der schnellen Abnahme ihrer Glieder, den Vorzug. Weil aber zur Berechnung irgend eines Logarithmen, die beiden vorangehenden um eine Einheit verschiedenen, bekannt seyn müssen, wenn derselbe nach (VII) bestimmt werden soll, und weil die Reihe nur für große Werthe von x schnell abnimmt, so kann hier als Beispiel die Bestimmung der Logarithmen von den Zahlen 2, 3, 5 stehen.

Man setze

$$R = \frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \frac{1}{7.31^7} + \ldots$$
$$R' = \frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \frac{1}{7.49^7} + \ldots$$
$$R'' = \frac{1}{161} + \frac{1}{3.161^3} + \frac{1}{5.161^5} + \frac{1}{7.161^7} + \ldots,$$

Schreibt man nun nach einander 4, 5, 9 statt x in (VII) §. 163., so erhält man

$$Lg\ 5 = 2\,Lg\ 4 - Lg\ 3 - 2\,m\,R$$
$$Lg\ 6 = 2\,Lg\ 5 - Lg\ 4 - 2\,m\,R'$$
$$Lg\ 10 = 2\,Lg\ 9 - Lg\ 8 - 2\,m\,R'',$$

oder weil $Lg\ 4 = 2\,Lg\ 2$; $Lg\ 10 = Lg\ 2 + Lg\ 5$, u. s. w.

$$4\,Lg\ 2 - Lg\ 3 - Lg\ 5 = 2\,m\,R$$
$$2\,Lg\ 5 - 3\,Lg\ 2 - Lg\ 3 = 2\,m\,R'$$
$$4\,Lg\ 3 - 4\,Lg\ 2 - Lg\ 5 = 2\,m\,R''.$$

In diesen drei Gleichungen kommen nur die drei unbekannten Größen $Lg\ 2$; $Lg\ 3$ und $Lg\ 5$ vor. Entwickelt man diese auf die gewöhnliche Art, so erhält man

$$Lg\ 2 = 2\,m\,(7\,R + 5\,R' + 3\,R'')$$
$$Lg\ 3 = 2\,m\,(11\,R + 8\,R' + 5\,R'')$$
$$Lg\ 5 = 2\,m\,(16\,R + 12\,R' + 7\,R''),$$

so daß mit Hülfe der drei Reihen R, R', R'' diese Logarithmen auf jede beliebige Anzahl Dezimalstellen bestimmt werden können. Durch die Rechnung findet man:

$$Lg\ 2 = m\ .\ 0,\ 69314\ \ 71805\ \ 59945\ \ldots.$$
$$Lg\ 3 = m\ .\ 1,\ 09861\ \ 22886\ \ 68109\ \ldots.$$
$$Lg\ 5 = m\ .\ 1,\ 60943\ \ 79124\ \ 34100\ \ldots.$$

Diese Werthe gelten für jedes mögliche Logarithmensystem, weil der Model m noch unbestimmt ist. Für die natürlichen Logarithmen ist $m = 1$ daher

$$lg\ nat\ 2 = 0,69314\ 71805\ \ldots \text{ und}$$
$$lg\ nat\ 5 = 1,60943\ 79124\ \ldots \text{ daher auch}$$
$$lg\ nat\ 10 = 2,30258\ 50929\ \ldots.$$

§. 167.

Daß die Logarithmen negativer Zahlen in allen Systemen unmöglich sind, läßt sich auf folgende Art beweisen.

Es ist nach §. 163. (*III*), wenn $x\sqrt{-1}$ statt y gesetzt wird,

$$Lg\ \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = 2M\left(x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots\right)\sqrt{-1},$$

oder 1 statt x gesetzt, giebt:

$$Lg\ \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = 2M\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots\right)\sqrt{-1}.$$

Es ist aber $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{(1+\sqrt{-1})^2}{2} = \sqrt{-1}$, daher

$$Lg\sqrt{-1} = 2M\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots\right)\sqrt{-1},$$

oder man findet, weil $Lg\sqrt{-1} = \frac{1}{2}Lg(-1)$,

$$Lg(-1) = 4M\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots\right)\sqrt{-1},$$

welches eine unmögliche Größe ist.

Nun ist $Lg(-a) = Lg\ a + Lg(-1)$ folglich $Lg(-a)$ unmöglich.

Eben so wenig kann man den Logarithmen von o angeben, weil $Lg\ o = -\infty$ ist. Denn man setze $y = a^{-x}$ wo $a > 1$ seyn soll, so wird $Lg\ y = -x\ Lg\ a$. Wegen $y = \frac{1}{a^x}$ wird $y = o$ für $x = \infty$, daher

$$Lg\ o = -\infty.$$

In (*V*) §. 164. werde $x = 1$ gesetzt, so erhält man

$$lg(1-1) = lg\ o = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\right) \text{ folglich}$$
$$\infty = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots$$

§. 168.

Nach §. 155. ist, wenn x statt α gesetzt wird:

$$\sin nx = \cos x^n\left(n\ tg\ x - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2\ .\ 3}\ tg\ x^3 + \ldots\right), \text{ und}$$
$$\cos nx = \cos x^n\left(1 - \frac{n.n-1}{1.2}\ tg\ x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ tg\ x^4 - \ldots\right).$$

Nun setze man $nx = \alpha$, also $n = \frac{\alpha}{x}$, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha}{\cos x^n} = \alpha\frac{tg\ x}{x} - \frac{\alpha.\alpha-x.\alpha-2x}{1.\ 2\ .\ 3}\frac{tg\ x^3}{x^3} + \ldots\ldots$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos x^n} = 1 - \frac{\alpha.\alpha-x}{1.2}\frac{tg\ x^2}{x^2} + \frac{\alpha.\alpha-x.\alpha-2x.\alpha-3x}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\frac{tg\ x^4}{x^4} - \ldots\ldots$$

Es ist aber $tg\, x > x$ und $\sin x < x$, daher $\frac{tg\, x}{x} > 1$ und $\frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{tg\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}$. Der Werth von $\frac{tg\, x}{x}$ fällt also zwischen 1 und $\frac{1}{\cos x}$, und nähert sich desto mehr der Einheit, je kleiner der Unterschied zwischen 1 und $\frac{1}{\cos x}$ wird. Für $x = o$ wird $\cos x = 1$, also $\frac{1}{\cos x} = 1$, folglich fällt der Werth von $\frac{tg\, x}{x}$, für $x = o$, zwischen 1 und 1, daher ist (§. 17. *V.*) $\frac{tg\, x}{x} = 1$ für $x = o$.

Setzt man hienach in den vorstehenden Ausdrücken $x = o$, so wird $\frac{tg\, x}{x} = 1$ und $\cos x = 1$, daher $\sin \alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$ und $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \ldots$ oder nach der Bezeichnung §. 6.

$$(I)\quad \sin \alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \frac{\alpha^{11}}{11!} + \ldots\ldots$$

$$(II)\quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \frac{\alpha^{10}}{10!} + \ldots\ldots$$

Mittelst dieser Reihen ist man im Stande aus dem Bogen α den zugehörigen Sinus oder Cosinus zu finden, wobei zu bemerken ist, daß α die Länge eines Kreisbogens für den Halbmesser 1 bezeichnet, daher nicht in Graden, Minuten und Sekunden in Rechnung kommt.

Den für $\sin \alpha$ gefundenen Ausdruck in Faktoren zu zerlegen, setze man $\alpha = x$, so wird

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots\ldots$$

Kennt man nun diejenigen Werthe von x welche diesen Ausdruck in o verwandeln, so erhält man dadurch, nach §. 144., die diesem Ausdruck entsprechenden Faktoren. Nun ist $\sin x = o$, wenn $o;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi;\ \ldots$ statt x in $\sin x$ gesetzt wird. Aber für $x = o$ wird der auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehende Ausdruck $= 1$, also $\frac{\sin x}{x} = 1$ für $x = o$, daher ist $x = o$ keine Wurzel dieses Ausdrucks. Dagegen wird $\frac{\sin x}{x} = o$ für $x = \pm n\pi$, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, weil alsdann $\sin x = o$ wird. Es sind alsdann $\pi;\ -\pi;\ 2\pi;\ -2\pi;\ 3\pi;\ -3\pi;\ \ldots$ Wurzeln von $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$ (§. 76.); folglich §. 144.

$$(III)\quad \sin x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{4\pi}\right)\ldots$$

Ferner ist $\cos\left(\pm\frac{2n+1}{2}\pi\right) = o$, daher wird für die Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$\cos x = o$ für $x = \pm\frac{2n+1}{2}\pi$, oder es sind $\pm\frac{1}{2}\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \pm\frac{5}{2}\pi;\ \ldots$ Wur-

zeln der vorstehenden Gleichung, folglich §. 144.

$$(IV)\quad \cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{7\pi}\right)\ldots.$$

In (*III*) und (*IV*) die in Klammern neben einander stehenden Faktoren paarweise in einander multiplizirt, giebt:

$$(V)\quad \sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots..$$

$$(VI)\quad \cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{81\pi^2}\right)\ldots..$$

Durchgängig $x = \frac{n\pi}{2m}$ in die gefundenen Ausdrücke (*III*) (*IV*) (*V*) und (*VI*) gesetzt, wo n, m, zwei willkührliche Zahlen bedeuten, giebt

$$(VII)\quad \sin\frac{n\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{m}\left(1-\frac{n}{2m}\right)\left(1+\frac{n}{2m}\right)\left(1-\frac{n}{4m}\right)\left(1+\frac{n}{4m}\right)\left(1-\frac{n}{6m}\right)\left(1+\frac{n}{6m}\right)\ldots.$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2m-n}{2m}\cdot\frac{2m+n}{2m}\cdot\frac{4m-n}{4m}\cdot\frac{4m+n}{4m}\cdot\frac{6m-n}{6m}\cdot\frac{6m+n}{6m}\cdot\frac{8m-n}{8m}\ldots\ldots$$

$$(VIII)\quad \cos\frac{n\pi}{2m} = \left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1+\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n}{3m}\right)\left(1+\frac{n}{3m}\right)\left(1-\frac{n}{5m}\right)\left(1+\frac{n}{5m}\right)\left(1-\frac{n}{7m}\right)\ldots$$

$$= \frac{m-n}{m}\cdot\frac{m+n}{m}\cdot\frac{3m-n}{3m}\cdot\frac{3m+n}{3m}\cdot\frac{5m-n}{5m}\cdot\frac{5m+n}{5m}\cdot\frac{7m-n}{7m}\ldots\ldots$$

$$(IX)\quad \sin\frac{n\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{m}\left(1-\frac{n^2}{4m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{16m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{36m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{64m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{100m^2}\right)\ldots..$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{4m^2-n^2}{4m^2}\cdot\frac{16m^2-n^2}{16m^2}\cdot\frac{36m^2-n^2}{36m^2}\cdot\frac{64m^2-n^2}{64m^2}\ldots\ldots.$$

$$(X)\quad \cos\frac{n\pi}{2m} = \left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{9m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{25m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{49m^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{81m^2}\right)\ldots\ldots.$$

$$= \frac{m^2-n^2}{m^2}\cdot\frac{9m^2-n^2}{9m^2}\cdot\frac{25m^2-n^2}{25m^2}\cdot\frac{49m^2-n^2}{49m^2}\cdot\frac{81m^2-n^2}{81m^2}\ldots\ldots.$$

Nun ist $\sin\frac{m-n}{2m}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}$; §. 146. [12], und

$\cos\frac{m-n}{2m}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}$, §. 146. [5]

Wird daher $m - n$ statt n in (*VII*) und (*VIII*) gesetzt, so erhält man hienach

$$(XI)\quad \cos\frac{n\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{m-n}{m}\cdot\frac{m+n}{2m}\cdot\frac{3m-n}{2m}\cdot\frac{3m+n}{4m}\cdot\frac{5m-n}{4m}\cdot\frac{5m+n}{6m}\ldots\ldots$$

$$(XII)\quad \sin\frac{n\pi}{2m} = \frac{n}{m}\cdot\frac{2m-n}{m}\cdot\frac{2m+n}{3m}\cdot\frac{4m-n}{3m}\cdot\frac{4m+n}{5m}\cdot\frac{6m-n}{5m}\cdot\frac{6m+n}{7m}\ldots..$$

Mit (*XII*) in (*VII*) dividirt, giebt

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots\ldots}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots\ldots} \text{ oder}$$

$$(XIII)\quad \pi = 2\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11\ldots\ldots}$$

Diesen Ausdruck für den halben Umfang des Kreises hat zuerst J. Wallis in seiner *Arithmetica infinitorum, Lond.* 1655. gegeben.

Hieraus erhält man ferner

$$\pi = 4 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{120}{121} \cdot \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$\pi = 4 \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{5^2-1}{5^2} \cdot \frac{7^2-1}{7^2} \cdot \frac{9^2-1}{9^2} \cdot \frac{11^2-1}{11^2} \ldots\ldots \text{ oder auch}$$

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\left(1-\frac{1}{81}\right)\left(1-\frac{1}{121}\right)\ldots\ldots$$

Wird (*VII*) durch (*XI*) dividirt, so erhält man

$$(XIV) \quad tg\,\frac{n\pi}{2m} = \frac{n.2m-n.2m+n.4m-n.4m+n.6m-n\ldots\ldots}{m-n.m+n.3m-n.3m+n.5m-n.5m+n\ldots\ldots}$$

Aus (*VII*) (*XI*) und (*XIV*) findet man für $m = \frac{1}{2}$

$$(XV) \quad \sin n\pi = \pi . n\,\frac{1-n.1+n.2-n.2+n.3-n.3+n.4-n.4+n\ldots\ldots}{1\;.\;1\;.\;2\;.\;2\;.\;3\;.\;3\;.\;4\;.\;4\ldots\ldots}$$

$$(XVI) \quad \cos n\pi = \frac{\pi}{2} . \frac{1-2n.1+2n.3-2n.3+2n.5-2n.5+2n.7-2n\ldots\ldots}{1\;.\;2\;.\;2\;.\;4\;.\;4\;.\;6\;.\;6\ldots\ldots}$$

$$(XVII) \quad tg\,n\pi = \frac{2n.2-2n.2+2n.4-2n.4+2n.6-2n.6+2n.8-2n\ldots\ldots}{1-2n.1+2n.3-2n.3+2n.5-2n.5+2n.7-2n.7+2n\ldots\ldots}$$

Auch erhält man aus (*XIII*)

$$(XVIII) \quad \frac{\sin n\pi}{\sin m\pi} = \frac{n.1-n.1+n.2-n.2+n.3-n.3+n.4-n.4+n\ldots\ldots}{m.1-m.1+m.2-m.2+m.3-m.3+m.4-m.4+m\ldots\ldots}$$

§. 169.

Einige wichtige Vergleichungen zu erhalten, werde $\pm x\sqrt{-1}$ statt y in (*VI*) §. 162. gesetzt, so erhält man:

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = 1 \pm \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} \mp \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \pm \frac{x^5\sqrt{-1}}{1\ldots5} - \ldots\ldots$$

daher nach (*I*) und (*II*) §. 168.

$$(I) \quad e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1} . \sin x, \text{ oder}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} . \sin x \text{ und}$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} . \sin x.$$

Diese beide Ausdrücke zusammen addirt und dann von einander subtrahirt, giebt:

$$(II) \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \text{ und}$$

$$(III) \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Wegen $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ erhält man auch:

$$(IV) \quad tg\,x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}.$$

Ferner ist nach (I)

$$(V) \quad \pm x\sqrt{-1} = lg\ nat\ (\cos x \pm \sqrt{-1} \cdot \sin x);$$

wo durchgängig entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gelten.

Den Ausdruck (III) mit §. 168. (I) und (V) verglichen, giebt

$$(VI) \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$
$$= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Hierin $\frac{x}{\sqrt{-1}}$ statt x gesetzt, wird

$$(VII) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\ldots$$
$$= x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Ferner giebt (II) mit §. 168. (II) und (IV) verglichen

$$(VIII) \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\ldots$$
$$= \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

oder $\frac{x}{\sqrt{-1}}$ statt x gesetzt, giebt

$$(IX) \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots\ldots$$
$$= \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{81\pi^2}\right)\ldots$$

Es ist noch zu bemerken, daß jeder imaginäre Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$ durch Kreisfunkzionen dargestellt werden kann. Denn man setze

$$(X) \quad a + b\sqrt{-1} = \beta(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$$

so wird (§. 14.) $a = \beta\cos\alpha$ und $b = \beta\sin\alpha$, also $a^2 + b^2 = \beta^2(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2) = \beta^2$, daher

$$\beta = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \text{ und } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Nun sind die beiden Ausdrücke $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ und $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ kleiner als 1, daher auch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, folglich ist α ein reeller Bogen.

§. 170.

Zur Abkürzung setze man $\frac{\beta}{\alpha} = h$,

$A = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}$ und

$B = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}$, so wird nach (V) §. 147.

$A^{1+nh} = \cos(\alpha + n\beta) + \sin(\alpha + n\beta) \cdot \sqrt{-1}$

$B^{1+nh} = \cos(\alpha + n\beta) - \sin(\alpha + n\beta) \cdot \sqrt{-1}$, daher

$A^{1+nh} + B^{1+nh} = 2\cos(\alpha + n\beta)$. $[I]$

Nach (*VI*) §. 162. wird

$$e^{A^h x} = 1 + \frac{A^h x}{1!} + \frac{A^{2h} x^2}{2!} + \frac{A^{3h} x^3}{3!} + \ldots\ldots \text{ also}$$

$$A e^{A^h x} = A + \frac{A^{1+h} x}{1!} + \frac{A^{1+2h} x^2}{2!} + \frac{A^{1+3h} x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

daher, wenn man $A^h x = v$ und $B^h x = w$ setzt,

$$\tfrac{1}{2} A . e^v + \tfrac{1}{2} B . e^w = \begin{Bmatrix} + \tfrac{1}{2} A + \frac{A^{1+h} x}{2.1!} + \frac{A^{1+2h} x^2}{2.2!} + \frac{A^{1+3h} x^3}{2.3!} + \ldots . \\ + \tfrac{1}{2} B + \frac{B^{1+h} x}{2.1!} + \frac{B^{1+2h} x^2}{2.2!} + \frac{B^{1+3h} x^3}{2.3!} + \ldots . \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{A+B}{2} + \frac{A^{1+h} + B^{1+h}}{2.1!} x + \frac{A^{1+2h} + B^{1+2h}}{2.2!} x^2 + \frac{A^{1+3h} + B^{1+3h}}{2.3!} x^3 + \ldots\ldots$$

$$= \cos\alpha + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1!} x + \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{2!} x^2 + \frac{\cos(\alpha+3\beta)}{3!} x^3 + \ldots\ldots$$

wegen [*I*].

Nun ist $A = \cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1}$, also §. 147. (*I*)

$A^h = \cos h\alpha + \sin h\alpha . \sqrt{-1} = \cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1}$, oder §. 169. (*I*)

$A = e^{\alpha\sqrt{-1}}$ und $B = e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, also

$$\tfrac{1}{2} A . e^v = \tfrac{1}{2} e^{\alpha\sqrt{-1}} . e^{x\cos\beta + x\sin\beta . \sqrt{-1}}$$

$$\tfrac{1}{2} B . e^w = \tfrac{1}{2} e^{-\alpha\sqrt{-1}} . e^{x\cos\beta - x\sin\beta . \sqrt{-1}}, \text{ daher}$$

$$\tfrac{1}{2} A . e^v + \tfrac{1}{2} B . e^w = e^{x\cos\beta} \frac{e^{(\alpha + x\sin\beta)\sqrt{-1}} + e^{-(\alpha + x\sin\beta)\sqrt{-1}}}{2}, \text{ oder §. 169. } (II)$$

$$= e^{x\cos\beta} . \cos(\alpha + x\sin\beta).$$

Hienach wird:

(*I*) $$e^{x\cos\beta} . \cos(\alpha + x\sin\beta) = \cos\alpha + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1!} x + \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{2!} x^2 + \frac{\cos(\alpha+3\beta)}{3!} x^3 + \frac{\cos(\alpha+4\beta)}{4!} x^4 + \ldots .$$

Hierin durchgängig $\tfrac{1}{2}\pi + \alpha$ statt α gesetzt, so erhält man, wegen $\sin\varphi = \cos(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi)$, §. 146. (5)

(*II*) $$e^{x\cos\beta} . \sin(\alpha + x\sin\beta) = \sin\alpha + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1!} x + \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{2!} x^2 + \frac{\sin(\alpha+3\beta)}{3!} x^3 + \frac{\sin(\alpha+4\beta)}{4!} x^4 + \ldots .$$

Hierin $\alpha = 0$ gesetzt und dann β mit α vertauscht, giebt

(*III*) $$e^{x\cos\alpha} . \cos(x\sin\alpha) = 1 + \frac{\cos\alpha}{1!} x + \frac{\cos 2\alpha}{2!} x^2 + \frac{\cos 3\alpha}{3!} x^3 + \frac{\cos 4\alpha}{4!} x^4 + \frac{\cos 5\alpha}{5!} x^5 + \ldots\ldots$$

(*IV*) $$e^{x\cos\alpha} . \sin(x\sin\alpha) = \frac{\sin\alpha}{1!} x + \frac{\sin 2\alpha}{2!} x^2 + \frac{\sin 3\alpha}{3!} x^3 + \frac{\sin 4\alpha}{4!} x^4 + \frac{\sin 5\alpha}{5!} x^5 + \ldots\ldots$$

Wegen der vorstehenden Ausdrücke s. m. einen hieher gehörigen Aufsatz von **Tralles** in den Abhandl. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Jahrg. 1820 — 21. S. 137. u. f., und *D.* **Ohm** §. 157. angef. Aufsätze S. 80. Auch kann man hiemit die Abhandlung in den *Annales de mathématiques, par* **Gergonne**, *Tome XIII. No.* 3. *sept.* 1822. *p.* 105. vergleichen.

§. 171.

Es ist nach (*V*) §. 169., wenn α statt x gesetzt wird,

$$\alpha\sqrt{-1} = lg\,(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\sin\alpha) \text{ und}$$
$$-\alpha\sqrt{-1} = lg\,(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\sin\alpha).$$

Den zweiten Ausdruck vom ersten abgezogen, giebt

$$2\alpha\sqrt{-1} = lg\,\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\,.\,\sin\alpha} = lg\,\frac{1+\sqrt{-1}\,.\,tg\,\alpha}{1-\sqrt{-1}\,.\,tg\,\alpha}.$$

Man setze in (*XX*) §. 164. $x = 1$ und $b = tg\,\alpha$, so wird

$$lg\,\frac{1+\sqrt{-1}\,.\,tg\,\alpha}{1-\sqrt{-1}\,.\,tg\,\alpha} = 2\left[tg\,\alpha - \frac{tg^3\alpha}{3} + \frac{tg^5\alpha}{5} - \frac{tg^7\alpha}{7} + \ldots\ldots\right].\sqrt{-1}, \text{ folglich}$$

$$(I)\quad \alpha = tg\,\alpha - \tfrac{1}{3}\,tg^3\,\alpha + \tfrac{1}{5}\,tg^5\,\alpha - \tfrac{1}{7}\,tg^7\,\alpha + \tfrac{1}{9}\,tg^9\,\alpha - \tfrac{1}{11}\,tg^{11}\,\alpha + \ldots\ldots$$

Man setze $tg\,\alpha = x$, so wird §. 146. (79)

$$(II)\quad Arc\,tg\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \ldots\ldots\ldots$$

Es ist $Arc\,cot\,x = \tfrac{1}{2}\pi - Arc\,tg\,x$, daher wird

$$(III)\quad Arc\,cot\,x = \tfrac{1}{2}\pi - x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots\ldots$$

wo π den halben Umfang des Kreises für den Halbmesser 1 bezeichnet.

Setzt man $Arc\,cot\,x = \alpha$, so wird $x = cot\,\alpha$, daher

$$(IV)\quad \alpha = \tfrac{1}{2}\pi - cot\,\alpha + \tfrac{1}{3}cot^3\,\alpha - \tfrac{1}{5}cot^5\,\alpha + \tfrac{1}{7}cot^7\,\alpha - \tfrac{1}{9}cot^9\,\alpha + \ldots\ldots$$

Weil $tg\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha}$ und $cot\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$ ist, so erhält man auch aus (*I*) und (*IV*)

$$(V)\quad \alpha = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{tg^3\,\alpha} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{tg^5\,\alpha} + \frac{1}{7}\,\frac{1}{tg^7\,\alpha} - \ldots\ldots$$

$$(VI)\quad \alpha = \frac{1}{cot\,\alpha} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{cot^3\,\alpha} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{cot^5\,\alpha} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{cot^7\,\alpha} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{cot^9\,\alpha} - \ldots\ldots$$

Sind $tg\,\alpha$ und $cot\,\alpha$ kleiner als 1, so kann man sich der vier ersten Reihen, und wenn solche größer als 1 sind, der beiden letzten Reihen bedienen.

In (*II*) werde $\frac{b}{x}$ statt x gesetzt, dies giebt

$$Arc\,tg\,\frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{b^3}{3x^3} + \frac{b^5}{5x^5} - \frac{b^7}{7x^7} + \ldots\ldots$$

daher nach §. 164. (*XX*)

$$(VII)\quad 2\,Arc\,tg\,\frac{b}{x} = \sqrt{-1}\,.\,lg\,\frac{x+b\sqrt{-1}}{x-b\sqrt{-1}}.$$

Behalten A, B und h die §. 170. gegebene Bedeutung, so wird §. 164. (*IV*)

$$A\,.\,lg\,(1+A^h x) = A^{1+h}x - \tfrac{1}{2}A^{1+2h}x^2 + \tfrac{1}{3}A^{1+3h}x^3 - \ldots\ldots$$
$$B\,.\,lg\,(1+B^h x) = B^{1+h}x - \tfrac{1}{2}B^{1+2h}x^2 + \tfrac{1}{3}B^{1+3h}x^3 - \ldots\ldots$$

daher findet man, wenn $S = \tfrac{1}{2}A\,.\,lg\,(1+A^h x) + \tfrac{1}{2}B\,.\,lg\,(1+B^h x)$ gesetzt wird,

$$S = \frac{A^{1+h}+B^{1+h}}{2\,.\,1}x - \frac{A^{1+2h}+B^{1+2h}}{2\,.\,2}x^2 + \frac{A^{1+3h}+B^{1+3h}}{2\,.\,3}x^3 - \ldots\ldots$$

oder, hierin die entsprechenden Werthe nach §. 170. gesetzt,

$$S = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1}x - \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{2}x^2 + \frac{\cos(\alpha+3\beta)}{3}x^3 - \ldots\ldots\ [I]$$

Aus

Aus $S = \frac{1}{2} A \, lg\,(1 + A^h x) + \frac{1}{2} B \, lg\,(1 + B^h x)$ wird nach §. 170., wenn man zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$ setzt:

$$S = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{2} lg\,[1 + x\cos\beta + i x \sin\beta] + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{2} lg\,[1 + x\cos\beta - i x\sin\beta]$$

oder $\cos\alpha = b$, $\sin\alpha = c$, $1 + x\cos\beta = d$ und $x\sin\beta = e$ gesetzt, giebt

$$S = \frac{b+ci}{2} lg\,(d+ei) + \frac{b-ci}{2} lg\,(d-ei) = \frac{1}{2} lg\,[(d+ei)^{b+ci} \cdot (d-ei)^{b-ci}], \text{ oder}$$

$$S = \frac{1}{2} lg\left[(d+ei)^b \cdot (d-ei)^b \cdot \left(\frac{d+ei}{d-ei}\right)^{ci}\right] = \frac{1}{2} lg\,(d^2+e^2)^b + \frac{1}{2} ci \, lg \frac{d+ei}{d-ei}.$$

Nun ist

$$lg\,(d^2+e^2)^b = b\,lg\,(d^2+e^2) = \cos\alpha \,.\, lg\,[(1+x\cos\beta)^2 + x^2\sin^2\beta] = \cos\alpha \,.\, lg\,(1+2x\cos\beta+x^2)$$

und nach (VII)

$$ci \, lg \frac{d+ei}{d-ei} = -2c \, Arc\,tg \frac{e}{d} = -2\sin\alpha \, Arc\,tg \frac{x\sin\beta}{1+x\cos\beta},$$

folglich wird nach [I]

$$(VIII) \quad \tfrac{1}{2}\cos\alpha \,.\, lg\,(1+2x\cos\beta+x^2) - \sin\alpha \,.\, Arc\,tg \frac{x\sin\beta}{1+x\cos\beta}$$
$$= \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1} x - \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{2} x^2 + \frac{\cos(\alpha+3\beta)}{3} x^3 - \frac{\cos(\alpha+4\beta)}{4} x^4 + \frac{\cos(\alpha+5\beta)}{5} x^5 - \ldots\ldots\ldots$$

Hierin durchgängig $\frac{1}{2}\pi + \alpha$ statt α gesetzt, so erhält man, wegen $\sin\varphi = \cos(\frac{1}{2}\pi + \varphi)$ und $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, nach §. 146. (5) und (12)

$$(IX) \quad \tfrac{1}{2}\sin\alpha \,.\, lg\,(1+2x\cos\beta+x^2) + \cos\alpha \,.\, Arc\,tg \frac{x\sin\beta}{1+x\cos\beta}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1} x - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{2} x^2 + \frac{\sin(\alpha+3\beta)}{3} x^3 - \frac{\sin(\alpha+4\beta)}{4} x^4 + \frac{\sin(\alpha+5\beta)}{5} x^5 - \ldots\ldots$$

Wird hierin $-x$ statt x gesetzt, dann durchgängig mit -1 multiplizirt, so ergiebt sich, wegen $Arc\,tg \frac{-x\sin\beta}{1-x\cos\beta} = - Arc\,tg \frac{x\sin\beta}{1-x\cos\beta}$

$$(X) \quad -\tfrac{1}{2}\cos\alpha \,.\, lg\,(1-2x\cos\beta+x^2) - \sin\alpha \,.\, Arc\,tg \frac{x\sin\beta}{1-x\cos\beta}$$
$$= \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1} x + \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{2} x^2 + \frac{\cos(\alpha+3\beta)}{3} x^3 + \frac{\cos(\alpha+4\beta)}{4} x^4 + \ldots\ldots$$

$$(XI) \quad -\tfrac{1}{2}\sin\alpha \,.\, lg\,(1-2x\cos\beta+x^2) + \cos\alpha \,.\, Arc\,tg \frac{x\sin\beta}{1-x\cos\beta}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1} x + \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{2} x^2 + \frac{\sin(\alpha+3\beta)}{3} x^3 + \frac{\sin(\alpha+4\beta)}{4} x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

Durchgängig in (VII) (IX) (X) und (XI) $\alpha = 0$ gesetzt, dann β mit α vertauscht, giebt

$$(XII) \quad \tfrac{1}{2} lg\,(1+2x\cos\alpha+x^2) = \frac{\cos\alpha}{1} x - \frac{\cos 2\alpha}{2} x^2 + \frac{\cos 3\alpha}{3} x^3 - \frac{\cos 4\alpha}{4} x^4 + \frac{\cos 5\alpha}{5} x^5 - \ldots\ldots$$

$$(XIII) \quad Arc\,tg \frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1} x - \frac{\sin 2\alpha}{2} x^2 + \frac{\sin 3\alpha}{3} x^3 - \frac{\sin 4\alpha}{4} x^4 + \frac{\sin 5\alpha}{5} x^5 - \ldots\ldots$$

$(XIV)\quad -\frac{1}{2} lg(1-2x\cos\alpha+x^2)=\frac{\cos\alpha}{1}x+\frac{\cos 2\alpha}{2}x^2+\frac{\cos 3\alpha}{3}x^3+\frac{\cos 4\alpha}{4}x^4+\frac{\cos 5\alpha}{5}x^5+\ldots\ldots$

$(XV)\quad Arc\,tg\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1}x+\frac{\sin 2\alpha}{2}x^2+\frac{\sin 3\alpha}{3}x^3+\frac{\sin 4\alpha}{4}x^4+\frac{\sin 5\alpha}{5}x^5+\ldots\ldots$

In den vier letzten Ausdrücken durchgängig $x=1$ gesetzt, giebt, wegen

$\frac{1}{2} lg(2+2\cos\alpha)=\frac{1}{2} lg 2+\frac{1}{2} lg(1+\cos\alpha)=\frac{1}{2} lg 2+\frac{1}{2} lg 2(\cos\frac{1}{2}\alpha)^2$ §. 146. (44)

$(XVI)\quad lg\cos\frac{1}{2}\alpha+lg 2=\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{3}\cos 3\alpha-\frac{1}{4}\cos 4\alpha+\frac{1}{5}\cos 5\alpha-\ldots.$

$Arc\,tg\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=Arc\,tg(tg\frac{1}{2}\alpha)$ §. 146. (58) oder (82)

$(XVII)\quad \frac{1}{2}\alpha=\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha-\frac{1}{4}\sin 4\alpha+\frac{1}{5}\sin 5\alpha-\ldots\ldots$

Ferner, wegen §. 146. (43),

$(XVIII)\quad -lg\sin\frac{1}{2}\alpha-lg 2=\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{3}\cos 3\alpha+\frac{1}{4}\cos 4\alpha+\frac{1}{5}\cos 5\alpha+\ldots\ldots$

und wegen §. 146. (60) (20) (82)

$(XIX)\quad \frac{\pi-\alpha}{2}=\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha+\frac{1}{4}\sin 4\alpha+\frac{1}{5}\sin 5\alpha+\ldots\ldots\ldots$

Wird (XII) zu (XIV), und (XIII) zu (XV) addirt, so erhält man

$(XX)\quad \frac{1}{4} lg\frac{1+2x\cos\alpha+x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\cos\alpha}{1}x+\frac{\cos 3\alpha}{3}x^3+\frac{\cos 5\alpha}{5}x^5+\frac{\cos 7\alpha}{7}x^7+\frac{\cos 9\alpha}{9}x^9+\ldots.$

$(XXI)\quad \frac{1}{2}Arc\,tg\frac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}-\frac{1}{2}Arc\,tg\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1}x+\frac{\sin 3\alpha}{3}x^3+\frac{\sin 5\alpha}{5}x^5+\frac{\sin 7\alpha}{7}x^7+\ldots..$

In (XX) werde $x=1$ gesetzt, dies giebt

$\frac{1}{4} lg\frac{2+2\cos\alpha}{2-2\cos\alpha}=\frac{1}{4} lg\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{4} lg(\cot\frac{1}{2}\alpha)^2=\frac{1}{2} lg\cot\frac{1}{2}\alpha$ §. 146. (43) (44), oder

$(XXII)\quad -\frac{1}{2} lg\,tg\frac{1}{2}\alpha=\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos 3\alpha+\frac{1}{5}\cos 5\alpha+\frac{1}{7}\cos 7\alpha+\frac{1}{9}\cos 9\alpha+\ldots..$

Die vorstehenden Reihen (XVI) (XVIII) und (XXII) findet **Euler**, *Institutionum calculi integralis. Vol. I. Petropoli*, 1792. *Cap. VI.* §. 296. *p.* 177. Auch kann man hiemit die §. 170. angef. Abhdl. aus den *Annal. de mathémat.* vergleichen.

§. 172.

Die gefundenen Ausdrücke zur Berechnung eines Kreisbogens aus der Tangente desselben, können zur Bestimmung der Zahl π dienen, welche den Umfang eines Kreises für den Durchmesser 1 oder den halben Kreisumfang für den Halbmesser 1 ausdrückt.

Denn es ist der Bogen welcher einem Winkel von 45 Grad entspricht $=\frac{1}{4}\pi$, daher $tg\frac{1}{4}\pi=1$, folglich §. 171. (I) wenn $\frac{1}{4}\pi$ statt α gesetzt und mit 4 multiplizirt wird

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots.\right)$$

welches die **leibnitzsche Reihe** für den Kreisumfang ist.

(*Acta eruditorum Anno* 1682. *M. Febr. — De vera proportione circuli — a. G. G. Leibnitio. pag.* 41 — 46.)

Werden jede zwei auf einander folgende Glieder dieser Reihe zusammen addirt, so findet man

$$\pi=8\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{13.15}+\frac{1}{17.19}+\ldots.\right)$$

Um eine schneller abnehmende Reihe für π zu erhalten, setze man $tg\,\alpha = \frac{2}{10}$, so findet man hieraus (§. 156. *III.*) $tg\,4\alpha = \frac{120}{119}$. Ferner wird §. 146. [53], weil $tg\,\frac{1}{4}\,\pi = 1$ ist,

$$tg\,(4\alpha - \tfrac{1}{4}\,\pi) = \frac{tg\,4\alpha - 1}{1 + tg\,4\alpha} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \tfrac{1}{239}.$$

Hienach ist (§. 171.), $\alpha = Arc\;tg\,\frac{2}{10}$, also

$$4\alpha = 4.\,Arc\;tg\,\tfrac{2}{10},\ \text{und}\ (4\alpha - \tfrac{1}{4}\,\pi) = Arc\;tg\,\tfrac{1}{239},\ \text{daher}$$

$$4\alpha - (4\alpha - \tfrac{1}{4}\,\pi) = \tfrac{1}{4}\,\pi = 4\;Arc\;tg\,\tfrac{2}{10} - Arc\;tg\,\tfrac{1}{239}.$$

Nun ist §. 171. (*II*).

$$Arc\;tg\,\frac{2}{10} = \frac{2}{10} - \frac{1}{3}\,\frac{2^3}{10^3} + \frac{1}{5}\,\frac{2^5}{10^5} - \frac{1}{7}\,\frac{2^7}{10^7} + \ldots \ \text{und}$$

$$Arc\;tg\,\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{239^5} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{239^7} + \ldots \ \text{folglich}$$

$$\pi = 4\left\{\begin{array}{l} + \frac{4}{5}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{4}{100} + \frac{1}{5}\,\frac{4^2}{100^2} - \frac{1}{7}\,\frac{4^3}{100^6} + \ldots\right] \\ \frac{-1}{239}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{1}{239^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{239^4} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{239^6} + \ldots\right] \end{array}\right\}$$

Berechnet man von der obern Reihe nur 7 und von der untern, wegen ihrer schnellern Abnahme, nur 3 Glieder, so erhält man

$$\pi = 4\left\{\begin{array}{l} + 0{,}789\,582\,239\,408 \\ - 0{,}004\,184\,076\,002 \end{array}\right\} = 3{,}141\,592\,653\,624$$

wo die neun ersten Dezimalstellen vollkommen genau sind.

Wird die Rechnung weit genug fortgesetzt, so findet man

$$\pi = 3{,}14159\;26535\;89793\;23846\;26433\ \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\;98861\;83790\;67153\;77679\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\;38509\;05516\;02729\;81675\ \ldots\ldots$$

$$lg\;nat\;\pi = 1{,}14472\;98858\;49400\;17414\;342\ \ldots\ldots$$

$$Lg\;br\;\pi = 0{,}49714\;98726\;94133\;85435\;127\ \ldots\ldots$$

Auch sind hier, ihres öftern Gebrauchs wegen, noch einige Quadratwurzeln beigefügt.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\;35623\;73095\;04880\;16887\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1{,}73205\;08075\;68877\;29352\;74463\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt{5} = 2{,}23606\;79774\;99789\;69640\;91737\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt{6} = 2{,}44948\;97427\;83178\;09819\;72841\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt{7} = 2{,}64575\;13110\;64590\;59050\;16158\ \ldots\ldots$$

$$\sqrt{10} = 3{,}16227\;76601\;68379\;33199\;88935\ \ldots\ldots$$

§. 173.

Man setze §. 167. die Zahl π statt der dortigen Reihe $4\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$ so wird

$$(I)\quad Lg\,(-1) = M\,\pi\,\sqrt{-1},\ \text{und}\ lg\,(-1) = \pi\,\sqrt{-1}.$$

Ferner wird, wenn α irgend eine Zahl bedeutet,

$$Lg\,(-1)^{\pm\alpha} = \pm\,\alpha\,Lg\,(-1) = \pm\,\alpha\,M\pi\,\sqrt{-1}, \text{ daher}$$

$$(II)\quad Lg\,(-1)^{\pm\alpha} = \pm\,\alpha\,M\pi\,\sqrt{-1}, \text{ und } lg\,(-1)^{\pm\alpha} = \pm\,\alpha\pi\,\sqrt{-1}.$$

Bedeutet n jede ganze Zahl oder o, so wird

$$x = x\,(-1)^{2n}, \text{ und } -x = x\,(-1)^{2n+1}, \text{ also}$$

$$Lg\,x = Lg\,x + 2n\,Lg\,(-1) \text{ und } Lg\,(-x) = Lg\,x + (2n+1)\,Lg\,(-1), \text{ oder}$$

$$(III)\quad \left\{\begin{array}{l} Lg\,x \;\;\;\;= Lg\,x + 2n\,M\pi\,\sqrt{-1} \\ Lg\,(-x) = Lg\,x + (2n+1)\,M\pi\,\sqrt{-1} \end{array}\right\}$$

Weil nun für n jede ganze Zahl oder o angenommen werden kann, so folgt hieraus, daß jeder positiven oder negativen Zahl unendlich viel Logarithmen zugehören. Unter den Logarithmen positiver Zahlen ist nur einer reel (für $n =$ o), alle übrige sind unmöglich.

Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$, so wird aus (II) nach §. 161. (III)

$$(IV)\quad (-1)^{\pm\alpha} = e^{\pm\alpha\pi i}.$$

Hienach wird auch $(-1)^{\mp\alpha} = e^{\mp\alpha\pi i}$. Bedeutet nun α nur eine ganze Zahl oder o, so wird $(-1)^{\pm\alpha} = (-1)^{\mp\alpha} = +1$ für ein gerades α, und

$(-1)^{\pm\alpha} = (-1)^{\mp\alpha} = -1$ für ein ungerades α, daher wird, wenn α jede ganze Zahl oder o bedeutet,

$$(V)\quad e^{\alpha\pi i} = e^{-\alpha\pi i}.$$

Auch erhält man nach (IV)

$$(VI)\quad \left\{\begin{array}{l} +1 = e^{\pm\alpha\pi i}, \text{ für ein gerades } \alpha \\ -1 = e^{\pm\alpha\pi i}, \text{ für ein ungerades } \alpha \end{array}\right\}$$

§. 174.

Die §. 171 gefundenen Ausdrücke können auch zur Entwickelung von $Arc\,sin\,x$ und $Arc\,cos\,x$ dienen. Denn es ist §. 146. [22].

$$\frac{1}{cot\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{(1-sin\,\alpha^2)}} \text{ oder } \frac{1}{n\,cot\,\alpha^n} = \frac{sin\,\alpha^n}{n(1-sin\,\alpha^2)^{\frac{n}{2}}}; \text{ daher, wenn man } sin\,\alpha = x \text{ setzt,}$$

$$\frac{1}{n\,cot\,\alpha^n} = \frac{x^n\,(1-x^2)^{-\frac{n}{2}}}{n}, \text{ oder §. 25.}$$

$$= \frac{2}{n}\,\frac{x^n}{2} + 1\,\frac{x^{n+2}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)_1 \frac{x^{n+4}}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{n+4}{2}\right)_2 \frac{x^{n+6}}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{n+6}{2}\right)_3 \frac{x^{n+8}}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{n+8}{2}\right)_4 \frac{x^{n+10}}{2} + \ldots.$$

wo $\left(\frac{n+2}{2}\right)_1$; $\left(\frac{n+4}{2}\right)_2$; .... Binomialkoeffizienten sind. Entwickelt man hienach die Werthe von $\frac{1}{cot\,\alpha}$; $\frac{1}{3\,cot\,\alpha^3}$; ..... so findet man nach (VI) §. 171.

wenn die entsprechenden Werthe nach x geordnet werden,

$$\alpha = 2\,\frac{x}{2}\begin{array}{rl} +\,1 \\ -\,\frac{2}{3} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left|\frac{x^3}{2}\begin{array}{rl} + & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)_1 \\ - & 1 \\ + & \frac{2}{5} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right|\frac{x^5}{2}\begin{array}{rl} + & \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)_2 \\ - & \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)_1 \\ + & 1 \\ - & \frac{2}{7} \\ \\ \\ \end{array}\left|\frac{x^7}{2}\begin{array}{rl} + & \frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}\right)_3 \\ - & \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)_2 \\ + & \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)_1 \\ - & 1 \\ + & \frac{2}{9} \\ \\ \end{array}\right|\frac{x^9}{2}\begin{array}{rl} + & \frac{1}{5}\left(\frac{9}{2}\right)_4 \\ - & \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}\right)_3 \\ + & \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)_2 \\ - & \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)_1 \\ + & 1 \\ - & \frac{2}{11} \end{array}\left|\frac{x^{11}}{2} + \cdots\right.$$

Nun ist nach §. 41. (XXXII)

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)_1 - 1 = \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{5}$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{5}{2}\right)_2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{2}\right)_1 + 1 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{7}$$

$$\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{7}{2}\right)_3 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{7}{2}\right)_2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{7}{2}\right)_1 - 1 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{9}$$

$$\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{9}{2}\right)_4 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{9}{2}\right)_3 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{9}{2}\right)_2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{2}\right)_1 + 1 = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\tfrac{2}{11} + \tfrac{2}{11}$$

u. s. w.

Diese Werthe in die vorstehende Gleichung gesetzt, giebt

$$\alpha = x + \tfrac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{x^9}{9} + \cdots$$

oder, man erhält weil $x = \sin\alpha$, also $Arc\,\sin x = \alpha$, so

$$(I)\quad Arc\,\sin x = x + \tfrac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{x^9}{9} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{x^{11}}{11} + \cdots$$

oder auch

$$(II)\quad \alpha = \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin\alpha^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin\alpha^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{\sin\alpha^9}{9} + \cdots$$

Nun ist $Arc\,\cos x = \tfrac{1}{2}\,\pi - Arc\,\sin x$, daher wird

$$(III)\quad Arc\,\cos x = \tfrac{1}{2}\,\pi - x - \tfrac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{x^9}{9} - \cdots$$

Für $Arc\,\cos x = \alpha$ wird $x = \cos\alpha$, folglich

$$(IV)\quad \alpha = \tfrac{1}{2}\,\pi - \cos\alpha - \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\cos\alpha^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\cos\alpha^7}{7} - \cdots$$

Die entsprechenden Werthe vorstehender Koeffizienten in Dezimalbrüchen sind:

$\frac{1}{2.3} = 0{,}16666\ 66667$	$\frac{1.3\ \ldots\ 9.11}{2.4\ \ldots\ 12.13} = 0{,}01735\ 27644$
$\frac{1.3}{2.4.5} = 0{,}07500\ 00000$	$\frac{1.3\ \ldots\ 11.13}{2.4\ \ldots\ 14.15} = 0{,}01396\ 48437$
$\frac{1.3.5}{2.4.6.7} = 0{,}04464\ 28571$	$\frac{1.3\ \ldots\ 13.15}{2.4\ \ldots\ 16.17} = 0{,}01155\ 18009$
$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} = 0{,}03038\ 19444$	$\frac{1.3\ \ldots\ 15.17}{2.4\ \ldots\ 18.19} = 0{,}00976\ 16095$
$\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11} = 0{,}02237\ 21591$	$\frac{1.3\ \ldots\ 17.19}{2.4\ \ldots\ 20.21} = 0{,}00839\ 03358$

u. s. w.

§. 175.

Durch Anwendung der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, kann die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade sehr erleichtert werden.

Es sey daher zuerst die Gleichung

$$x^3 + Ax + B = 0$$

gegeben. Man setze $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{4A^3}{27B^2}}$, wo φ einen noch näher zu bestimmenden Bogen bedeutet, so wird $\frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{27}A^3 \cdot \frac{1}{tg\,\varphi^2} = \frac{1}{27}A^3 \cot\varphi^2$ und $\frac{1}{2}B = \cot\varphi \cdot \sqrt{\frac{A^3}{27}}$. Diese Werthe in p und q, §. 136. gesetzt, geben

$$p = -\sqrt[3]{\left[\cot\varphi \cdot \sqrt{\frac{A^3}{27}} - \sqrt{\left(\frac{A^3}{27}\cot\varphi^2 + \frac{A^3}{27}\right)}\right]} = -\sqrt[3]{[\cot\varphi - \sqrt{(\cot\varphi^2 + 1)}]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}},$$ oder

es wird, weil $\sqrt{(\cot\varphi^2 + 1)} = \sqrt{\frac{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2}} = \frac{1}{\sin\varphi}$ ist,

$$p = -\sqrt[3]{\left[\cot\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} = -\sqrt[3]{\left[\frac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}},$$ und eben so

$$q = -\sqrt[3]{\left[\frac{\cos\varphi + 1}{\sin\varphi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$$ oder §. 146. [58] und [60]

$$p = -\sqrt[3]{[-tg\,\tfrac{1}{2}\varphi]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} = \sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}},$$ und $q = -\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$, daher

$$p + q = [\sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi}] \cdot \sqrt{\frac{A}{3}},$$ und $p - q = [\sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi}] \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$, oder

$\sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} = tg\,\psi$ gesetzt, giebt $\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} = \cot\psi$, also

$$p + q = [tg\,\psi - \cot\psi] \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} = -2\cot 2\psi \cdot \sqrt{\frac{A}{3}},$$ wegen §. 146. [59], und

$$p - q = [tg\,\psi + \cot\psi] \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} = \frac{2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{A}{3}},$$ wegen §. 146. [61].

Man findet daher (§. 136.) die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder

$$x = p + q = -2\cot 2\psi \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$$

$$x = -\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\sqrt{-3} = \cot 2\psi \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} + \frac{\sqrt{A}\sqrt{-1}}{\sin 2\psi},$$ und

$$x = -\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\sqrt{-3} = \cot 2\psi \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} - \frac{\sqrt{A}\sqrt{-1}}{\sin 2\psi}.$$

Für ein negatives B ist die gegebene Gleichung

$$x^3 + Ax - B = 0.$$

Setzt man nun, wie vorhin, $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{4A^3}{27B^2}}$, so wird $\frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{27}A^3\cot\varphi^2$, also $-\frac{1}{2}B = -\cot\varphi\sqrt{\frac{A^3}{27}}$, und man findet eben so für die drei Wurzeln der vorstehenden Gleichung, wenn §. 136. $-B$ statt B gesetzt wird,

$$x = 2 \cot 2\psi . \sqrt{\frac{A}{3}}$$
$$x = - \cot 2\psi . \sqrt{\frac{A}{3}} - \frac{\sqrt{A}\sqrt{-1}}{\sin 2\psi}, \text{ und}$$
$$x = - \cot 2\psi . \sqrt{\frac{A}{3}} + \frac{\sqrt{A}\sqrt{-1}}{\sin 2\psi}.$$

Wäre die Gleichung:

$$x^3 - Ax + B = 0 \text{ und } \tfrac{1}{27} A^3 < \tfrac{1}{4} B^2$$

gegeben, so setze man $\sin\varphi = \sqrt{\frac{4A^3}{27B^2}}$, dann wird dieser Sinus kleiner als der Halbmesser, und man erhält $\frac{1}{4}B^2 = \frac{A^3}{27} . \frac{1}{\sin\varphi^2}$ so wie $\frac{1}{2}B = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{A^3}{27}}$, daher §. 136. wenn daselbst $-A$ statt A gesetzt wird

$$p = -\sqrt[3]{\left[\frac{1}{\sin\varphi} - \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\varphi^2} - 1\right)}\right]} . \sqrt{\frac{A}{3}} = -\sqrt[3]{\left[\frac{1}{\sin\varphi} - \sqrt{\frac{1-\sin\varphi^2}{\sin\varphi}}\right]} . \sqrt{\frac{A}{3}} = -\sqrt[3]{\left[\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]} . \sqrt{\frac{A}{3}}$$

und $q = -\sqrt[3]{\left[\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]} . \sqrt{\frac{A}{3}}$ oder §. 146. [58] und [60]

$$p = - \sqrt[3]{tg \tfrac{1}{2}\varphi} . \sqrt{\frac{A}{3}} \text{ und } q = - \sqrt[3]{\cot \tfrac{1}{2}\varphi} . \sqrt{\frac{A}{3}}, \text{ daher}$$

$p + q = - [\sqrt[3]{tg \frac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\cot \frac{1}{2}\varphi}] . \sqrt{\frac{A}{3}}$, und $p - q = [\sqrt[3]{\cot \frac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{tg \frac{1}{2}\varphi}] . \sqrt{\frac{A}{3}}$, oder

$$\sqrt[3]{tg \tfrac{1}{2}\varphi} = tg\,\psi \text{ gesetzt, giebt } \sqrt[3]{\cot \tfrac{1}{2}\varphi} = \cot\psi, \text{ also}$$

$p + q = - [tg\,\psi + \cot\psi] . \sqrt{\frac{A}{3}} = \frac{-2}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}}$ wegen §. 146. [61], und

$p - q = [\cot\psi - tg\,\psi] . \sqrt{\frac{A}{3}} = 2 \cot 2\psi . \sqrt{\frac{A}{3}}$ wegen §. 146. [59]. Man findet daher (§. 136.) die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder

$$x = - \frac{2}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}}$$
$$x = \frac{1}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}} + \cot 2\psi . \sqrt{A} . \sqrt{-1}$$
$$x = \frac{1}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}} - \cot 2\psi . \sqrt{A} . \sqrt{-1}.$$

Eben so findet man für die Gleichung:

$$x^3 - Ax - B = 0$$
$$x = \frac{2}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}}$$
$$x = \frac{-1}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}} - \cot 2\psi . \sqrt{A} . \sqrt{-1}, \text{ und}$$
$$x = \frac{-1}{\sin 2\psi} . \sqrt{\frac{A}{3}} + \cot 2\psi . \sqrt{A} . \sqrt{-1}.$$

Wäre endlich die Gleichung

$$x^3 - Ax + B = 0 \text{ und } \tfrac{1}{27} A^3 > \tfrac{1}{4} B^2$$

gegeben, so setze man $\cos\varphi = \sqrt{\frac{27 B^2}{4 A^3}}$, dann wird dieser Cosinus kleiner als der Halbmesser, und man erhält: $\frac{1}{4} B^2 = \frac{1}{27} A^3 \cos\varphi^2$, auch $\frac{1}{2} B = \cos\varphi \sqrt{\frac{A^3}{27}}$, daher §. 136.

$p = -\sqrt[3]{[\cos\varphi - \sqrt{(\cos\varphi^2 - 1)}]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$ und $q = -\sqrt[3]{[\cos\varphi + \sqrt{(\cos\varphi^2 - 1)}]} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$, oder

$p = -[\cos\varphi - \sin\varphi \cdot \sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$ und $q = -[\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$, oder §. 147.

$p = -[\cos\frac{1}{3}\varphi - \sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{-1}] \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$ und $q = -[\cos\frac{1}{3}\varphi + \sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{-1}] \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$, also

$p + q = -2\cos\frac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\frac{A}{3}}$, und $p - q = 2\sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\frac{A}{3}} \cdot \sqrt{-1}$. Man findet daher (§. 136.) die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder

$$x = -2\cos\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}}$$

$$x = \cos\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}} + \sin\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}} \cdot \sqrt{3}, \text{ und}$$

$$x = \cos\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}} - \sin\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}} \cdot \sqrt{3}.$$

Die beiden letzten Werthe lassen sich noch einfacher ausdrücken, wenn man bemerkt, daß $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist. Weil

$$\cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sin\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{3} = 2\left[\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\tfrac{1}{3}\varphi\right]$$

$$= 2[\cos 60^\circ \cdot \cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sin 60^\circ \cdot \sin\tfrac{1}{3}\varphi] = 2\cos(60^\circ \mp \tfrac{1}{3}\varphi)$$

wegen §. 146. [31] und [32] ist, so erhält man auch

$$x = 2\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}}, \text{ und}$$

$$x = 2\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}}.$$

Für ein negatives B erhält man

$$x^3 - Ax - B = 0 \text{ und } \tfrac{1}{27} A^3 > \tfrac{1}{4} B^2.$$

Hieraus findet sich, wie vorhin,

$$x = 2\cos\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}}$$

$$x = -2\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}}$$

$$x = -2\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) \cdot \sqrt{\tfrac{A}{3}}.$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß wenn die Gleichung

$$(I)\quad x^3 + Ax \pm B = 0$$

gegeben ist, so suche man

$$tg\,\varphi = \mp \sqrt{\frac{4A^3}{27B^2}}, \text{ und hieraus}$$

$$tg\,\psi = \mp \sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi},$$

so ist hienach der Winkel ψ bekannt, und man erhält alsdann für die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = \mp\, 2\,cot\,2\psi \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}}$$

$$x = \pm\, 2\,cot\,2\psi \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}} \pm \frac{\sqrt{A}.\sqrt{-1}}{sin\,2\psi} \text{ und}$$

$$x = \pm\, 2\,cot\,2\psi \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}} \mp \frac{\sqrt{A}.\sqrt{-1}}{sin\,2\psi}$$

wo die oberen Zeichen für ein positives und die unteren für ein negatives B gelten.

Für die Gleichung:

$$(II)\quad x^3 - Ax \pm B = o \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 < \tfrac{1}{4}B^2$$

suche man

$$sin\,\varphi = \sqrt{\frac{4A^3}{27B^2}}, \text{ und hieraus}$$

$$tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi},$$

so wird

$$x = \mp \frac{2}{sin\,2\psi} \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}}$$

$$x = \pm \frac{1}{sin\,2\psi} \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}} \pm cot\,2\psi\,.\sqrt{A}\,.\sqrt{-1} \text{ und}$$

$$x = \pm \frac{1}{sin\,2\psi} \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}} \mp cot\,2\psi\,.\sqrt{A}\,.\sqrt{-1}.$$

Endlich suche man, wenn die Gleichung:

$$(III)\quad x^3 - Ax \pm B = o \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 > \tfrac{1}{4}B^2$$

gegeben ist,

$$cos\,\varphi = \sqrt{\frac{27B^2}{4A^3}},$$

so findet man mittelst des bekannten Winkels φ

$$x = \mp\, 2\,cos\,\tfrac{1}{3}\varphi \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}}$$

$$x = \pm\, 2\,cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}} \text{ und}$$

$$x = \pm\, 2\,cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) \,.\, \sqrt{\frac{A}{3}}$$

wo die oberen Zeichen für ein positives und die unteren für ein negatives B gelten.

Hienach ist man im Stande, mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln, jede Gleichung vom dritten Grade aufzulösen, und weil nach §. 140. hievon die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade abhängt, so kann man auch hienach die Wurzeln einer jeden Gleichung vom vierten Grade finden.

1. **Beispiel.** Die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 9x + 6 = 0$ zu finden, wird hier $A = 9$ und $B = 6$, daher nach (I)

$$tg\,\varphi = \sqrt{3} = tg\,60^\circ \text{ also } \varphi = 60^\circ, \text{ daher}$$

$$tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} = \sqrt[3]{tg\,30^\circ}, \text{ oder}$$

$$Lg\,tg\,\psi = \tfrac{1}{3}\,Lg\,tg\,30^\circ = 9{,}9204798 - 10 = Lg\,tg\,39^\circ\,47'\,0{,}89''$$

daher $2\psi = 79^\circ\,34'\,1{,}78''$. Hienach

$$Lg\,cot\,2\psi = 9{,}265\;1172 - 10$$
$$Lg\,2 = 0{,}301\;0300$$
$$\tfrac{1}{2}\,Lg\,3 = \underline{0{,}238\;5606}$$
$$Log\,2\,cot\,2\psi\,.\sqrt{\frac{A}{3}} = 0{,}804\;7078 - 1 = Lg\,0{,}637\;8343.$$

Sucht man auch die unmöglichen Wurzeln, so wird

$$Lg\,3 = 0{,}477\;1213$$
$$Lg\,sin\,2\psi = \underline{9{,}992\;7602 - 10}$$
$$Lg\,\frac{\sqrt{A}}{sin\,2\psi} = 0{,}584\;3611 = lg\,3{,}840\,264.$$

Hienach sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = -\,0{,}6378343$$
$$x = \,0{,}6378343 + 3{,}840264\,\sqrt{-1}$$
$$x = \,0{,}6378343 - 3{,}840264\,\sqrt{-1}.$$

Hiemit vergleiche man §. 136. (1. Beisp.)

2. **Beispiel.** Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ zu finden, ist hier $A = 2$ und $B = 5$, also $\frac{1}{27}A^3 < \frac{1}{4}B^2$ daher nach (II) $sin\,\varphi = \sqrt{\frac{32}{675}}$, also

$$Lg\,sin\,\varphi = \tfrac{1}{2}\,Lg\,\tfrac{32}{675} = 9{,}3379231 - 10 = Lg\,sin\,12^\circ\,34'\,33{,}2''$$

daher $\frac{1}{2}\varphi = 6^\circ\,17'\,16{,}6''$ und $Lg\,tg\,\psi = \frac{1}{3}\,Lg\,tg\,\frac{1}{2}\varphi = 9{,}6807114 - 10 = Lg\,tg\,25^\circ 36'\,49{,}5''$

daher $2\psi = 51^\circ\,13'\,39''$. Hienach, wegen $2\sqrt{\frac{A}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$

$$\tfrac{1}{2}\,Lg\,\tfrac{8}{3} = 0{,}212\;9843$$
$$Lg\,sin\,2\psi = \underline{9{,}891\;8933 - 10}$$
$$Lg\,\frac{2}{sin\,2\psi}\sqrt{\frac{A}{3}} = 0{,}321\;0910 = Lg\,2{,}094551.$$

Für die unmöglichen Wurzeln erhält man

$$Lg\,cot\,2\psi = 9{,}904\;8404 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}\,Lg\,2 = \underline{0{,}150\;5150}$$
$$Lg\,cot\,2\psi\,.\sqrt{A} = 0{,}055\;3554 = Lg\,1{,}135940.$$

Hienach sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = -\,2{,}094551$$
$$x = \,1{,}047276 + 1{,}135940\,\sqrt{-1}$$
$$x = \,1{,}047276 - 1{,}135940\,\sqrt{-1}.$$

Hiemit vergleiche man §. 133. und 221.

3. **Beispiel.** Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 5x + 3 = 0$ zu finden, ist hier $A = 5$ und $B = 3$, also $\frac{1}{27} A^3 > \frac{1}{4} B^2$, daher nach ($III$)

$\cos\varphi = \sqrt{\frac{243}{500}}$, oder

$$Lg \cos\varphi = \tfrac{1}{2} Lg \tfrac{243}{500} = 9{,}8433181 - 10 = Lg \cos 45^\circ\, 48'\, 8{,}079'',$$

daher $\frac{1}{3}\varphi = 15^\circ\, 16'\, 2{,}693''$. Hienach, wegen $2\sqrt{\frac{A}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}}$,

$$\tfrac{1}{2} Lg \tfrac{20}{3} = 0{,}411\ 9543$$
$$Lg \cos \tfrac{1}{3}\varphi = \underline{9{,}984\ 3956 - 10}$$
$$0{,}396\ 3499 = Lg\, 2{,}490863.$$

Ferner ist $60^\circ - \frac{1}{3}\varphi = 44^\circ\, 43'\, 57{,}307''$, also

$$\tfrac{1}{2} Lg \tfrac{20}{3} = 0{,}411\ 9543$$
$$Lg \cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) = \underline{9{,}851\ 5025 - 10}$$
$$0{,}263\ 4568 = Lg\, 1{,}834243.$$

Endlich wird $60^\circ + \frac{1}{3}\varphi = 75^\circ\, 16'\, 2{,}693''$, also

$$\tfrac{1}{2} Lg \tfrac{20}{3} = 0{,}411\ 9543$$
$$Lg \cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) = \underline{9{,}405\ 3600 - 10}$$
$$0{,}817\ 3143 - 1 = Lg\, 0{,}656620.$$

Hienach erhält man für die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = -\ 2{,}490863$$
$$x = 1{,}834243$$
$$x = 0{,}656620.$$

4. **Beispiel.** Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ zu finden, wird hier $A = B = 7$, also $\frac{1}{27} A^3 > \frac{1}{4} B^2$ daher nach (III) $\cos\varphi = \sqrt{\frac{27}{28}}$, und wenn man sich der großen logarithmischen Tafeln bedient, um mehrere Decimalstellen der Wurzeln zu finden, so erhält man

$$Lg\ oos\,\varphi = \tfrac{1}{2} Lg \tfrac{27}{28} = 9{,}992\ 1028\ 664 - 10 = Lg \cos 10^\circ\, 53'\, 36{,}22086''$$

daher $\frac{1}{3}\varphi = 3^\circ\, 37'\, 52{,}0736''$. Hienach, wegen $2\sqrt{\frac{A}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}}$,

$$\tfrac{1}{2} Lg \tfrac{28}{3} = 0{,}485\ 0183\ 883$$
$$Lg \cos \tfrac{1}{3}\varphi = \underline{9{,}999\ 1272\ 618 - 10}$$
$$0{,}484\ 1456\ 501 = Lg\, 3{,}0489173368.$$

Ferner ist $60^\circ - \frac{1}{3}\varphi = 56^\circ\, 22'\, 7{,}9264''$, also

$$\tfrac{1}{2} Lg \tfrac{28}{3} = 0{,}485\ 0183\ 883$$
$$Lg \cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) = \underline{9{,}743\ 3874\ 819 - 10}$$
$$0{,}228\ 4058\ 702 = Lg\, 1{,}6920214727.$$

Endlich wird $60^\circ + \frac{1}{3}\varphi = 63^\circ\, 37'\, 52{,}0736''$, also

$$\tfrac{1}{2} Lg \tfrac{28}{3} = 0{,}485\ 0183\ 883$$
$$Lg \cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) = \underline{9{,}647\ 5281\ 313 - 10}$$
$$0{,}132\ 5465\ 196 = Lg\, 1{,}3568958667.$$

Hienach erhält man für die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = + 3{,}048\ 917\ 3388$$
$$x = - 1{,}692\ 021\ 4727$$
$$x = - 1{,}356\ 895\ 8667.$$

Weil nun nach §. 104. die Summe dieser drei Wurzeln $= 0$ seyn muß, so folgt hieraus, daß jede derselben bis auf neun Dezimalstellen genau berechnet ist.

Siebentes Kapitel.

Von der taylorischen Reihe und den abgeleiteten Funkzionen.

§. 176.

Die Abhängigkeit veränderlicher Größen von einander läßt sich durch Gleichungen ausdrücken (§. 1.), und man übersieht leicht, daß, wenn in einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen eine derselben eine Veränderung erleidet, alsdann die Gleichung nur noch bestehen kann, wenn die zweite veränderliche Größe die erforderliche Vermehrung oder Verminderung erhält. Es ist für die in der Analysis vorkommenden Untersuchungen von der größten Wichtigkeit, und die Auflösung der vorzüglichsten Aufgaben hängt davon ab, daß man anzugeben weiß nach welchen Gesetzen gegebene Funkzionen verändert werden müssen, wenn einzelne Größen derselben sich ändern.

Bedeutet y irgend eine Funkzion der veränderlichen Größe x, welches durch $y = fx$ bezeichnet wird, so läßt sich fragen, welche Veränderung wird y erleiden, wenn die Größe x irgend vermehrt oder vermindert wird; oder, wenn x in fx um irgend eine gegebene Größe h vermehrt wird, wieviel wird der Zusatz w betragen um welchen y sich ändert. Dies kann man auf folgende Weise ausdrücken.

Wäre $y = fx$, so werde

$$y + w = f(x + h).$$

Soll hienach der Werth von w, also der Zusatz von y bestimmt werden, so muß h bekannt seyn.

Wenn daher z. B. $y = a - bx + cx^3$ gegeben ist, und y wächst um w, wenn x um h wächst, so wird:

$$y + w = a - b(x + h) + c(x + h)^3;\ \text{oder}$$
$$y + w = a - bx - bh + cx^3 + 3cx^2h + 3cxh^2 + ch^3.$$
$$y = a - bx + cx^3\ \text{abgezogen, giebt}$$
$$w = - bh + 3cx^2h + 3cxh^2 + ch^3,$$

wodurch der Zusatz w welchen y erhält bekannt wird, die Größe h mag positiv oder negativ seyn, oder irgend einen beliebigen Werth erhalten.

Um nun allgemein das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich die Funkzion $y = fx$ verändern muß, wenn x einen Zuwachs $= h$ erhält, werde vorausgesetzt, daß die Funkzion von x durch folgende Reihe, welche ohne Ende fortschreiten oder abbrechen kann, gegeben sey

$$y = Ax^a + A_1 x^b + A_2 x^c + A_3 x^d + A_4 x^e + \ldots\ldots$$

wo A, A_1, A_2, A_3 .... und a, b, c, d .... willkührliche beständige positive oder negative Größen bezeichnen. Wächst nun x um h und y um w, so wird

$$y + w = f(x+h) = A(x+h)^a + A_1(x+h)^b + A_2(x+h)^c + \ldots.$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze (§. 25.), wenn man die Glieder nach den Potenzen von h ordnet:

$$y + w = f(x+h) = \left\{\begin{array}{l|l|l|l}
A\ x^a + A\ a x^{a-1} & h + A\ a_2 x^{a-2} & h^2 + A\ a_3 x^{a-3} & h^3 + \ldots \\
+ A_1 x^b + A_1 b\, x^{b-1} & + A_1 b_2 x^{b-2} & + A_1 b_3 x^{b-3} & + \ldots \\
+ A_2 x^c + A_2 c\, x^{c-1} & + A_2 c_2 x^{c-2} & + A_2 c_3 x^{c-3} & + \ldots \\
+ A_3 x^d + A_3 d\, x^{d-1} & + A_3 d_2 x^{d-2} & + A_3 d_3 x^{d-3} & + \ldots \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{array}\right.$$

oder man findet, wenn die Binomialkoeffizienten a_2, a_3 ... b_2, b_3 ... in ihre Faktoren aufgelößt, und die Nenner derselben unter die Potenzen von h gesetzt werden,

$$y + w = f(x+h) =$$

$$\begin{array}{r|l|l|l}
A\ x^a + A\ a x^{a-1} & h + A\ a(a-1)\,x^{a-2} & \frac{h^2}{2!} + A\ a(a-1)(a-2)\,x^{a-3} & \frac{h^3}{3!} \\
+ A_1 x^b + A_1 b x^{b-1} & + A_1 b(b-1)\,x^{b-2} & + A_1 b(b-1)(b-2)\,x^{b-3} & \\
+ A_2 x^c + A_2 c\, x^{c-1} & + A_2 c(c-1)\,x^{c-2} & + A_2 c(c-1)(c-2)\,x^{c-3} & \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
+ A\ a(a-1)(a-2)(a-3)x^{a-4} & \frac{h^4}{4!} + A\ a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)x^{a-5} & \frac{h^5}{5!} + \ldots \\
+ A_1 b(b-1)(b-2)(b-3)\,x^{b-4} & + A_1 b(b-1)(b-2)(b-3)(b-4)\,x^{b-5} & + \ldots \\
+ A_2 c(c-1)(c-2)(c-3)\,x^{c-4} & + A_2 c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)\,x^{c-5} & + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{array}$$

Die neben einander stehenden Glieder der vorstehenden Entwickelung, welche sich so weit man will fortsetzen läßt, geben zu der wichtigen Bemerkung Veranlassung, daß die Koeffizienten von $\frac{h}{1}$; $\frac{h^2}{2!}$; $\frac{h^3}{3!}$; $\frac{h^4}{4!}$; .... aus den links unmittelbar davor stehenden Koeffizienten auf einerlei Weise dadurch erzeugt werden, wenn man dem vorhergehenden Koeffizienten, den Exponenten der veränderlichen Größe x als Faktor vorsetzt und hienächst durch x dividirt, oder den Exponenten von x um eine Einheit vermindert. So entsteht aus $A_1 x^b$ der darauf folgende Werth $A_1 b x^{b-1}$, wenn man $A_1 x^b$ den Exponenten b als Faktor vorsetzt und den Exponenten von x^b um 1 vermindert. Eben so entsteht aus $A_2\ c\ (c-1)\ (c-2)\ x^{c-3}$ der darauf folgende Werth

$$A_2\ c\ (c-1)\ (c-2)\ (v-3)\ x^{c-4},$$

wenn man dem erstern Ausdruck den Exponenten $c - 3$ als Faktor vorsetzt und den Exponenten von x^{c-3} um 1 vermindert.

Diese gleichförmige Bildung der nachfolgenden Glieder aus den unmittelbar vorhergehenden, unabhängig von der Größe des Zuwachses h, welchen x erhalten hat, ist wegen der daraus entspringenden Folgen höchst wichtig, weshalb auch für diese Ableitung eines Werthes aus dem andern, eine eigene Bezeichnung eingeführt ist.

Bemerkt man zuerst, daß in der vorstehenden Entwickelung die Summe der über einander stehenden Glieder der ersten Abtheilung $= fx$ ist, so kann man die Summe der Glieder der zweiten Abtheilung durch $f^1 x \cdot \frac{h}{1}$; der dritten durch $f^2 x \cdot \frac{h^2}{2!}$; der vierten durch $f^3 x \cdot \frac{h^3}{3!}$; u. s. w. bezeichnen, und es entsteht alsdann $f^1 x$ aus fx eben so, wie $f^2 x$ aus $f^1 x$; wie $f^3 x$ aus $f^2 x$ u. s. w. Diese auf die beschriebene Weise aus einander entstandenen Funkzionen mit Rücksicht auf ihre Entstehung zu benennen, sagt man alsdann:

$f^1 x$ ist die **erste abgeleitete Funkzion** von fx;
$f^2 x$ ist die erste abgeleitete Funkzion von $f^1 x$, oder die **zweite** von fx;
$f^3 x$ ist die erste abgeleitete Funkzion von $f^2 x$, oder die zweite von $f^1 x$, oder die **dritte** von fx;

Ueberhaupt ist $f^r x$ die erste abgeleitete Funkzion von $f^{r-1} x$, oder die $r$te von fx.

Nennt man $y = fx$ die ursprüngliche oder **Urfunkzion** (**Grundfunkzion**), so sind die daraus entstandenen **abgeleiteten Funkzionen**, welche man der Kürze wegen in der Folge durch das Wort **Ableitungen** (*Derivations*) bezeichnen wird, Koeffizienten der Entwickelung von $f(x + h)$, welche mit den aufeinander folgenden Potenzen von h multiplizirt und durch die, dem Exponenten von h entsprechende Faktorenfolge dividirt werden müssen, wenn man daraus die Glieder der vollständigen Entwickelung bilden will.

Wird hienach als **Regel** fest gesetzt, daß jede Ableitung einer algebraischen ganzen Funkzion von x, in welcher die Exponenten der veränderlichen Größe x auch negativ seyn können, dadurch gebildet werde, daß

jedem Gliede der Funkzion, der Exponent der veränderlichen Größe als Faktor vorgesetzt, der Exponent selbst aber um eine Einheit vermindert werde,

so kann der vorstehende Satz auf folgende Weise dargestellt werden:

Wenn $y = fx$ eine algebraische ganze Funkzion von x bezeichnet, welche aber auch negative Exponenten von x enthalten kann, so ist auch

$$(I)\quad f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{3!} f^3 x + \frac{h^4}{4!} f^4 x + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n x + \ldots$$

Für ein negatives h wird

$$f(x-h) = fx - \frac{h}{1} f^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x - \frac{h^3}{3!} f^3 x + \frac{h^4}{4!} f^4 x + \ldots \pm \frac{h^n}{n!} f^n x \mp \ldots$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Sucht man den Zuwachs w von y, wenn x um h wächst, so wird, wegen $y = fx$,

$$y + w = f(x+h), \text{ also}$$

$$w = f(x+h) - y = f(x+h) - fx, \text{ folglich aus } (I)$$

$$(II)\quad w = \frac{h}{1} f^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{3!} f^3 x + \frac{h^4}{4!} f^4 x + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n x + \ldots$$

Stellt man sich vor, daß x in $f(x+h)$ unverändert bleibt und daß dagegen x den Zuwachs bezeichnet welchen h in fh erhalten soll, so findet man auf gleiche Weise, wenn $y = fh$ gesetzt wird:

$$(III)\quad f(x+h) = fh + \frac{x}{1} f^1 h + \frac{x^2}{2!} f^2 h + \frac{x^3}{3!} f^3 h + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n h + \ldots$$

Hienach ist man im Stande jede algebraïsche ganze Funkzion einer veränderlichen Größe, deren Exponenten auch negativ seyn können, in eine nach den Potenzen des Zuwachses fortschreitende Reihe zu entwickeln, wenn man die auf einander folgenden Ableitungen von fx, welche unabhängig von der Größe des Zuwachses der veränderlichen Größe sind, anzugeben weiß. Diese Entwickelung nach den Potenzen des Zuwachses bleibt aber nicht allein auf algebraische ganze Funkzionen von x eingeschränkt, sondern es läßt sich auch leicht übersehen, daß sie von jeder möglichen Funkzion gelten muß, welche man in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln kann, weil sich alsdann von derselben, nach der vorstehenden Regel, die Ableitungen finden lassen. Da nun alle bis jetzt bekannte Funkzionen in Reihen verwandelt werden können, welche nach den Potenzen der veränderlichen Größe fortschreiten, so ist man auch hienach im Stande die Ableitungen dieser Funkzionen, und daher auch die Entwickelung nach (I) und (II) zu bestimmen.

Der vorstehende allgemeine Satz (I) zur Entwickelung einer jeden Funkzion nach den Potenzen ihres Zuwachses, führt den Namen der **taylorschen Reihe** oder des **taylorschen Satzes**, von ihrem Erfinder Brook **Taylor**, welcher diese Reihe zuerst in seiner Schrift: *Methodus incrementorum directa et inversa, London,* 1715. gegeben hat.

In der Folge werden die wichtigsten Anwendungen dieser Reihe vorkommen, da sie in der höhern Analysis eben solchen Einfluß hat, als der pythagorische Lehrsatz in der Geometrie; auch werden die Fälle, in welchen diese Reihe auf unbestimmte Ausdrücke führt, noch besonders entwickelt (§. 205.).

§. 177.

Die allgemeine Anwendung der taylorschen Reihe auf die Entwickelung der Funkzionen hängt davon ab, daß man die Glieder derselben, oder welches einerlei ist, daß man von jeder möglichen Funkzion einer veränderlichen Größe, die entsprechenden Ableitungen anzugeben im Stande ist. Es sollen daher hier nach einander für die am meisten vorkommenden Funkzionen, die entsprechenden Ableitungen entwickelt werden.

Nach der Regel im vorigen §. ist es leicht, von jeder algebraischen ganzen Funkzion die auf einander folgenden Ableitungen auch in den Fällen zu finden, wenn die Exponenten der veränderlichen Größe negativ sind.

Wäre z. B. $fx = ax^\alpha - bx^\beta$ gegeben, wo α, β auch negativ seyn können, so findet man

$$f^1 x = \alpha a x^{\alpha-1} - \beta b x^{\beta-1}$$
$$f^2 x = \alpha(\alpha-1) a x^{\alpha-2} - \beta(\beta-1) b x^{\beta-2}$$
$$f^3 x = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) a x^{\alpha-3} - \beta(\beta-1)(\beta-2) b x^{\beta-3}$$

Die Ableitungen von fx zu bestimmen setzt voraus, daß der entsprechende Werth von fx, die veränderliche Größe x enthalte, weil nur eigentlich bei einer solchen veränderlichen Größe eine Ableitung statt finden kann, weshalb die Ableitung einer beständigen Größe $= 0$ ist.

Hievon kann man sich so überzeugen. Es sey $fx = A$ eine beständige Größe. Nun ist $A = Ax^0$; wegen $x^0 = 1$, daher erhält man nach der Regel §. 176. aus $fx = Ax^0$, $f^1 x = A \cdot 0 x^{-1} = 0 \cdot \frac{A}{x} = 0$, oder für

$$(I)\ fx = A \text{ wird } f^1 x = 0,$$

d. h. jede Ableitung von einer beständigen Größe ist $= 0$.

Wäre daher z. B.

$$\begin{aligned} f\ x &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \text{ gegeben, so wird} \\ f^1 x &= b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \\ f^2 x &= 2c + 2.3dx + 3.4ex^2 \\ f^3 x &= 2.3d + 2.3.4ex \\ f^4 x &= 2.3.4e \\ f^5 x &= 0. \end{aligned}$$

Auch sieht man hieraus leicht, daß wenn in x^r der Exponent r eine positive ganze Zahl ist, die $r + 1$te Ableitung von x^r verschwinden wird. Dies gilt aber nicht, wenn r ein Bruch oder eine negative Zahl ist.

Die zweite, dritte, vierte, ... Ableitung einer Funkzion heißt eine **höhere** Ableitung und wenn man die $r$te Ableitung einer Funkzion für jede mögliche ganze Zahl r anzugeben im Stande ist, eine **allgemeine Ableitung** der gegebenen Funkzion.

§. 178.

Die abgeleiteten Funkzionen können auch noch dadurch bezeichnet werden, daß man die erste Ableitung von $y = fx$ durch y'; die zweite durch y''; die dritte durch y'''; u. s. w. andeutet. Diese Bezeichnung ist aber nicht für alle Fälle zureichend, weshalb es nöthig seyn wird ein besonderes Zeichen einzuführen um anzudeuten, daß von irgend einer Funkzion eine Ableitung (*Derivation*) genommen werden soll. Hiezu kann ein kleines (cursiv) ∂ dienen, welches ohne Ordnungsexponent die erste Ableitung; mit einer kleinen 2 die zweite; u. s. w. bezeichnet.

Hienach sind folgende Ausdrücke einerlei:

$$\begin{aligned} f\ x &= y \\ f^1 x &= y' = \partial y \\ f^2 x &= y'' = \partial^2 y \\ f^3 x &= y''' = \partial^3 y \end{aligned}$$

und überhaupt $\quad f^r x = \partial^r y.$

Auch folgt hieraus, daß

$$\partial f x = f^1 x;\quad \partial f^1 x = f^2 x;\quad \partial f^2 x = f^3 x;\ \ldots\ldots$$
$$\partial^2 f x = f^2 x;\quad \partial^2 f^1 x = f^3 x;\quad \partial^2 f^2 x = f^4 x;\ \ldots\ldots$$

Die oben stehenden Werthe in (I) §. 176. gesetzt, geben, wegen $f(x + h) = y + w$ für die taylorsche Reihe folgenden Ausdruck:

$$(I)\quad y + w = y + \frac{h}{1}\partial y + \frac{h^2}{2!}\partial^2 y + \frac{h^3}{3!}\partial^3 y + \ldots + \frac{h^n}{n!}\partial^n y + \ldots\ldots$$

$$(II)\quad w = \frac{h}{1}\partial y + \frac{h^2}{2!}\partial^2 y + \frac{h^3}{3!}\partial^3 y + \frac{h^4}{4!}\partial^4 y + \ldots + \frac{h^n}{n!}\partial^n y + \ldots\ldots$$

Die

Die Ableitungen der Funkzionen verdienen noch eine besondere Rücksicht. Den bisherigen Voraussetzungen gemäß war y eine entwickelte Funkzion von x, welche man durch fx bezeichnete. Erhielt x den unveränderlichen Zuwachs h; so bezeichnete w den entsprechenden Zuwachs von y, also $y + w = f(x + h)$. Der Zuwachs h von x ist gegeben und unveränderlich; aber der Zuwachs w von y ist veränderlich, weil er (§. 176. *II.*) eine Funkzion der veränderlichen Größe x ist. Hienach ist ein wesentlicher wohl zu berücksichtigender Unterschied zwischen den beiden veränderlichen Größen x und y. Denn ob sie gleich wechselseitig Funkzionen von einander sind, so ist doch der Zuwachs der einen eine beständige, der der zweiten eine veränderliche Größe. Offenbar ist es willkührlich, welche dieser beiden veränderlichen Größen einen beständigen Zuwachs erhalten soll, denn man hätte eben sowohl in $x = Fy$ den Zuwachs von $y = h$ setzen können. Allein, wenn einmal unter mehrern von einander abhängigen veränderlichen Größen eine angenommen ist, deren Zuwachs unveränderlich seyn soll, so muß diese Voraussetzung im Verfolg der Rechnung wohl beachtet werden, daher man auch diejenige veränderliche Größe, deren Zuwachs als unveränderlich angenommen wird, die **absolut** oder **unabhängig veränderliche Größe**, auch **Urveränderliche** (*Variable indépendante ou principale*) nennt, um sie von den übrigen **abhängig** veränderlichen Größen, deren Zuwachs veränderlich ist, zu unterscheiden. Bei den bisherigen Untersuchungen war x die unabhängig veränderliche Größe.

Wenn hier und in der Folge nicht das Gegentheil bemerkt wird, soll unter x jedesmal die unabhängig Veränderliche verstanden werden.

Die Regeln, nach welcher die Ableitungen einer jeden Funkzion gefunden werden können, heißt die **Ableitungsrechnung**. Sie wird auch **Differentialrechnung** genannt, weil man aus den Differenzen einer Funkzion die Ableitungen derselben finden kann (§. 570.), welche alsdann Differenziale heißen und nichts anders als Koeffizienten von den aufeinander folgenden Gliedern der taylorschen Reihe sind.

§. 179.

Weil durch die auf einander folgenden Ableitungen die beständigen Faktoren vor den veränderlichen Größen nicht geändert werden, so kann man auch diese Faktoren außerhalb des Ableitungszeichens setzen, oder es wird, wenn A eine beständige Größe ist,

$$(I)\quad \partial(Ay) = A\partial y;\quad \partial\left(\frac{y}{A}\right) = \frac{1}{A}\partial y.$$

Die Ableitung von der absolut veränderlichen Größe x zu finden, setze man

$$f\,x = x, \text{ so wird nach der Regel §. 176.}$$
$$f^1 x = 1 . x^0 = 1, \text{ oder auch}$$
$$(II)\quad \partial x = 1, \text{ also §. 177.}$$
$$\partial^2 x = 0;\ \partial^3 x = 0;\ \partial^4 x = 0;\ \ldots\ldots$$

Hieraus folgt, daß die erste Ableitung der absolut oder unabhängig veränderlichen Größe der Einheit gleich ist, wogegen die Ableitungen der abhängig veränderlichen Größe Funkzionen der absolut veränderlichen seyn können.

Es läßt sich nun von dem Ausdruck $a x^n$ jede Ableitung ganz allgemein angeben. Denn man setze

$$fx = a x^n, \text{ so wird } f^1 x \text{ oder}$$
$$a \partial x^n = n a x^{n-1}$$
$$a \partial^2 x^n = n(n-1) a x^{n-2}$$
$$a \partial^3 x^n = n(n-1)(n-2) a x^{n-3}$$
$$a \partial^4 x^n = n(n-1)(n-2)(n-3) a x^{n-4}$$

und überhaupt die allgemeine Ableitung

$$(III) \quad a \partial^r x^n = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1) a x^{n-r},$$

oder auch, nach §. 6. und 20.,

$$a \partial^r x^n = r!\, n_r x^{n-r}$$

wo n jede mögliche Zahl seyn kann.

Für $r = n$ wird

$$a \partial^n x^n = n(n-1)(n-2) \ldots . 3.2.1.a x^0, \text{ oder}$$
$$a \partial^n x^n = n!\, a.$$

Wird n negativ also $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, so findet man aus (III)

$$(IV) \quad a \partial^r \frac{1}{x^n} = \pm n(n+1)(n+2) \ldots . (n+r-1) \frac{a}{x^{n+r}}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Für $n = 1$ wird

$$(V) \quad a \partial^r \frac{1}{x} = \pm \frac{r!\, a}{x^{r+1}}.$$

§. 180.

Sucht man die Ableitung von der Funkzion $y = a^x$, wo der Exponent von a^x veränderlich ist, so kann man die erste Ableitung durch $\partial y = \partial (a^x)$ oder kürzer durch $\partial y = \partial . a^x$ bezeichnen. Nun ist, wenn man $lg\, nat\, a = \alpha$ setzt, nach §. 162. (XVI)

$$a^x = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha^2}{2!} x^2 + \frac{\alpha^3}{3!} x^3 + \frac{\alpha^4}{4!} x^4 + \ldots . \text{ daher}$$

$$\partial . a^x = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1} x + \frac{\alpha^3}{2!} x^2 + \frac{\alpha^4}{3!} x^3 + \ldots\ldots$$

$$= \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha^2}{2!} x^2 + \frac{\alpha^3}{3!} x^3 + \ldots \right) = \alpha . a^x \text{ oder}$$

$\partial . a^x = a^x . lg\, a.$ Hieraus ferner

$\partial^2 . a^x = \partial a^x . lg\, a = a^x . lg^2 a$

$\partial^3 . a^x = a^x\, lg^3 a$ und überhaupt, wenn hier durchgängig nur natürliche Logarithmen verstanden werden, findet man die allgemeine Ableitung

$$(I) \quad \partial^r . a^x = a^x . lg^r a.$$

Bedeutet e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so wird $lg\, e = 1$, daher

$$(II) \quad \partial^r . e^x = e^x.$$

oder alle Ableitungen sind in diesem Falle der Urfunkzion gleich.

Nach §. 164 (*IV*) ist

$$lg\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \text{ daher}$$

$$\partial\, lg\,(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{1}{1+x}, \text{ also}$$

$$\partial\, lg\,(1+x) = \frac{1}{1+x}, \text{ oder, } x-1 \text{ statt } x \text{ gesetzt,}$$

$$\partial\, lg\, x = \frac{1}{x} = x^{-1} \text{ und hieraus ferner}$$

$$\partial^2\, lg\, x = -1\,.\,x^{-2}$$

$$\partial^3\, lg\, x = +1\,.\,2\,x^{-3}$$

$$\partial^4\, lg\, x = -1\,.\,2\,.\,3\,.\,x^{-4}, \text{ und überhaupt}$$

$$(III) \quad \partial^r\, lg\, x = \mp 1\,.\,2\,.\,3 \ldots (r-1)\,x^{-r} = \mp \frac{(r-1)!}{x^r}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Eben so leicht lassen sich die Ableitungen der trigonometrischen Größen finden. Nach §. 168. ist

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ und}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ also}$$

$$\partial \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x$$

$$\partial^2 \sin x = -\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots = -\sin x$$

$$\partial^3 \sin x = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = -\cos x$$

u. s. w. Eben so findet man

$$\partial \cos x = -\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots = -\sin x$$

$$\partial^2 \cos x = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots = -\cos x$$

u. s. w. Wird diese Rechnung weit genug fortgesetzt, so entstehen folgende Werthe

$\partial \sin x = +\cos x$	$\partial \cos x = -\sin x$
$\partial^2 \sin x = -\sin x$	$\partial^2 \cos x = -\cos x$
$\partial^3 \sin x = -\cos x$	$\partial^3 \cos x = +\sin x$
$\partial^4 \sin x = +\sin x$	$\partial^4 \cos x = +\cos x$
$\partial^5 \sin x = +\cos x$	$\partial^5 \cos x = -\sin x$
$\partial^6 \sin x = -\sin x$	$\partial^6 \cos x = -\cos x$
$\partial^7 \sin x = -\cos x$	$\partial^7 \cos x = +\sin x$
. . . .	. . . .

Unterscheidet man die geraden von den ungeraden Ableitungen, so erhält man allgemein, wenn r jede positive ganze Zahl bedeutet:

$$(IV) \quad \partial^{2r} \sin x = \pm \sin x \text{ und } \partial^{2r+1} \sin x = \pm \cos x$$

$$(V) \quad \partial^{2r} \cos x = \pm \cos x \text{ und } \partial^{2r+1} \cos x = \mp \sin x$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades r gelten.

Nach §. 174. ist ferner

$$Arc\sin x = x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^9}{9} + \ldots$$

daher wird

$$\partial\, Arc\sin x = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \ldots$$

Diese Reihe ist aber nach §. 31. $= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, daher wird

$$(VI) \quad \partial\, Arc\sin x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Eben so findet man nach §. 174.

$$Arc\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - x - \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} - \ldots \text{ also}$$

$$\partial\, Arc\cos x = -1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 - \ldots$$

folglich §. 31.

$$(VII) \quad \partial\, Arc\cos x = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Weil sich nach den vorstehenden Sätzen auch die Ableitungen transcendenter Größen finden lassen, so ist der taylorsche Satz auch auf Funkzionen, welche dergleichen Größen enthalten, anwendbar.

§. 181.

Aufgabe. Von der Reihe

$$y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

die $r$te abgeleitete Funkzion zu finden.

Auflösung. Es wird

$$\partial y = 1A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \ldots + (n+1)A_{n+1}x^n + \ldots$$
$$\partial^2 y = 1.2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + 4.5A_5 x^3 + \ldots + (n+1)(n+2)A_{n+2}x^n + \ldots$$
$$\partial^3 y = 1.2.3A_3 + 2.3.4A_4 x + 3.4.5A_5 x^2 + \ldots + (n+1)(n+2)(n+3)A_{n+3}x^n + \ldots$$

u. s. w., oder auch

$$\partial y = 1A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \ldots + (n+1)A_{n+1}x^n + \ldots$$
$$\partial^2 y = 2!\,2_2 A_2 + 2!\,3_2 A_3 x + 2!\,4_2 A_4 x^2 + \ldots + 2!\,(n+2)_2 A_{n+2}x^n + \ldots$$
$$\partial^3 y = 3!\,3_3 A_3 + 3!\,4_3 A_4 x + 3!\,5_3 A_5 x^2 + \ldots + 3!\,(n+3)_3 A_{n+3}x^n + \ldots$$
$$\partial^4 y = 4!\,4_4 A_4 + 4!\,5_4 A_5 x + 4!\,6_4 A_6 x^2 + \ldots + 4!\,(n+4)_4 A_{n+4}x^n + \ldots$$

daher ganz allgemein

$$\partial^r y = r!\,[r_r A_r + (r+1)_r A_{r+1}x + (r+2)_r A_{r+2}x^2 + \ldots + (n+r)_r A_{n+r}x^n + \ldots]$$
$$= r!\,[A_r + (r+1)_1 A_{r+1}x + (r+2)_2 A_{r+2}x^2 + \ldots + (n+r)_n A_{n+r}x^n + \ldots]$$

§. 182.

Sind fx und Fx verschiedene Funkzionen von der unabhängig veränderlichen Größe x, und man sucht die Ableitung von dem Produkt $fx \,.\, Fx$ oder $\partial(fx \,.\, Fx)$, so wird nach §. 176.

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{3!} f^3 x + \ldots\ldots$$

$$F(x+h) = Fx + \frac{h}{1} F^1 x + \frac{h^2}{2!} F^2 x + \frac{h^3}{3!} F^3 x + \ldots\ldots$$

Beide Reihen mit einander multiplizirt und die Summe derjenigen Glieder, welche den Faktor h^2 und die höhern Potenzen von h enthalten, unter dem Ausdruck $h^2 R$ begriffen, wird

$$f(x+h)\, F(x+h) = fx \,.\, Fx + \frac{h}{1} (fx \,.\, F^1 x + Fx \,.\, f^1 x) + h^2\; R \quad [I].$$

Man setze $\varphi x = fx \,.\, Fx$, so wird

$\varphi(x+h) = f(x+h) \,.\, F(x+h)$ und

$\varphi(x+h) = \varphi x + \frac{h}{1} \varphi^1 x + \frac{h^2}{2!} \varphi^2 x + \frac{h^3}{3!} \varphi^3 x + \ldots$ und nach $[I]$

$\varphi(x+h) = fx \,.\, Fx + \frac{h}{1} (fx \,.\, F' x + Fx \,.\, f' x) + h^2\; R.$

Beide Reihen einander gleich gesetzt, $\varphi x = fx \,.\, Fx$ weggelassen und durch h dividirt, giebt

$$\varphi^1 x + \frac{h}{2!} \varphi^2 x + \frac{h^2}{3!} \varphi^3 x + \ldots\ldots = fx \,.\, F' x + Fx \,.\, f' x + hR.$$

Weil h jeden Werth erhalten kann, so setze man $h = 0$; dann wird

$\varphi^1 x = fx \,.\, F' x + Fx \,.\, f' x$, oder, wegen

$\varphi x = fx \,.\, Fx$, also $\varphi' x = \partial\, (fx \,.\, Fx)$,

$$(I)\quad \partial\, (fx \,.\, Fx) = fx \,.\, F' x + Fx \,.\, f' x,$$

oder auch, wenn man $fx = p$ und $Fx = q$ setzt, wo p und q verschiedene Funkzionen von x sind,

$$(II)\quad \partial\, (p \,.\, q) = p \,.\, q' + q \,.\, p', \text{ oder auch}$$

$$\partial\, (p \,.\, q) = p\partial q + q\partial p.$$

Die Glieder der vorstehenden Gleichung dividire man durch pq, so wird

$$\frac{\partial (p \,.\, q)}{p \,.\, q} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q}.$$

Man setze $q = t \,.\, u$ wo t, u Funkzionen von x sind, so verwandelt sich vorstehende Gleichung in

$$\frac{\partial (p \,.\, t \,.\, u)}{p \,.\, t \,.\, u} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial (t \,.\, u)}{t \,.\, u}, \text{ oder weil nach } (II)$$

$\partial (t u) = t u' + u t'$, so wird

$$\frac{\partial (p \,.\, t \,.\, u)}{p \,.\, t \,.\, u} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial t}{t} + \frac{\partial u}{u}, \text{ oder auch}$$

$$(III)\quad \partial (p \,.\, t \,.\, u) = tu\partial p + pu\partial t + pt\partial u.$$

Aehnliche Folgen erhält man für mehrere Faktoren, daher findet man die Ableitung eines solchen Produkts, wenn die Summe derjenigen Ableitungen genommen wird, welche entsteht, wenn man nach einander die Ableitungen des gegebenen Produkts so nimmt, als wenn nur jeder einzelne Faktor veränderlich wäre.

1. **Beispiel.** Von dem Produkt $y = (a + bx^2 - x^3)(c - ex^4 - x^5)$ die erste Ableitung zu finden, setze man

$$p = a + bx^2 - x^3;\ q = c - ex^4 - x^5, \text{ so wird}$$
$$\partial p = 2bx - 3x^2 \text{ und } \partial q = -4ex^3 - 5x^4, \text{ daher}$$
$$\partial y = (a + bx^2 - x^3)(-4ex^3 - 5x^4) + (c - ex^4 - x^5)(2bx - 3x^2).$$

2. **Beispiel.** Die erste Ableitung des Produkts
$y = (x - a)(b + cx - x^2)(e + gx^3 + x^4)$ zu finden, setze man
$p = x - a$, $t = b + cx - x^2$ und $u = e + gx^3 + x^4$, so wird
$$\partial p = 1;\ \partial t = c - 2x;\ \partial u = 3gx^2 + 4x^3, \text{ daher nach } (III)$$
$$\partial y = (x-a)(b+cx-x^2)(3gx^2+4x^3) + (x-a)(e+gx^3+x^4)(c-2x) + (b+cx-x^2)(e+gx^3+x^4).$$

3. **Beispiel.** Vom Produkt $y = (ax^r + \sin x)(b^x - c)(d + lg\, x)$ die erste Ableitung zu finden, setze man
$$p = ax^r + \sin x;\ t = b^x - c \text{ und } u = d + lg\, x, \text{ so wird}$$
$$\partial p = arx^{r-1} + \cos x;\ \partial t = b^x\, lg\, b \text{ und } \partial u = \frac{1}{x}, \text{ daher}$$
$$\partial y = (b^x - c)(d + lg\, x)(arx^{r-1} + \cos x) + (ax^r + \sin x)(d + lg\, x)b^x\, lg\, b + \frac{(ax^r + \sin x)(b^x - c)}{x}.$$

Durch die vorstehenden Beispiele überzeugt man sich leicht, welche Erleichterungen für die Rechnung aus den aufgestellten Sätzen entspringen, weil dadurch weitläufige Multiplikationen erspart werden.

§. 183.

Zusatz. Weil die auf einander folgenden Ableitungen von dem Produkt $y = p \cdot q$ oft erfordert werden, so bemerke man, daß ∂p, $\partial^2 p$, $\partial^3 p$, ... als Funkzionen von x ebenfalls als solche bei den fortgesetzten Ableitungen behandelt werden müssen. Nun war
$$\partial y = p\partial q + q\partial p, \text{ daher wird}$$
$$\partial^2 y = p\partial^2 q + \partial p\partial q + q\partial^2 p + \partial q\partial p, \text{ oder}$$
$$\partial^2 y = p\partial^2 q + 2\partial p\partial q + \partial^2 p \cdot q. \text{ Hieraus}$$
$$\partial^3 y = p\partial^3 q + 3\partial p \cdot \partial^2 q + 3\partial^2 p \cdot \partial q + \partial^3 p \cdot q$$
$$\partial^4 y = p\partial^4 q + 4\partial p \cdot \partial^3 q + 6\partial^2 p \cdot \partial^2 q + 4\partial^3 p \cdot \partial q + \partial^4 p \cdot q$$
$$\partial^5 y = p\partial^5 q + 5_1 \partial p\partial^4 q + 5_2 \partial^2 p\partial^3 q + 5_3 \partial^3 p\partial^2 q + 5_4 \partial^4 p\partial q + \partial^5 p \cdot q$$
u. s. w. wo die Uebereinstimmung der Zahlenkoeffizienten mit den Binomialkoeffizienten leicht zu bemerken ist.

Gilt nun der vorstehende Satz für
$$\partial^r y = p\partial^r q + r_1 \partial p \cdot \partial^{r-1} q + r_2 \partial^2 p\partial^{r-2} q + r_3 \partial^3 p\partial^{r-3} q + \ldots + \partial^r p \cdot q,$$
so muß er auch für $\partial^{r+1} y$ gelten. Denn man nehme die erste Ableitung von dem vorstehenden Ausdruck, so wird
$$\partial^{r+1} y = p\partial^{r+1} q + 1\partial p\partial^r q + r_1 \partial^2 p\partial^{r-1} q + r_2 \partial^3 p\partial^{r-2} q + \ldots + r_{r-1} \partial^r p\partial q + \partial^{r+1} p \cdot q$$
$$+ r_1 \partial p\partial^r q + r_2 \partial^2 p\partial^{r-1} q + r_3 \partial^3 p\partial^{r-2} q + \ldots + 1 \cdot \partial^r p\partial q,$$
daher wird, wegen §. 38. (LXI),
$$\partial^{r+1} y = p\partial^{r+1} q + (r+1)\partial p\partial^r q + (r+1)_2 \partial^2 p\partial^{r-1} q + \ldots + \partial^{r+1} p \cdot q$$

Nun gilt dieser Satz für $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, daher muß er auch für $r + 1 = 4, 5, 6, 7 \ldots$ also für jede noch so große ganze Zahl r gelten.

Hienach erhält man die allgemeine Ableitung, oder

$$\partial^r (p \cdot q) = p \partial^r q + r_1 \partial p \partial^{r-1} q + r_2 \partial^2 p \partial^{r-2} q + r_3 \partial^3 p \partial^{r-3} q + \ldots + \partial^r p \cdot q$$

§. 184.

Unter der Voraussetzung daß p, q, t, u, v, w Funkzionen von x sind, die Ableitungen von der gebrochenen Funkzion $y = \frac{p \cdot q \cdot t}{u \cdot v \cdot w}$ zu finden, erhält man hieraus $yuvw = pqt$, daher nach §. 182.

$$\frac{\partial y}{y} + \frac{\partial u}{u} + \frac{\partial v}{v} + \frac{\partial w}{w} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} + \frac{\partial t}{t} \text{ folglich}$$

$$(I) \quad \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} + \frac{\partial t}{t} - \frac{\partial u}{u} - \frac{\partial v}{v} - \frac{\partial w}{w}.$$

Eben so gilt dieser Satz für jede noch so große Anzahl von Faktoren.

Für $y = \frac{1}{u}$ wird $\frac{\partial y}{y} = - \frac{\partial u}{u}$, oder auch

$$(II) \quad \partial \left(\frac{1}{u}\right) = - \frac{\partial u}{u^2}.$$

Für $y = \frac{p}{u}$ wird $\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} - \frac{\partial u}{u}$, oder auch

$$(III) \quad \partial \left(\frac{p}{u}\right) = \frac{u \partial p - p \partial u}{u^2}.$$

Eben so findet man

$$(IV) \quad \partial \left(\frac{pq}{u}\right) = \frac{pu \partial q + qu \partial p - pq \partial u}{u^2}$$

u. s. w.

1. **Beispiel.** Die Ableitung von $y = \frac{a + bx^2}{c + ex^2 + x^4}$ zu finden, setze man $p = a + bx^2$ und $u = c + ex^2 + x^4$, so wird $\partial p = 2bx$ und $\partial u = 3ex^2 + 4x^3$, daher ∂y oder

$$\partial \left(\frac{p}{u}\right) = \frac{2(c + ex^2 + x^4) bx - (a + bx^2)(3ex^2 + 4x^3)}{(c + ex^2 + x^4)^2}.$$

2. **Beispiel.** Die Ableitung von $y = \frac{(a + x)\sqrt{(b + x)}}{x^2 - c}$ zu finden, setze man $p = a + x$; $q = (b + x)^{\frac{1}{2}}$ und $u = x^2 - c$, so wird $\partial p = 1$; $\partial q = \frac{1}{2\sqrt{(b + x)}}$ und $u = 2x$, daher

$$\partial \left(\frac{pq}{u}\right) = \frac{\frac{(a+x)(x^2-c)}{2\sqrt{(b+x)}} + (x^2 - c)\sqrt{(b + x)} - 2x(a + x)\sqrt{(b + x)}}{(x^2 - c)^2}$$

$$= \frac{(a + x)(x^2 - c) + 2(x^2 - c)(b + x) - 2x(a + x)(b + x)}{2(x^2 - c)^2 \sqrt{(b + x)}}.$$

§. 185.

Es lassen sich nun auch, außer den bereits §. 180. entwickelten trigonometrischen Ausdrücken, leicht die Ableitungen der übrigen finden.

Denn es ist $tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$, also §. 184. (*III*)

$$\partial\, tg\ x = \frac{\cos x \,.\, \partial \sin x - \sin x \,.\, \partial \cos x}{\cos x^2}, \text{ oder, wegen §. 180.,}$$

$$\partial\, tg\ x = \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2}; \text{ oder es wird, weil } \cos x^2 + \sin x^2 = 1,$$

$$(I)\quad \partial\, tg\ x = \frac{1}{\cos x^2} = \sec x^2.$$

Weil $\cot x = \frac{1}{tg\ x}$, so wird §. 184. (*II*)

$$\partial \cot x = d\left(\frac{1}{tg\ x}\right) = -\frac{\partial\, tg\ x}{tg\ x^2} = -\frac{1}{\cos x^2\, tg\ x^2}.$$

Aber $tg\ x^2 = \frac{\sin x^2}{\cos x^2}$, daher

$$(II)\quad \partial \cot x = -\frac{1}{\sin x^2} = -\operatorname{cosec} x^2 = -(1 + \cot x^2).$$

Wegen $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ wird $\partial \sec x = -\frac{\partial \cos x}{\cos x^2} = \frac{\sin x}{\cos x^2}$, oder

$$(III)\quad \partial \sec x = \frac{tg\ x}{\cos x} = tg\ x\ \sec x.$$

Aus $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ folgt $\partial \operatorname{cosec} x = -\frac{\partial \sin x}{\sin x^2} = -\frac{\cos x}{\sin x^2}$, oder

$$(IV)\quad \partial \operatorname{cosec} x = -\frac{\cot x}{\sin x} = -\cot x \operatorname{cosec} x.$$

Es ist $\operatorname{sinvers} x = 1 - \cos x$, also $\partial \operatorname{sinvers} x = -\partial \cos x$, oder

$$(V)\quad \partial \operatorname{sinvers} x = \sin x$$

und weil $\operatorname{cosinvers} x = 1 - \sin x$, so wird $\partial \operatorname{cosinvers} x = -\partial \sin x$, oder

$$(VI)\quad \partial \operatorname{cosinvers} x = -\cos x.$$

§. 186.

Es hat nun keine Schwierigkeiten von einer jeden Funkzion, welche außer der Urveränderlichen x, keine andere veränderliche Größen enthält, die Ableitungen zu finden. Wenn hingegen y eine Funkzion der abhängig veränderlichen Größe p, und p eine Funkzion der Urveränderlichen x, also $y = Fp$ und $p = fx$ wäre, so ist nur $\partial x = 1$ und es entsteht die Frage, wie ∂y als Funkzion von p gefunden werden kann, da p nicht die Urveränderliche ist.

Man bemerke zuvörderst daß diejenige Funkzionen, welche keine andere Veränderliche als die Urveränderliche enthalten, **einfache** Funkzionen, und daß diejenigen, welche solche veränderliche Größen enthalten, die wieder Funkzionen der Urveränderlichen sind, **zusammengesetzte** Funkzionen genannt werden. So ist $p = fx$ eine einfache, und $y = Fp$ eine zusammengesetzte Funkzion.

Der Unterschied zwischen den Ableitungen einer einfachen und zusammengesetzten Funkzion läßt sich übersehen, wenn man §. 182. (*III*)

$p = t = u$ setzt, so wird
$\partial . p^3 = 3p^2 \partial p$, wogegen
$\partial . x^3 = 3x^2$ ist.

Setzt man $y = Fp = p^3$, so wird $\partial . Fp = 3p^2 . \partial p$ und wenn man ∂Fp und $F^1 p$ dadurch von einander unterscheidet, daß die Bezeichnung
∂Fp ganz allgemein andeute, daß die erste Ableitung von Fp genommen werde, wogegen
$F^1 p$ bedeute, daß man die erste Ableitung von Fp so nehme, als wenn p die Unveränderliche wäre,
so erhält man auch

$$\partial Fp = 3p^2 . \partial p = F^1 p . \partial p.$$

Mit Beibehaltung dieses Unterschiedes zwischen ∂Fp und $F^1 p$, sey nun ganz allgemein $y = Fp$. Wächst dann p um v, so sey w der Zuwachs von y, daher wird $y + w = F(p + v)$ und man erhält eben so wie §. 176. (*II*)

$$w = vF^1 p + \frac{v^2}{2!} F^2 p + \frac{v^3}{3!} F^3 p + \frac{v^4}{4!} F^4 p + \ldots\ldots [I]$$

wobei wohl zu bemerken ist, daß die Ableitungen $F^1 p$; $F^2 p$; ..... eben so genommen werden als wenn p die Unveränderliche wäre.

Für $p = fx$ wachse p um v, wenn x um h wächst, so wird nach §. 176. (*II*)

$v = hf^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{3!} f^3 x + \ldots.$ oder wenn man alle Glieder, welche den Faktor h^2 und die höheren Potenzen von h enthalten, mit $h^2 R$ bezeichnet, so wird

$$v = hf^1 x + h^2 R = h\,(f^1 x + hR), \text{ also}$$
$$v^2 = h^2\,(f^1 x + hR)^2$$
$$v^3 = h^3\,(f^1 x + hR)^3; \text{ u. s. w.}$$

Diese Werthe in [*I*] gesetzt und durch h dividirt, giebt

$$\frac{w}{h} = (f^1 x + hR)\; F^1 p + \frac{h}{2!} (f^1 x + hR)^2 F^2 p + \ldots.$$

Weil p eine Funkzion von x und y von p ist, so ist auch y eine Funkzion von x, und wenn gleich die Gestalt dieser Funkzion unbekannt ist, so kann man dennoch setzen

$$y = \varphi x.$$

Wächst x um h, so wächst p um v und y um w, daher wird §. 176. (*II*)

$$\frac{w}{h} = \varphi^1 x + \frac{h}{2!} \varphi^2 x + \frac{h^2}{3!} \varphi^3 x + \ldots\ldots \text{ folglich wird}$$

$$\varphi^1 x + \frac{h}{2!} \varphi^2 x + \ldots = (f^1 x + hR)\; F^1 p + \frac{h}{2!} (f^1 x + hR)^2 F^2 p + \ldots\ldots$$

und weil diese Ausdrücke für jeden Werth von h, also auch für $h = 0$ gelten, so erhält man für diesen Fall

$$\varphi^1 x = f^1 x . F^1 p.$$

Nun war $y = \varphi x = Fp$, daher wird $\varphi^1 x = \partial Fp$, und aus $p = fx$ wird $\partial p = f^1 x$. Diese Werthe in vorstehenden Ausdruck gesetzt, giebt

$$(I).\; \partial Fp = F^1 p . \partial p.$$

Hieraus entsteht die Regel:

wenn p eine Funkzion der Urveränderlichen x ist, und man sucht die Ableitung von Fp, so nehme man diese Ableitung eben so als wenn p die Urveränderliche wäre; nur daß man derselben noch die Ableitung von p, also ∂p, als Faktor zusetzt.

Weil $p = fx$ also $Fp = Ffx$ ist, so erhält man auch

$$(II)\ \partial Fp = \partial Ffx = F^1 fx . f^1 x.$$

Wäre $Fp = \varphi x$ gegeben, so erhält man wegen $\partial x = 1$

$$(III)\ \partial Fp = F^1 p . \partial p = \varphi^1 x, \text{ oder auch}$$

$$\partial p = \frac{\varphi^1 x}{F^1 p}.$$

1. **Beispiel.** Die Ableitung von $y = ap^r + lg\, p$ zu finden, wenn p eine Funkzion von der Urveränderlichen x ist. Man setze

$$ap^r + lg\, p = Fp, \text{ so wird nach } (I)$$

$$F^1 p = arp^{r-1} + \frac{1}{p} = \frac{arp^r + 1}{p}, \text{ daher } \partial(Fp) \text{ oder}$$

$$\partial(ap^r + lg\, p) = \frac{arp^r + 1}{p} \partial p.$$

2. **Beispiel.** Die Ableitung von $y = sin\,(ax - bx^2)$ zu finden, setze man $p = ax - bx^2$ und $Fp = sin\, p$, so wird (§. 180.) $F^1 p = cos\, p = cos\,(ax - bx^2)$. Aber $\partial p = a - 2bx$ daher $\partial Fp = \partial p . F^1 p$ oder $\partial\, sin\,(ax - bx^2) = (a - 2bx)\, cos\,(ax - bx^2)$.

3. **Beispiel.** Aus der Gleichung $ap^2 - bp^5 + lg^3 p = \frac{b + cx^3}{e - x}$ die erste Ableitung von p zu finden, setze man

$$Fp = ap^2 - bp^5 + lg^3 p \text{ und } fx = \frac{b + cx^3}{e - x}, \text{ so wird}$$

$$F^1 p = 2ap - 5bp^4 + \frac{3\, lg^2 p}{p}, \text{ und}$$

$$f^1 x = \frac{3cex^2 - 2cx^3 + b}{(e - x)^2}, \text{ daher nach } (III) \text{ wegen } \partial p = \frac{f^1 x}{F^1 p}$$

$$\partial p = \frac{(3cex^2 - 2cx^3 + b)p}{(e - x)^2(2ap^2 - 5bp^5 + 3lg^2 p)}.$$

4. **Beispiel.** Aus der Gleichung $y = lg\,(a^2 + p^2)$ die Ableitung von y zu finden, setze man $a^2 + p^2 = q$, so wird $y = lg\, q$ also $\partial y = \frac{\partial q}{q}$. Es ist aber $\partial q = 2p \partial p$, folglich

$$\partial y = \frac{2p \partial p}{a^2 + p^2}.$$

5. **Beispiel.** Die Ableitung von $y = p^x$ zu finden, wird §. 160.
$lg\, y = x\, lg\, p$ also §. 183.

$$\partial\, lg\, y = x\, \partial\, lg\, p + lg\, p; \text{ aber auch}$$

$$\partial\, lg\, y = \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial . p^x}{p^x} \text{ und } \partial\, lg\, p = \frac{\partial p}{p}, \text{ folglich } \partial . p^x = p^x . \partial\, lg\, y \text{ oder}$$

$$\partial . p^x = p^x \left(lg\, p + \frac{x \partial p}{p}\right).$$

Wird p mit x vertauscht, so findet man

$$\partial \, . \, x^x = x^x \, (1 + lg\, x).$$

6. **Beispiel.** Die auf einander folgenden Ableitungen von $y = x^x$ zu finden, wird $\partial y = (1 + lg\, x)\, x^x$; oder wenn man $1 + lg\, x = q$ setzt, $\partial q = \frac{1}{x}$ daher

$$\partial y = q\, x^x$$

$$\partial^2 y = \left(\frac{1}{x} + q^2\right) x^x$$

$$\partial^3 y = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} q + q^3\right) x^x$$

$$\partial^4 y = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2} q + \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x} q^2 + q^4\right) x^x$$

$$\partial^5 y = \left(-\frac{6}{x^4} - \frac{10}{x^3} q - \frac{10}{x^3} - \frac{10}{x^2} q^2 + \frac{15}{x^2} q + \frac{10}{x} q^3 + q^5\right) x^x$$

u. s. w.

§. 187.

1. **Zusatz.** Nach (I) wird wegen §. 180. $\partial \, . \, a^p = a^p \, . \, lg\, a \, . \, \partial p$, oder, wenn man $p = fx$ setzt,

$$(I) \quad \partial \, . \, a^{fx} = a^{fx} \, . \, lg\, a \, . \, f^1 x.$$

Für $a = e$ wird

$$\partial \, . \, e^{fx} = e^{fx} \, . \, f^1 x.$$

Auf ähnliche Art erhält man nach §. 180. und 185.

$$(II) \quad \partial \, . \, lg\, fx = \frac{f^1 x}{fx}$$

$$(III) \quad \partial \, . \, sin\, fx = f^1 x \, . \, cos\, fx \text{ und } \partial \, . \, Arc\, sin\, fx = \frac{f^1 x}{\sqrt{[1 - (fx)^2]}}$$

$$(IV) \quad \partial \, . \, cos\, fx = -f^1 x \, . \, sin\, fx \text{ und } \partial \, . \, Arc\, cos\, fx = \frac{-f^1 x}{\sqrt{[1 - (fx)^2]}}$$

$$(V) \quad \partial \, . \, tg\, fx = \frac{f^1 x}{(cos\, fx)^2} \text{ und } \partial \, . \, Arc\, tg\, fx = \frac{f^1 x}{1 + (fx)^2}$$

$$(VI) \quad \partial \, . \, cot\, fx = \frac{-f^1 x}{(sin\, fx)^2} \text{ und } \partial \, . \, Arc\, cot\, fx = \frac{-f^1 x}{1 + (fx)^2}$$

$$(VII) \quad \partial \, . \, sec\, fx = f^1 x \, . \, tg\, fx \, . \, sec\, fx \text{ und } \partial \, . \, Arc\, sec\, fx = \frac{f^1 x}{fx \sqrt{[(fx)^2 - 1]}}$$

$$(VIII) \quad \partial \, . \, cosec\, fx = -f^1 x \, . \, cot\, fx \, . \, cosec\, fx \text{ und } \partial \, . \, Arc\, cosec\, fx = \frac{-f^1 x}{fx \sqrt{[(fx)^2 - 1]}}$$

$$(IX) \quad \partial \, . \, sinvers\, fx = f^1 x \, . \, sin\, fx \text{ und } \partial \, . \, Arc\, sinvers\, fx = \frac{f^1 x}{\sqrt{[2fx - (fx)^2]}}$$

$$(X) \quad \partial \, . \, cosinvers\, fx = -f^1 x \, . \, cos\, fx \text{ und } \partial \, . \, Arc\, cosinvers\, fx = \frac{-f^1 x}{\sqrt{[2fx - (fx)^2]}}.$$

In (II) werde nach einander $sin\, x$, $cos\, x$, $tg\, x$, u. s. w. statt fx gesetzt, so findet man ferner

(XI) $\partial\, lg\, \sin x = \cot x$
(XII) $\partial\, lg\, \cos x = -\, tg\, x$
(XIII) $\partial\, lg\, tg\, x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$
(XIV) $\partial\, lg\, \cot x = \frac{-1}{\sin x \cos x} = \frac{-2}{\sin 2x}$
(XV) $\partial\, lg\, \sec x = tg x$
(XVI) $\partial\, lg\, \mathrm{cosec}\, x = -\cot x$.

Hieraus übersieht man auch wie in dergleichen Fällen, in der Ableitung, die Logarithmen wegfallen.

§. 188.

2. **Zusatz.** Man setze $Fp = p^n$ wo n jede ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl bedeutet, so wird $F^1 p = np^{n-1}$, folglich ∂Fp oder

$$\partial . p^n = n p^{n-1} \partial p.$$

Auch wird hieraus $\partial . p^{-n} = -\, np^{-n-1} \partial . p$, oder

$$\partial . \frac{1}{p^n} = -\frac{n \partial p}{p^{n+1}}.$$

1. **Beispiel.** Die Ableitung von $(a - bx^3 + cx^4)^5$ zu finden, setze man $p = a - bx^3 + cx^4$, so wird $\partial p = -3bx^2 + 4cx^3$. Aber $\partial . p^5 = 5p^4 \partial p$, daher $\partial . p^5 = 5(a - bx^3 + cx^4)(4cx^3 - 3bx^2)$.

2. **Beispiel.** Die Ableitung von $\sqrt[3]{(a + bx^{\frac{3}{2}} - cx^{\frac{5}{4}})}$ zu finden, setze man $p = a + bx^{\frac{3}{2}} - cx^{\frac{5}{4}}$, so wird $\partial p = \frac{3}{2} bx^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} cx^{\frac{1}{4}}$.
Aber $\partial . p^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} \partial p = \frac{\partial p}{3\sqrt[3]{p^2}}$, daher

$$\partial . p^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{2} bx^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} cx^{\frac{1}{4}}}{3\sqrt[3]{(a + bx^{\frac{3}{2}} - cx^{\frac{5}{4}})^2}}$$

3. **Beispiel.** Die Ableitung von $\frac{1}{x + \sqrt{(a^2 - x^2)}}$ zu finden, setze man $p = x + \sqrt{(a^2 - x^2)}$, so wird $\partial p = 1 - (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} x$.
Aber $\partial . \frac{1}{p} = \frac{-\partial p}{p^2}$, daher

$$\partial . \frac{1}{p} = \frac{-1 + x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{[x + \sqrt{(a^2 - x^2)}]^2} = \frac{x - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{[x + \sqrt{(a^2 - x^2)}]^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

4. **Beispiel.** Die Ableitung von e^{nx} zu finden, setze man $p = e^x$, so wird $p^n = (e^x)^n = e^{nx}$ und $\partial p = \partial e^x = e^x$ (§. 180.), daher

$$\partial . p^n = n . e^{nx-1} . e^x \text{ oder}$$
$$\partial . e^{nx} = n . e^{nx}.$$

5. **Beispiel.** Die Ableitung von $\frac{1}{e^{nx}} = e^{-nx}$ zu finden, setze man $p = e^{nx}$, so wird $\partial p = ne^{nx}$ und $p^2 = e^{2nx}$, daher

$$\partial \frac{1}{p} = -\frac{n e^{nx}}{e^{2x}}, \text{ oder}$$

$$\partial . e^{-nx} = -n e^{-nx}.$$

Diesen Ausdruck hätte man auch aus dem vorhergehenden Beispiele erhalten können, wenn $-n$ statt n gesetzt worden wäre.

Bei der hier gewählten Bezeichnung ist wohl zu bemerken, daß, wenn die erste Ableitung von p^n genommen werden soll, dies mit $\partial . p^n$ bezeichnet, daß aber die $n$te Potenz von ∂p durch $(\partial p)^n = \partial p^n$ angedeutet wird. Hienach ist ferner

$$\partial^r (p^n) = \partial^r . p^n, \text{ wogegen}$$

$(\partial^r p)^n$ ungeändert durch $(\partial^r p)^n$, oder wenn keine Verwechselung zu befürchten ist, mit $\partial^r p^n$ bezeichnet werden soll.

§. 189.

3. Zusatz. Die Ableitung von $y = \frac{p^n}{q^m}$ zu finden, wenn p, q willkührliche Funkzionen der unabhängig Veränderlichen x, und n, m ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bedeuten, erhält man §. 184. (III)

$$\partial \frac{p^n}{q^m} = \frac{q^m \partial . p^n - p^n \partial . q^m}{q^{2m}}, \text{ oder §. 188.}$$

$$(I) \quad \partial \frac{p^n}{q^m} = \frac{n q p^{n-1} \partial p - m p^n \partial q}{q^{m+1}}.$$

Hierin $\frac{1}{m}$ anstatt m gesetzt, giebt

$$(II) \quad \partial \frac{p^n}{q^{\frac{1}{m}}} = \frac{n m q p^{n-1} \partial p - p^n \partial q}{m q^{\frac{1}{m}+1}}.$$

Ferner wird hieraus

$$\partial \frac{p^n}{\sqrt{q}} = \frac{2 n q p^{n-1} \partial p - p^n \partial q}{2 q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial \frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{2 q \partial p - p \partial q}{2 q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{q \partial p - p \partial q}{2 \sqrt{p} \sqrt{q^3}}.$$

§. 190.

4. Zusatz. Sucht man die höheren Ableitungen von p^m, so wird, wenn man $\partial p . \partial p = \partial p^2$; $\partial p . \partial p^2 = \partial p^3$; u. s. w. setzt,

$\partial . p^m = m p^{m-1} \partial p$, daher §. 183.

$\partial^2 . p^m = m(m-1) p^{m-2} \partial p^2 + m p^{m-1} \partial^2 p$

$\partial^3 . p^m = m(m-1)(m-2) p^{m-3} \partial p^3 + 3m(m-1) p^{m-2} \partial p \partial^2 p + m p^{m-1} \partial^3 p$

$\partial^4 . p^m = m(m-1)(m-2)(m-3) p^{m-4} \partial p^4 + 6m(m-1)(m-2) p^{m-3} \partial p^2 \partial^2 p$
$\quad + m(m-1) [4 \partial p \partial^3 p + 3 (\partial^2 p)^2] p^{m-2} + m p^{m-1} \partial^4 p$

u. s. w.

Für $m = -m$ wird $p^{-m} = \frac{1}{p^m}$, daher

$$\partial \cdot \frac{1}{p^m} = -\frac{m\,\partial p}{p^{m+1}}$$

$$\partial^2 \cdot \frac{1}{p^m} = \frac{+1}{p^{m+2}}\,[m\,(m+1)\,\partial p^2 - m\,p\,\partial^2 p]$$

$$\partial^3 \cdot \frac{1}{p^m} = \frac{-1}{p^{m+3}}\,[m\,(m+1)\,(m+2)\,\partial p^3 - 3\,m\,(m+1)\,p\,\partial p\,\partial^2 p + m\,p^2\,\partial^3 p]$$

$$\partial^4 \cdot \frac{1}{p^m} = \frac{+1}{p^{m+4}}\,[m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\,\partial p^4 - 6\,m\,(m+1)\,(m+2)\,p\,\partial p^2\,\partial^2 p$$
$$+ m\,(m+1)\,(4\,\partial p\,\partial^3 p + 3(\partial^2 p)^2)\,p^2 - m\,p^3\,\partial^4 p]$$

u. s. w.

Allgemeine Ausdrücke für die höhern Ableitungen findet man §. 880.

Um das Gesetz zu erhalten, nach welchem die Ausdrücke der höheren Ableitungen fortschreiten, wenn $\partial^2 p = 0$ wird, bezeichne man die Zahlenkoeffizienten von $\partial^n p$ mit ${}^nA_1$; ${}^nA_2$; ${}^nA_3$; ...... so wird mit Anwendung der Bezeichnung für die Binomialkoeffizienten, für

$$\partial^2 . p = 0$$

$$\partial \,.\, p^m = m\,p^{m-1}\,\partial p$$

$$\partial^2 .\, p^m = 2!\,m_2\,p^{m-2}\,\partial p^2 + m\,p^{m-1}\,\partial^2 p,$$

oder wenn man $r!\,m_r\,p^{m-r} = p_r$ setzt

$$\partial^2 .\, p^m = p_2\,\partial p^2 + {}^2A_1\,p_1\,\partial^2 p, \text{ wo } {}^2A_1 = 1 \text{ ist.}$$

$$\partial^3 .\, p^m = p_3\,\partial p^3 + \left.\begin{array}{c} 2 \\ + {}^2A_1 \end{array}\right|\,p_2\,\partial p\,\partial^2 p, \text{ oder}$$

$$\partial^3 .\, p^m = p_3\,\partial p^3 + {}^3A_1\,p_2\,\partial p\,\partial^2 p.$$

$$\partial^4 .\, p^m = p_4\,\partial p^4 + \left.\begin{array}{c} 3 \\ + {}^3A_1 \end{array}\right|\,p_3\,\partial p^2\,\partial^2 p + {}^3A_1\,p_2\,(\partial^2 p)^2, \text{ oder}$$

$$\partial^4 .\, p^m = p_4\,\partial p^4 + {}^4A_1\,p_3\,\partial p^2\,\partial^2 p + {}^4A_2\,p_2\,(\partial^2 p)^2.$$

$$\partial^5 .\, p^m = p_5\,\partial p^5 + \left.\begin{array}{c} 4 \\ + {}^4A_1 \end{array}\right|\,p_4\,\partial p^3\,\partial^2 p + \left.\begin{array}{c} 2.{}^4A_1 \\ + {}^4A_2 \end{array}\right|\,p_3\,\partial p\,(\partial^2 p)^2, \text{ oder}$$

$$\partial^5 .\, p^m = p_5\,\partial p^5 + {}^5A_1\,p_4\,\partial p^3\,\partial^2 p + {}^5A_2\,p_3\,\partial p\,(\partial^2 p)^2.$$

$$\partial^6 .\, p^m = p_6\,\partial p^6 + \left.\begin{array}{c} 5 \\ + {}^5A_1 \end{array}\right|\,p_5\,\partial p^4\,\partial^2 p + \left.\begin{array}{c} 3.{}^5A_1 \\ + {}^5A_2 \end{array}\right|\,p_4\,\partial p^2\,(\partial^2 p)^2 + {}^5A_2\,p_3\,(\partial^2 p)^3, \text{ oder}$$

$$\partial^6 .\, p^m = p_6\,\partial p^6 + {}^6A_1\,p_5\,\partial p^4\,\partial^2 p + {}^6A_2\,p_4\,\partial p^2\,(\partial^2 p)^2 + {}^6A_3\,p_3\,(\partial^2 p)^3.$$

$$\partial^7 .\, p^m = p_7\,\partial p^7 + \left.\begin{array}{c} 6 \\ + {}^6A_1 \end{array}\right|\,p_6\,\partial p^5\,\partial^2 p + \left.\begin{array}{c} 4.{}^6A_1 \\ + {}^6A_2 \end{array}\right|\,p_5\,\partial p^3\,(\partial^2 p)^2 + \left.\begin{array}{c} 2.{}^6A_2 \\ + {}^6A_3 \end{array}\right|\,p_4\,\partial p\,(\partial^2 p)^3, \text{ oder}$$

$$\partial^7 .\, p^m = p_7\,\partial p^7 + {}^7A_1\,p_6\,\partial p^5\,\partial^2 p + {}^7A_2\,p_5\,\partial^3 p\,(\partial^2 p)^2 + {}^7A_3\,p_4\,\partial p\,(\partial^2 p)^3.$$

Geht man auf diese Art weiter und vergleicht die gefundenen Zahlenkoeffizienten mit einander, so entsteht folgende Zusammenstellung:

$^2A_1 = 1;\quad {}^3A_1 = {}^2A_1 + 2;\quad {}^4A_1 = {}^3A_1 + 3;\quad {}^5A_1 = {}^4A_1 + 4;\ \ldots\ldots$
$^4A_2 = {}^3A_1;\quad {}^5A_2 = {}^4A_2 + 2.{}^4A_1;\quad {}^6A_2 = {}^5A_2 + 3.{}^5A_1;\quad {}^7A_2 = {}^6A_2 + 4.{}^6A_1;\ \ldots\ldots$
$^6A_3 = {}^5A_2;\quad {}^7A_3 = {}^6A_3 + 2.{}^6A_2;\quad {}^8A_3 = {}^7A_3 + 3.{}^7A_2;\quad {}^9A_3 = {}^8A_3 + 4.{}^8A_2;\ \ldots\ldots$
$^8A_4 = {}^7A_3;\quad {}^9A_4 = {}^8A_4 + 2.{}^8A_3;\quad {}^{10}A_4 = {}^9A_4 + 3.{}^9A_3;\quad {}^{11}A_4 = {}^{10}A_4 + 4.{}^{10}A_3;\ \ldots\ldots$

u. s. w. Hienach findet man

$$^nA_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots (n-1) = n_2 \text{ (§. 40. } XIII.)$$
$$^nA_2 = 3_2 + 2.4_2 + 3.5_2 + 4.6_2 + \ldots + (n-3)(n-1)_2$$
$$= 3\,[3_3 + 4_3 + 5_3 + \ldots + (n-1)_3], \text{ oder §. 40. } (XIII).$$
$$^nA_2 = 1.3.n_4.$$
$$^nA_3 = 3\,[1.5_4 + 2.6_4 + 3.7_4 + 4.8_4 + \ldots + (n-5)(n-1)_4]$$
$$= 3.5\,[5_5 + 6_5 + 7_5 + \ldots + (n-1)_5], \text{ oder §. 40. } (XIII).$$

$^nA_3 = 1.3.5.n_6$. Auf gleiche Weise findet man

$$^nA_4 = 1.3.5.7.n_8;\quad {}^nA_5 = 1.3.5.7.9.n_{10}, \text{ und überhaupt}$$
$$^nA_r = 1.3.5.7\ldots(2r-1).n_{2r}.$$

Hienach findet man für $\partial^3 p = 0$

$$\begin{aligned}\partial^n.p^m = n!\,m_n p^{m-n}\,\partial p^n &+ 1.n_2\,(n-1)!\,m_{n-1}\,p^{m-n+1}\,\partial p^{n-2}\,\partial^2 p \\ &+ 1.3\,n_4\,(n-2)!\,m_{n-2}\,p^{m-n+2}\,\partial p^{n-4}\,(\partial^2 p)^2 \\ &+ 1.3.5\,n_6\,(n-3)!\,m_{n-3}\,p^{m-n+3}\,\partial p^{n-6}\,(\partial^2 p)^3 \\ &+ 1.3.5.7\,n_8\,(n-4)!\,m_{n-4}\,p^{m-n+4}\,\partial p^{n-8}\,(\partial^2 p)^4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder wenn man die Binomialkoeffizienten $n_2, n_4, n_6 \ldots\ldots$ in ihre Faktoren auflöst:

$$(I)\quad \partial^n.p^m = n!\,p^{m-n}\Big[m_n\,\partial p^n + \tfrac{1}{2}(n-1)_1\,m_{n-1}\,p\,\partial p^{n-2}\,\partial^2 p + \tfrac{1.3}{3.4}(n-2)_2\,m_{n-2}\,p^2\,\partial p^{n-4}(\partial^2 p)^2 + \tfrac{1.3.5}{4.5.6}(n-3)_3\,m_{n-3}\,p^3\,\partial p^{n-6}(\partial^2 p)^3 + \tfrac{1.3.5.7}{5.6.7.8}(n-4)_4\,m_{n-4}\,p^4\,\partial p^{n-8}(\partial^2 p)^4 \ldots\ldots\Big]$$

Wird $-m$ statt m gesetzt, so findet man, wegen §. 38. *LVIII.*

$$(II)\quad \partial^n.\frac{1}{p^m} = \frac{\pm n!}{p^{m+n}}\Big[(m+n-1)_n\,\partial p^n - \tfrac{1}{2}(n-1)_1(m+n-2)_{n-1}\,p\,\partial p^{n-2}\,\partial^2 p + \tfrac{1.3}{3.4}(n-2)_2(m+n-3)_{n-2}\,p^2\,\partial p^{n-4}(\partial^2 p)^2 - \tfrac{1.3.5}{4.5.6}(n-3)_3(m+n-4)_{n-3}\,p^3\,\partial p^{n-6}(\partial^2 p)^3 \ldots\ldots\Big]$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Für $m = 1$ wird

$$(III)\quad \partial^n.\frac{1}{p} = \frac{\pm n!}{p^{n+1}}\Big[\partial p^n - \frac{1}{2}(n-1)_1 p\,\partial p^{n-2}\partial^2 p + \frac{1.3}{3.4}(n-2)_2 p^2\,\partial p^{n-4}(\partial^2 p)^2$$
$$- \frac{1.3.5}{4.5.6}(n-3)_3 p^3\,\partial p^{n-6}(\partial^2 p)^3 + \frac{1.3.5.7}{5.6.7.8}(n-4)_4 p^4\,\partial p^{n-8}(\partial^2 p)^4 - \ldots\ldots\Big]$$

Wird $\partial^2 p = 0$, so findet man:

$$(IV)\quad \begin{cases}\partial^n.\,p^m = n!\,m_n\,p^{m-n}\,\partial p^n\\ \partial^n.\,\frac{1}{p^m} = \pm\,\frac{n!\,(m+n-1)_n}{p^{m+n}}\,\partial p^n\end{cases}$$

und daher auch

$$(V)\quad \partial^n.\,\frac{1}{p} = \pm\,\frac{n!\,\partial p^n}{p^{n+1}}.$$

1. **Beispiel.** Die *n*te Ableitung von $\frac{1}{a+bx^2}$ zu finden, setze man $p = a + bx^2$, so wird $\partial p = 2bx$ und $\partial^2 p = 2b$, daher nach (III)

$$\partial^n.\frac{1}{a+bx^2} = \frac{\pm n!}{(a+bx)^{n+1}}\Big[(2b)^n x^n - \frac{1}{2}(n-1)(2b)^{n-1}x^{n-2}(a+bx^2)$$
$$+\frac{1.3}{2.4}(n-2)_2(2b)^{n-2}x^{n-4}(a+bx^2)^2 - \frac{1.3.5}{4.5.6}(n-3)_3(2b)^{n-3}x^{n-6}(a+bx^2)^3 + \ldots\Big]$$

Hienach wird

$$\partial.\frac{1}{a+bx^2} = \frac{-2bx}{(a+bx^2)^2}$$
$$\partial^2.\frac{1}{a+bx^2} = \frac{2!}{(a+bx^2)^3}\,[4b^2x^2 - b(a+bx^2)]$$
$$\partial^3.\frac{1}{a+bx^2} = \frac{-3!}{(a+bx^2)^4}\,[8b^3x^3 - 4b^2x(a+bx^2)]$$
$$\partial^4.\frac{1}{a+bx^2} = \frac{4!}{(a+bx^2)^5}\,[16b^4x^4 - 12b^3x^2(a+bx^2) + \tfrac{3}{2}b^2(a+bx^2)^2]$$

u. s. w.

2. **Beispiel.** Die *n*te Ableitung von $(a+bx)^m$ zu finden, setze man $p = a+bx$, so wird $\partial p = b$ und $\partial^2 p = 0$, daher nach (IV)

$$\partial^n(a+bx)^m = n!\,m_n\,b^n(a+bx)^{m-n}$$

3. **Beispiel.** Die *n*te Ableitung von $\frac{1}{(a+bx)^m}$ zu finden, wird $\partial p = b$, daher nach (IV)

$$\partial^n.\frac{1}{(a+bx)^m} = \pm\frac{n!(m+n-1)_n b^n}{(a+bx)^{m+n}}.$$

Für $m = 1$ wird

$$\partial^n.\frac{1}{a+bx} = \pm\frac{n!\,b^n}{(a+bx)^{n+1}}$$

und für $a = 1$ und $b = -1$ wird

$$\partial^n.\frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

4. Bei-

4. **Beispiel.** Die *n*te Ableitung von $lg\,p$ zu finden, wenn $\partial^2 p = 0$ ist. Man findet

$$\partial\, lg\,p = \frac{\partial p}{p},\text{ also, wegen } \partial^2 p = 0,$$

$$\partial^2\, lg\,p = -\frac{1!\,\partial p^2}{p^2};\ \partial^3\, lg\,p = \frac{2!\,\partial p^3}{p^3};\ \partial^4\, lg\,p = -\frac{3!\,\partial p^4}{p^4};\ \ldots\ldots \text{ folglich}$$

$$\partial^n .\, lg\,p = \mp \frac{(n-1)!\,\partial p^r}{p^r}.$$

Für $p = a + bx$ wird $\partial p = b$, daher

$$\partial^n .\, lg(a + bx) = \mp \frac{(n-1)!\,b^n}{(a + bx)^n}.$$

Weil $lg\,\frac{1}{a + bx} = -\,lg\,(a + bx)$ ist, so erhält man auch

$$\partial^n .\, \frac{1}{lg(a + bx)} = \pm \frac{(n-1)!\,b^n}{(a + bx)^n},$$

wo durchgängig die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

5. **Beispiel.** Die *n*te Ableitung von e^p zu finden, wenn $\partial^2 p = 0$ ist, wird für $y = e^p$ nach §. 187., $\partial y = e^p . \partial p$, daher $\partial^2 y = e^p . \partial^2 p + \partial . e^p . \partial p = e^p . \partial p^2$. Hieraus ferner $\partial^3 y = e^p . \partial p^3$; $\partial^4 y = e^p . \partial p^4$, und überhaupt

$$\partial^n . e^p = e^p . \partial p^n.$$

§. 191.

5. **Zusatz.** Wären die beiden Gleichungen $y = Fp$ und $p = fx$ gegeben, so wird $\partial y = F^1 p . \partial p$ und $\partial p = f^1 x$, folglich

$$(I)\quad \partial y = F^1 p\, f^1 x.$$

Wenn ferner die Gleichungen

$$y = Fp;\ p = \varphi q;\ q = \psi t \text{ und } t = fx$$

gegeben sind, wo φ und ψ Funkzionenzeichen eben so wie F und f bedeuten, so findet man auf gleiche Weise, wenn x die Urveränderliche ist:

$$(II)\quad \partial y = F^1 p . \varphi^1 q . \psi^1 t . f^1 x.$$

Dieser Satz läßt sich leicht auf jede willkührliche Anzahl von Gleichungen anwenden.

1. **Beispiel.** Aus den beiden Gleichungen

$y = \frac{a^2 + bp - p^2}{p^3}$ und $p = \frac{c^3 + x^3}{a - x}$ die Ableitung von y zu finden, wird

$$\partial y = \frac{p^2 - 2bp - 3a^2}{p^4}\,\partial p \text{ und } \partial p = \frac{3ax^2 - 2x^3 + c^3}{(a - x)^2},\text{ folglich}$$

$$\partial y = \frac{(p^2 - 2bp - 3a^2)(3ax^2 - 2x^3 + c^3)}{p^4\,(a - x)^2}.$$

2. **Beispiel.** Aus den vier Gleichungen $y = \frac{a + bp + cp^2}{p^2}$; $p = \frac{b + cq^2}{q}$; $q = a + \sqrt{t^3}$ und $t = \sqrt[6]{(b^2 - x^2)}$ wird

$$\partial y = \frac{cp^2 - bp - 2a}{p^3}\,\partial p;\ \partial p = \frac{cq^2 - b}{q^2}\,\partial q;\ \partial q = \tfrac{3}{2}\,t^{\frac{1}{2}}\partial t \text{ und}$$

$$\partial t = \frac{-2x}{5(b^2 - x^2)^{\frac{4}{5}}},\ \text{folglich}$$

$$\partial y = \frac{-3\,(cp^2 - bp - 2a)(cq^2 - b)\,t^{\frac{1}{2}}x}{5p^3q^2(b^2 - x^2)^{\frac{4}{5}}}.$$

§. 192.

6. **Zusatz.** Bezeichnet wie bisher p eine Funkzion der unabhängig Veränderlichen x, so wird $\partial.Fp = F^1p.\partial p$, und wenn man hievon wieder die folgende Ableitung nach §. 183. und §. 186. nimmt

$$\partial^2.Fp = F^1p.\partial^2p + \partial F^1p.\partial p.$$

Aber $\partial F^1p = \partial F^1p.\partial p = F^2p.\partial p$, daher

$$\partial^2 Fp = F^1p.\partial^2p + F^2p.\partial p^2.$$

Geht man auf diese Art weiter, so findet man nach einander:

$\partial Fp = F^1p.\partial p$

$\partial^2 Fp = F^1p.\partial^2p + F^2p.\partial p^2$

$\partial^3 Fp = F^1p.\partial^3p + F^2p.3\partial p.\partial^2p + F^3p.\partial p^3$

$\partial^4 Fp = F^1p.\partial^4p + F^2p[4\partial p\partial^3p + 3(\partial^2p)^2] + F^3p.6\partial p^2\partial^2p + F^4p.\partial p^4$

$\partial^5 Fp = F^1p.\partial^5p + F^2p(5\partial p\partial^4p + 10\partial^2p\partial^3p) + F^3p\,[10\partial p^2\partial^3p + 15\partial p(\partial^2p)^2] + F^4p.10\partial p^3\partial^2p + F^5p.\partial p^5$

$\partial^6 Fp = F^1p.\partial^6p + F^2p[6\partial p\partial^5p + 15\partial^2p\partial^4p + 10(\partial^3p)^2] + F^3p[15\partial p^2\partial^4p + 60\partial p\partial^2p\partial^3p + 15(\partial^2p)^3]$
$+ F^4p[20\partial p^3\partial^3p + 45\partial p^2(\partial^2p)^2] + F^5p.15\partial p^4\partial^2p + F^6p.\partial p^6.$

u. s. w.

Wegen des Gesetzes, nach welchem die Glieder dieser Ableitungen fortschreiten, sehe man §. 880.

Sucht man die auf einander folgenden Ableitungen von $\frac{p}{q}$, wenn p, q willkührliche Funkzionen von x sind, so erhält man (§. 184. *III.*)

$\partial\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\partial p}{q} - \frac{p\partial q}{q^2}$, und wenn man hievon ferner die Ableitungen nimmt

$$\partial^2\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\partial^2p}{q} - \frac{2\partial p\partial q + p\partial^2q}{q^2} + \frac{2p\partial q^2}{q^3}$$

$$\partial^3\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\partial^3p}{q} - \frac{3\partial^2p\partial q + 3\partial p\partial^2q + p\partial^3q}{q^2} + \frac{6\partial p\partial q^2 + 6p\partial q\partial^2q}{q^3} - \frac{6p\partial q^3}{q^4}$$

$$\partial^4\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\partial^4p}{q} - \frac{4\partial^3p\partial q + 6\partial^2p\partial^2q + 4\partial p\partial^3q + p\partial^4q}{q^2} + \frac{12\partial^2p\partial q^2 + 24\partial p\partial q\partial^2q + 8p\partial q\partial^3q + 6p\partial^2q^2}{q^3}$$
$$- \frac{24\partial p\partial q^3 + 36p\partial q^2\partial^2q}{q^4} + \frac{24p\partial q^4}{q^5}$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem diese Ableitungen fortschreiten, findet man §. 884.

Beispiel. Die Ableitungen von $\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ zu finden, setze man $p = x^{n+1} - 1$ und $q = x - 1$, so wird $\partial p = (n+1)\,x^n$; $\partial^2p = n(n+1)\,x^{n-1}$; $\partial^3p = (n-1)n(n+1)\,x^{n-2}$; u. s. w. $\partial q = 1$; $\partial^2q = 0$; u. s. w., daher

$$\partial \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{x-1} - \frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}$$

$$\partial^2 \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) = \frac{n(n+1)x^{n-1}}{x-1} - \frac{2(n+1)x^n}{(x-1)^2} + \frac{2(x^{n+1}-1)}{(x-1)^3}$$

$$\partial^3 \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) = \frac{(n-1)n(n+1)x^{n-2}}{x-1} - \frac{3n(n+1)x^{n-1}}{(x-1)^2} + \frac{6(n+1)x^n}{(x-1)^3} - \frac{6(x^{n+1}-1)}{(x-1)^4}$$

u. s. w.

§. 193.

Es ist wohl zu bemerken, daß, wenn p eine Funkzion der unabhängig Veränderlichen x ist, alsdann $\partial . p^r = r p^{r-1} \partial p$ und $\partial x^r = r x^{r-1}$ wird.

Wäre x nicht unabhängig veränderlich, so würde man alsdann $\partial . x^r = r x^{r-1} \partial x$ erhalten, welcher Ausdruck in den vorstehenden über geht, wenn x unabhängig veränderlich, also $\partial x = 1$ wird (§. 179.), daher ist es ganz willkührlich, ob man bei den Ableitungen, welche die unabhängige Veränderliche enthalten, eben so wie bei den abhängig Veränderlichen verfährt, also die Ableitung der unabhängigen Veränderlichen oder ∂x als Faktor zusetzt, weil hiedurch der entstandene Ausdruck, wegen $\partial x = 1$ nicht verändert wird.

Diese Beibehaltung der Ableitung von der unabhängigen Veränderlichen hat den Vortheil, daß sie zugleich anzeigen kann, welche Größe als unabhängig veränderlich angenommen ist, besonders deshalb, weil in der Folge nicht jedesmal die veränderlichen Größen durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$u = a b^2 c^5 - a^3 b^2 c^4$$

und man nimmt a als unabhängig veränderlich, die übrigen Größen aber, außer u, als beständig an, so findet man

$$\partial u = b^2 c^5 - 3 a^2 b^2 c^4 \; [I].$$

Wird aber b als unabhängig veränderlich angenommen, so findet man

$$\partial u = 3 a b^2 c^5 - 2 a^3 b c^4 \; [II]$$

offenbar zwei sehr verschiedene Ausdrücke, bei deren Gebrauch man wohl unterscheiden muß, welche Größe als unabhängig veränderlich angenommen worden, weil das erste ∂u von dem zweiten sehr verschieden ist.

Hätte man hier die Ableitungen der unabhängig Veränderlichen eben so wie bei den abhängigen genommen, ohne sie $= 1$ zu setzen, so wären folgende Ausdrücke entstanden

$$\partial u = b^2 c^5 \partial a - 3 a^2 b^2 c^4 \partial a \text{ oder } \frac{\partial u}{\partial a} = b^2 c^5 - 3 a^2 b^2 c^4$$

$$\partial u = 3 a b^2 c^5 \partial b - 2 a^3 b c^4 \partial b \text{ oder } \frac{\partial u}{\partial b} = a b^2 c^5 - 2 a^3 b c^4.$$

Offenbar ist hier $\frac{\partial u}{\partial a}$ mit ∂u in [I] einerlei, weil $\partial a = 1$ ist; allein wenn man auf diese Art die Ableitungen von u bezeichnet, so wird durch $\frac{\partial u}{\partial a}$ zugleich angedeutet, daß in dem Ausdrucke, welcher u entspricht, die Größe a als unabhängig veränderlich vorausgesetzt worden. Wenn

aber, wie dies hier gewöhnlich der Fall ist, die unabhängig Veränderliche mit x bezeichnet wird, so kann $\partial x = 1$ aus der Rechnung, wie bisher, wegbleiben; sobald aber Zweifel darüber entstehen könnten, welche Größe einer Funkzion als unabhängig veränderlich vorausgesetzt ist, wird man die Ableitung der unabhängig Veränderlichen beibehalten und dadurch, daß solche als Divisor unter die Ableitung der abhängig Veränderlichen gesetzt wird, bestimmt anzeigen, welche Größe als abhängig veränderlich angenommen ist. Wenn daher

$$u = ax^2y^3 + bx^4 - cy^4$$

gegeben ist, und man nimmt u als abhängig veränderlich oder als Funkzion der unabhängig Veränderlichen an, so findet man, wenn x als unabhängig veränderlich, die übrigen Größen a, b, c, y aber als beständig vorausgesetzt werden,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2axy^3 + 4bx^3.$$

Wird aber y als unabhängig veränderlich, die übrigen Größen, außer u aber, als beständig angenommen, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3ax^2y^2 - 4cy^3.$$

Aus $\partial u = 2axy^3\partial x + 4bx^3\partial x$ erhält man ferner, weil $\partial x = 1$ als ein beständiger Faktor anzusehen ist, wenn a, b, y als unveränderliche Größen behandelt werden,

$$\partial^2 u = 2ay^3\partial x^2 + 12bx^2\partial x^2, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2ay^3 + 12bx^2. \text{ Ferner eben so}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24bx;$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24b, \text{ und } \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0.$$

Auf ähnliche Weise wird:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6ax^2y - 12cy^2;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6ax - 24cy;$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -24c, \text{ und } \frac{\partial^5 u}{\partial y^5} = 0.$$

Für $y = fx$ wird eben so wie §. 186. (*I*)

$$\partial y = \partial fx = f^1x \,.\, \partial x \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial fx}{\partial x} = f^1x.$$

Ferner eben so: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f^2x$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = f^3x$; $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f^4x$; und überhaupt:

$$\frac{\partial^r y}{\partial x^r} = \frac{\partial^r fx}{\partial x^r} = f^rx.$$

In der Folge wird in allen den Fällen, wo kein Zweifel entsteht, welche Größe als unabhängig veränderlich angenommen worden ist, und besonders dann, wenn die unabhängig Veränderliche mit x bezeichnet wird, zur Vermeidung der vielen ∂x, diese Ableitung weg bleiben; sonst aber, wenn Zweifel entstehen könnten, soll jedesmal unter die Ableitung der Funkzion, zugleich

die Ableitung der unabhängig Veränderlichen gesetzt werden. Auch kann man bei Funkzionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn bald eine oder die andere derselben als unabhängig veränderlich angenommen werden soll, zur Vermeidung jeder Verwechselung, die Ableitung dieser Funkzion und unter dieselbe die Ableitung der unabhängig Veränderlichen, in Klammern oder zwischen zwei Striche setzen, um dadurch zu bemerken, welche Veränderliche als unabhängig in der Rechnung angenommen werden soll. Hienach wird, wenn

$u = ax^2y^3 + bx^4 - cy^4$ gegeben ist,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = 2axy^3 + 4bx^3$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| = 2ay^3 + 12bx^2$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| = 3ax^2y^2 - 4cy^3$$

u. s. w. wo man auch die Werthe $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$; $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$; . . . . . partielle Ableitungen von u nennt.

§. 194.

Durch die bisherigen Ausmittelungen ist man im Stande, von jeder Funkzion von x, in welcher die veränderliche Größe x einen Zusatz h erhält, die Entwickelung dieser Funkzion nach den Potenzen von h mittelst der taylorschen Reihe zu finden, sobald man nur die Ableitungen der Funkzion von x angeben kann, und erhält alsdann ganz allgemein:

$$(I)\ f(x+h) = fx + \frac{h}{1}f^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \frac{h^4}{4!}f^4x + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \ldots.$$

Auch muß diese Reihe abbrechen, wenn eine von den abgeleiteten Funkzionen $= 0$ wird.
Für $h = -h$ wird

$$(II)\ f(x-h) = fx - \frac{h}{1}f^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x - \frac{h^3}{3!}f^3x + \frac{h^4}{4!}f^4x - \ldots \pm \frac{h^n}{n!}f^nx \mp \ldots$$

Aus $y = fx$ werde $y + w = f(x+h)$. Nun ist $f^1x = \frac{\partial y}{\partial x}$; $f^2x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; u. s. w., daher erhält man auch

$$(III)\ y + w = y + \frac{h}{1}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

$$(IV)\ w = \frac{h}{1}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

1. Beispiel. Für $\sin x = fx$ wird, wenn x um h wächst, $\sin(x+h) = f(x+h)$. Ferner (§. 180.) $f^1x = \cos x$; $f^2x = -\sin x$; $f^3x = -\cos x$; $f^4x = \sin x$ u. s. w., daher §. 176. (I)

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \frac{h^5}{5!}\cos x - \frac{h^6}{6!}\sin x - \ldots$$

wo die Zeichen nach der Ordnung

$+ + - - + + - - + + - - + + \ldots\ldots$ fortschreiten.

Wird $-h$ statt h gesetzt, so findet man

$$\sin(x-h) = \sin x - \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x + \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x - \ldots\ldots$$

wo die Zeichen nach der Ordnung

$+ - - + + - - + + - - + + \ldots\ldots$ auf einander folgen.

2. **Beispiel.** Für $\cos x = fx$ wird §. 180. $f^1 x = -\sin x$; $f^2 x = -\cos x$; $f^3 x = +\sin x$; $f^4 x = +\cos x$; u. s. w., daher wegen §. 176. (I)

$$\cos(x+h) = \cos x - \frac{h}{1}\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x - \frac{h^5}{5!}\sin x - \frac{h^6}{6!}\cos x + \ldots\ldots$$

§. 195.

Der taylorschen Reihe kann man noch verschiedene allgemeinere Gestalten geben, nur ist alsdann $(fx)^r$ von $f(x^r)$ wohl zu unterscheiden, weil der erste Ausdruck anzeigt, daß fx auf die $r$te Potenz erhoben, der letzte aber, daß man x^r statt x in fx setzen soll. Auch kann man $f(x^r)$ durch $f.x^r$ bezeichnen.

Aus $y = (fx)^r$ erhält man, wenn x um h wächst und w den entsprechenden Zuwachs von y bezeichnet

$$y + w = [f(x+h)]^r.$$

Diese Werthe statt y und $y+w$ in (III) §. 194. gesetzt, giebt

$$(I)\quad [f(x+h)]^r = (fx)^r + \frac{h}{1}\frac{\partial (fx)^r}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 (fx)^r}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n (fx)^r}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

Setzt man $y = (fx)^r.(Fx)^m$ in (III) §. 194., so wird

$$(II)\quad [f(x+h)]^r.[F(x+h)]^m$$

$$= (fx)^r.(Fx)^m + \frac{h}{1}\frac{\partial[(fx)^r(Fx)^m]}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2[(fx)^r(Fx)^m]}{\partial x^2} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n[(fx)^r(Fx)^m]}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

Setzt man ferner $p = fx$, so wird $Fp = Ffx$ und man kann auch $Fp = \varphi x$ setzen, wo φ ein Funkzionenzeichen bedeutet. Wächst p um v wenn x um h wächst, so wird

$p + v = f(x+h)$, also $F(p+v) = Ff(x+h)$. Es ist aber auch

$F(p+v) = \varphi(x+h)$, also $\varphi(x+h) = Ff(x+h)$, und nach §. 176.

$$\varphi(x+h) = \varphi x + \frac{h}{1}\varphi^1 x + \frac{h^2}{2!}\varphi^2 x + \ldots + \frac{h^n}{n!}\varphi^n x + \ldots\ldots$$

oder weil $\varphi x = Fp$, so wird §. 186., weil x die Urveränderliche ist,

$$\varphi^1 x = \frac{\partial Fp}{\partial x} = \frac{\partial Ffx}{\partial x};\ \varphi^2 x = \frac{\partial^2 Fp}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Ffx}{\partial x^2};$$ u. s. w. und man erhält

$$(III)\quad Ff(x+h) = Ffx + \frac{h}{1}\frac{\partial Ffx}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 Ffx}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n Ffx}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

Man setze $fx = x^r$, so wird $F[(x+h)^r]$, oder

$$(IV)\quad F.(x+h)^r = F.x^r + \frac{h}{1}\frac{\partial F.x^r}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 F.x^r}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n F.x^r}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

oder, wenn in (III) $fx = p$ und $Ff(x+h) = F(p+v)$ gesetzt wird

$$(V)\quad F(p+v) = Fp + \frac{h}{1}\frac{\partial Fp}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 Fp}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n Fp}{\partial x^n} + \ldots\ldots$$

Bei der Anwendung dieses Ausdrucks ist wohl zu bemerken, daß h den Zuwachs der Urveränderlichen x bedeutet. Sonst ist, weil der Ausdruck §. 176. für jede veränderliche Größe gilt, wenn solche auch nicht die Urveränderliche ist,

$$(VI)\quad F(p+v) = Fp + \frac{v}{1} F^1 p + \frac{v^2}{2!} F^2 p + \ldots + \frac{v^n}{n!} F^n p + \ldots$$

wo, nach der Bezeichnung §. 186. der Ausdruck $F^n p$ bedeutet, daß die $n$te Ableitung von Fp so genommen werden soll, als wenn p die Urveränderliche wäre, wo alsdann $\partial p = 1$ gesetzt werden muß.

Beide Ausdrücke (V) und (VI) geben nothwendig einerlei Resultat für $F(p+v)$, nur daß der Ausdruck (V) die Entwickelung nach den Potenzen von h geordnet enthält.

Setzt man $fx = F^r x$, so wird $f(x+h) = F^r(x+h)$; ferner $f^1 x = F^{r+1}(x+h)$; $f^2 x = F^{r+2}(x+h)$; .... $f^n x = F^{r+n} x$. Diese Werthe in (I) §. 194. gesetzt, geben

$$(VII)\quad F^r(x+h) = F^r x + \frac{h}{1} F^{r+1} x + \frac{h^2}{2!} F^{r+2} x + \ldots + \frac{h^n}{n!} F^{r+n} x + \ldots$$

Hienach erhält man zugleich ein Mittel, die Ableitung von unentwickelten Funkzionen mehrer abhängig veränderlichen Größen zu finden.

Wäre y eine Funkzion von p und q also, $y = f(p;q)$ und p und q verschiedene Funkzionen der unabhängig Veränderlichen x, so ist auch y eine Funkzion von x. Wächst nun y um w, p um v und q um u, wenn x um h wächst, so wird

$$y + w = f(p+v;\ q+u).$$

Nimmt man in $y = f(p;q)$ nur p als veränderlich an, und will andeuten, daß von y die Ableitung nur nach p genommen werden soll, so erhält man für diese Ableitung $\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|$ oder $\left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial p}\right|$, §. 193.

Wächst in $y = f(p;q)$ nur p um v, so wird hienach wegen (IV)

$$f(p+v;\ q) = f(p;q) + \frac{v}{1}\left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial p}\right| + \frac{v^2}{2!}\left|\frac{\partial^2 f(p;q)}{\partial p^2}\right| + \ldots \quad [I]$$

Wächst nur q um u, so wird eben so,

$$f(p;\ q+u) = f(p;q) + \frac{u}{1}\left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial q}\right| + \frac{u^2}{2!}\left|\frac{\partial^2 f(p;q)}{\partial q^2}\right| + \ldots \quad [II]$$

Von diesem Ausdrucke die Ableitung nach p genommen, und die einzelnen Glieder, welche den Faktor u haben, $= Q'$ gesetzt, giebt

$$\left|\frac{\partial f(p;\ q+u)}{\partial p}\right| = \left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial p}\right| + uQ'.$$

Nun setze man in $[I]$ $q+u$ statt q, so wird, wenn die Glieder, welche den Faktor v^2 haben, mit Q'' bezeichnet werden

$$f(p+v;\ q+u) = f(p;\ q+u) + v\left|\frac{\partial f(p;\ q+u)}{\partial p}\right| + v^2 Q''.$$

Hierin die vorstehenden Werthe gesetzt, giebt, wenn man in [II] die Glieder, welche den Faktor u^2 haben, $= Q$ setzt:

$$f(p+v;\, q+u) = f(p;q) + u\left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial q}\right| + u^2 Q$$
$$+ v\left[\left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial p}\right| + u\,Q'\right] + v^2 Q'', \text{ oder}$$
$$y + w = y + u\left|\frac{\partial y}{\partial q}\right| + v\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right| + u^2 Q + vu\,Q' + v^2 Q'', \text{ oder}$$
$$w = v\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right| + u\left|\frac{\partial y}{\partial q}\right| + u^2 Q + vu\,Q' + v^2 Q''. \quad [III]$$

Weil p und q Funkzionen von x sind, so erhält man nach (IV) §. 194., wenn die Glieder, welche h^2 zum Faktor haben, mit R und R' bezeichnet werden,

$$v = h\frac{\partial p}{\partial x} + h^2 R, \text{ und}$$
$$u = h\frac{\partial q}{\partial x} + h^2 R'.$$

Diese Werthe in [III] und alsdann alle Glieder, welche h^2 enthalten, $= S$ gesetzt, giebt

$$w = h\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|\frac{\partial p}{\partial x} + h\left|\frac{\partial y}{\partial q}\right|\frac{\partial q}{\partial x} + h^2 S.$$

Auch wird, weil y eine Funkzion von x ist, nach (IV) §. 194., wenn die Glieder, welche h^2 als Faktor enthalten, $= S'$ gesetzt werden,

$$w = h\frac{\partial y}{\partial x} + h^2 S', \text{ folglich}$$
$$h\frac{dy}{dx} + h^2 S' = h\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|\frac{\partial p}{\partial x} + h\left|\frac{\partial y}{\partial q}\right|\frac{\partial q}{\partial x} + h^2 S, \text{ oder}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|\frac{\partial p}{\partial x} + \left|\frac{\partial y}{\partial q}\right|\frac{\partial q}{\partial x} + h[S - S'].$$

Weil dieser Ausdruck für jeden Werth von h gilt, so muß er auch für $h = o$ gelten. Hieraus erhält man

$$(VIII)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|\frac{\partial p}{\partial x} + \left|\frac{\partial y}{\partial q}\right|\frac{\partial q}{\partial x}, \text{ oder}$$
$$\frac{\partial f(p;q)}{\partial x} = \left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial p}\right|\frac{\partial p}{\partial x} + \left|\frac{\partial f(p;q)}{\partial q}\right|\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren findet man, wenn $y = f(p;q;r)$ gegeben ist,

$$(IX)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|\frac{\partial p}{\partial x} + \left|\frac{\partial y}{\partial q}\right|\frac{\partial q}{\partial x} + \left|\frac{\partial y}{\partial r}\right|\frac{\partial r}{\partial x}.$$

§. 196.

Die taylorsche Reihe kann auch darauf angewandt werden, gegebene Funkzionen von x nach den steigenden Potenzen von x in Reihen zu verwandeln. Mit Rücksicht auf die Erläuterungen §. 3. setze man §. 176. (I) $x = o$, so wird

$$fh = f + \frac{h}{1}f^1 + \frac{h^2}{2!}f^2 + \frac{h^3}{3!}f^3 + \frac{h^4}{4!}f^4 + \ldots.$$

und

und weil h jeden Werth annehmen kann, so setze man $h = x$, dies giebt

$$(I)\ fx = f + \frac{x}{1}f^1 + \frac{x^2}{2!}f^2 + \frac{x^3}{3!}f^3 + \frac{x^4}{4!}f^4 + \frac{x^5}{5!}f^5 + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n + \ldots\ldots$$

wo überhaupt f^n bedeutet, daß aus fx die Ableitung $f^n x$ bestimmt und in diesem Ausdruck alsdann $x = 0$ gesetzt werde.

Diese unter dem Namen der maclaurinschen Reihe (*Colin Maclaurin Traité de Fluxions. Trad. p. Pezenas. Paris*, 1749. *Liv. II. Chap. II.* §. 751.) bekannte Entwickelungsformel, ist auf alle diejenigen Funkzionen anwendbar, von welchen man die auf einander folgenden Ableitungen anzugeben im Stande ist.

Einen von der vorstehenden Entwickelung verschiedenen Ausdruck, kann man auch auf folgende Weise erhalten. Man setze $h = -x$ in (I) §. 194., so wird

$$f = fx - \frac{x}{1}f^1 x + \frac{x^2}{2!}f^2 x - \frac{x^3}{3!}f^3 x + \ldots \text{ folglich}$$

$$(II)\ fx = f + \frac{x}{1}f^1 x - \frac{x^2}{2!}f^2 x + \frac{x^3}{3!}f^3 x - \frac{x^4}{4!}f^4 x + \frac{x^5}{5!}f^5 x - \ldots \mp \frac{x^n}{n!}f^n x \pm \ldots$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten.

1. **Beispiel.** $fx = \frac{a+x}{b+x}$ nach den Potenzen von x zu entwickeln, ist

$$fx = \frac{a+x}{b+x}, \text{ also für } x = 0 \text{ wird } f = \frac{a}{b}$$

$$f^1 x = -1 \cdot \frac{a-b}{(b+x)^2} \qquad f^1 = -1 \cdot \frac{a-b}{b^2}$$

$$f^2 x = +1 \cdot 2 \frac{a-b}{(b+x)^3} \qquad f^2 = +1 \cdot 2 \frac{a-b}{b^3}$$

$$f^3 x = -1 \cdot 2 \cdot 3 \frac{a-b}{(b+x)^4} \qquad f^3 = -1 \cdot 2 \cdot 3 \frac{a-b}{b^4}$$

. . . .

folglich nach $(I)\ fx$, oder

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 + \frac{a-b}{b^5}x^4 - \ldots\ldots$$

2. **Beispiel.** $fx = \sin x \cos x$ nach den Potenzen von x zu entwickeln, ist nach §. 180.

$$fx = \sin x \cos x, \text{ daher wird für } x = 0;\ f = 0$$

$$f^1 x = -\sin x^2 + \cos x^2 \qquad f^1 = 1$$

$$f^2 x = -2^2 \sin x \cos x \qquad f^2 = 0$$

$$f^3 x = +2^3 \sin x^2 - 2^3 \cos x^2 \qquad f^3 = -2^3$$

$$f^4 x = +2^4 \sin x \cos x \qquad f^4 = 0$$

$$f^5 x = -2^4 \sin x^2 + 2^4 \cos x^2 \qquad f^5 = +2^4$$

$$f^6 x = -2^6 \sin x \cos x \qquad f^6 = 0$$

$$f^7 x = +2^6 \sin x^2 - 2^6 \cos x^2 \qquad f^7 = -2^6$$

. . . .

folglich findet man nach (I) fx, oder

$$\sin x \cos x = \frac{1}{1}x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \frac{2^8}{9!}x^9 - \ldots\ldots$$

3. **Beispiel.** Sucht man die Entwickelung von $fx = \frac{a+x}{b+x}$ nach dem Ausdruck (II), so wird alsdann

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{(a-b)x}{(b+x)^2} - \frac{(a-b)x^2}{(b+x)^3} - \frac{(a-b)x^3}{(b+x)^4} - \frac{(a-b)x^4}{(b+x)^5} - \ldots\ldots$$

§. 197.

In allen den Fällen, wo sich aus fx die $n$te Ableitung oder $f^n x$ allgemein darstellen läßt, ist es leicht mittelst der maclaurinschen Reihe jede Funkzion von x in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln, und das allgemeine Glied derselben (§. 7.) darzustellen. In vielen Fällen kann man aber auch diese Entwickelung einer gegebenen Funkzion, welche Potenzen oder Wurzeln enthält, mit Hülfe der Ableitungen bewirken, weil man dadurch im Stande ist die Wurzelzeichen wegzuschaffen.

Wäre z. B. der Ausdruck

$$y = [(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x]^m, \ [I]$$

wo m jede mögliche Zahl bedeuten kann, in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln, so läßt sich das Gesetz nach welchem die Koeffizienten der entsprechenden Reihe fortschreiten nicht wohl übersehen, wenn man den gegebenen Ausdruck nach dem binomischen Lehrsatze oder nach der maclaurinschen Reihe entwickelt. Nimmt man dagegen die Ableitung von $[I]$, so wird

$$\partial y = m[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x]^{m-1}\left[\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} + 1\right] = \frac{m[\sqrt{(1+x^2)} + x]^m}{\sqrt{(1+x^2)}}, \text{ oder}$$

$\frac{\partial y}{y} = \frac{m}{\sqrt{(1+x^2)}}$. Diesen Ausdruck quadrirt, giebt $(1 + x^2)\,\partial y^2 = m^2 y^2$ und hievon nochmals die Ableitung genommen

$$2(1 + x^2)\,\partial y \partial^2 y + 2x\partial y^2 = 2m^2 y \partial y, \text{ oder durch } 2\,\partial y \text{ dividirt}$$

$$(1 + x^2)\,\partial^2 y + x\partial y - m^2 y = 0, \ [II]$$

wodurch ein vom Wurzelzeichen befreiter Ausdruck entstanden ist. Setzt man nun die entsprechende Reihe

$$y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots \text{ so wird}$$

$$\partial y = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots \text{ und}$$

$$\partial^2 y = 1.2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + \ldots + (n-1)nA_n x^{n-2} + \ldots$$

Nun wird $y = 1$ für $x = 0$ nach $[I]$ und $y = A$ für $x = 0$ nach vorstehender Reihe, daher $A = 1$. Eben so wird in $\frac{\partial y}{y} = \frac{m}{\sqrt{(1+x^2)}}$; $\partial y = m$ für $x = 0$, und in vorstehender Reihe $\partial y = A_1$ für $x = 0$, daher ist $A_1 = m$, folglich

$$y = 1 + mx + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

$$\partial y = m + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + (n+1)A_{n+1} x^n + \ldots \text{ und}$$

$$\partial^2 y = 1.2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + \ldots + (n+1)(n+2)A_{n+2} x^n + \ldots$$

Diese für y, ∂y und $\partial^2 y$ gefundenen Werthe in [II] gesetzt, erhält man

$$0 = \left.\begin{array}{r} 1.2A_2 + 2.3A_3 \\ \\ +\ \ 1A_1 \\ -m^2 - m^2\ A_1 \end{array}\right| x \left.\begin{array}{r} +\ 3.4A_4 \\ +\ 1.2A_2 \\ +\ \ 2A_2 \\ -\ m^2\ A_2 \end{array}\right| x^2 \ldots \left.\begin{array}{r} +\ (n+1)(n+2)A_{n+2} \\ +\ (n-1)\,n\ \ A_n \\ +\ \ n\ \ A_n \\ -\ \ m^2\ \ A_n \end{array}\right| x^n + \ldots$$

Weil dieser Ausdruck für jeden Werth von x gilt, so ist (§. 52.)

$$(n+1)(n+2)A_{n+2} + (n-1)nA_n + nA_n - m^2A_n = 0, \text{ folglich}$$

$$A_{n+2} = A_n \frac{m^2 - n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Nun ist $A = 1$ und $A_1 = m$; wenn daher 0, 1, 2, ... statt n in vorstehende Koeffizientengleichung gesetzt wird, so erhält man:

$$\begin{array}{llll}
A = 1; & \text{oder} & A = 1; \\
A_1 = m; & & A_1 = m; \\
A_2 = A\,\frac{m^2}{1.2}; & & A_2 = \frac{m^2}{1.2}; \\
A_3 = A_1\,\frac{m^2-1}{2.3}; & & A_3 = \frac{m.m^2-1}{1.2.3}; \\
A_4 = A_2\,\frac{m^2-2^2}{3.4}; & & A_4 = \frac{m^2}{1.2}.\frac{m^2-2^2}{3.4}; \\
A_5 = A_3\,\frac{m^2-3^2}{4.5}; & & A_5 = \frac{m.m^2-1}{1.2.3}.\frac{m^2-3^2}{4.5}; \\
A_6 = A_4\,\frac{m^2-4^2}{5.6}; & & A_6 = \frac{m^2}{1.2}.\frac{m^2-2^2}{3.4}.\frac{m^2-4^2}{5.6}; \\
A_7 = A_5\,\frac{m^2-5^2}{6.7}; & & A_7 = \frac{m.m^2-1}{1.2.3}.\frac{m^2-3^2}{4.5}.\frac{m^2-5^2}{6.7};
\end{array}$$

u. s. w.

Weil die geraden Koeffizienten von den ungeraden wesentlich verschieden sind, so erhält man allgemein, mit Ausnahme der beiden ersten Koeffizienten:

$$A_{2r} = \frac{m^2.m^2-2^2.m^2-4^2 \ldots m^2-(2r-2)^2}{1.2.3.4.5.6 \ldots 2r-1.2r};$$

$$A_{2r+1} = \frac{m.m^2-1.m^2-3^2.m^2-5^2 \ldots m^2-(2r-1)^2}{1.2.3.4.5.6.7 \ldots 2r.2r+1}.$$

Nun war $y = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$, daher findet man

$$[\sqrt{(1+x^2)} + x]^m$$
$$= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m^2}{1.2}x^2 + \frac{m.m^2-1}{1.2.3}x^3 + \frac{m^2.m^2-2^2}{1.2.3.4}x^4 + \frac{m.m^2-1.m^2-3^2}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{m^2.m^2-2^2.m^2-4^2}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \ldots$$

§. 198.

Zusatz. Wird x negativ genommen, so findet man

$$[\sqrt{(1+x^2)} - x]^m$$
$$= 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m^2}{1.2}x^2 - \frac{m.m^2-1}{1.2.3}x^3 + \frac{m^2.m^2-2^2}{1.2.3.4}x^4 - \frac{m.m^2-1.m^2-3^2}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{m^2.m^2-2^2.m^2-4^2}{1.2.3.4.5.6}x^6 - \ldots$$

Hienach ist ferner

(I) $\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}+x]^m+\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}-x]^m$

$= 1+\frac{m^2}{1.2}x^2+\frac{m^2.m^2-2^2}{1.2.3.4}x^4+\frac{m^2.m^2-2^2.m^2-4^2}{1.2.3.4.5.6}x^6+\ldots\ldots$ und

(II) $\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}+x]^m-\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}-x]^m$

$=\frac{m}{1}x+\frac{m.m^2-1}{1.2.3}x^3+\frac{m.m^2-1.m^2-3^2}{1.2.3.4.5}x^5+\frac{m.m^2-1.m^2-3^2.m^2-5^2}{1.2.3.4.5.6.7}x^7+\ldots\ldots$

Die vorstehenden Entwickelungen findet man bei Euler (*Institutionum calculi integralis. Vol. I. Petrop.* 1792. §. 179. *pag.* 99.).

§. 199.

Man setze $x = \sin\varphi.\sqrt{-1}$, so wird $\sqrt{(1+x^2)}=\cos\varphi$, daher nach (*I*) §. 155.

$$\sin m\varphi.\sqrt{-1}=\tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}+x]^m-\tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}-x]^m,$$

woraus nach (*II*) §. 198. und §. 14. folgt

$$(I)\ \sin m\varphi=\frac{m}{1}\sin\varphi-\frac{m.m^2-1}{1.2.3}\sin\varphi^3+\frac{m.m^2-1.m^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin\varphi^5-\frac{m\ldots m^2-5^2}{1\ldots 7}\sin\varphi^7+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{m.m^2-1.m^2-3^2\ldots\ldots m^2-(2n-1)^2}{1.2.3.4.5\ldots\ldots 2n+1}\sin\varphi^{2n+1}\mp\ldots$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Diese Reihe bricht ab, wenn m eine positive ungerade Zahl ist, und man findet hienach

$\sin 1\varphi=\sin\varphi;$
$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin\varphi^3;$
$\sin 5\varphi=5\sin\varphi-20\sin\varphi^3+16\sin\varphi^5;$
$\sin 7\varphi=7\sin\varphi-56\sin\varphi^3+112\sin\varphi^5-64\sin\varphi^7;$
u. s. w.

Von dem Ausdruck (*I*) die Ableitung genommen und alsdann durchgängig durch $m\partial\varphi$ dividirt, giebt:

$$(II)\ \cos m\varphi=\cos\varphi\Big[1-\frac{m^2-1}{1.2}\sin\varphi^2+\frac{m^2-1.m^2-3^2}{1.2.3.4}\sin\varphi^4-\frac{m^2-1.m^2-3^2.m^2-5^2}{1.2.3.4.5.6}\sin\varphi^6+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{m^2-1.m^2-3^2\ldots m^2-(2n-1)^2}{1.2.3.4\ldots 2n-1.\ 2n}\sin\varphi^{2n}\mp\ldots\Big];$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Diese Reihe bricht ab, wenn m eine positive ungerade Zahl ist, und man findet hienach:

$\cos 1\varphi=\cos\varphi;$
$\cos 3\varphi=(1-4\sin\varphi^2)\cos\varphi;$
$\cos 5\varphi=(1-12\sin\varphi^2+16\sin\varphi^4)\cos\varphi;$
$\cos 7\varphi=(1-24\sin\varphi^2+80\sin\varphi^4-64\sin\varphi^6)\cos\varphi;$
u. s. w.

Für $x=\sin\varphi.\sqrt{-1}$ also $\sqrt{(1+x^2)}=\cos\varphi$ wird ferner nach (*II*) §. 155.

$\cos m\varphi=\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}+x]^m+\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x^2)}-x]^m$, woraus nach (*I*) §. 198. folgt

$$(III)\quad \cos m\varphi = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin\varphi^2 + \frac{m^2.m^2-2^2}{1.2.3.4}\sin\varphi^4 - \frac{m^2.m^2-2^2.m^2-4^2}{1.2.3.4.5.6}\sin\varphi^6 + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{m^2.m^2-2^2\ldots m^2-(2n-2)^2}{1.2.3.4\ldots 2n-1.2n}\sin\varphi^{2n} \mp \ldots\ldots$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Die Reihe bricht ab, wenn m eine positive gerade Zahl ist, und man erhält hienach

$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin\varphi^2;$
$\cos 4\varphi = 1 - 8\sin\varphi^2 + 8\sin\varphi^4;$
$\cos 6\varphi = 1 - 18\sin\varphi^2 + 48\sin\varphi^4 - 32\sin\varphi^6;$
u. s. w.

Von dem Ausdruck (III) die Ableitung genommen, und alsdann durch $-m\partial\varphi$ dividirt, giebt

$$(IV)\quad \sin m\varphi = \cos\varphi\left[\frac{m}{1}\sin\varphi - \frac{m.m^2-2^2}{1.2.3}\sin\varphi^3 + \frac{m.m^2-2^2.m^2-4^2}{1.2.3.4.5}\sin\varphi^5 - \ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots \pm \frac{m.m^2-2^2\ldots m^2-(2n)^2}{1.2.3\ldots 2n.2n+1}\sin\varphi^{2n+1} \mp \ldots\right]$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Die Reihe bricht ab, wenn m eine positive gerade Zahl ist, und man erhält:

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi;$
$\sin 4\varphi = (4\sin\varphi - 8\sin\varphi^3)\cos\varphi;$
$\sin 6\varphi = (6\sin\varphi - 32\sin\varphi^3 + 32\sin\varphi^5)\cos\varphi;$
u. s. w.

§. 200.

Aufgabe. Den gegebenen Ausdruck

$$y = [x + \sqrt{(x^2-1)}]^n \quad [I]$$

in eine fallende Reihe zu entwickeln, welche nach den Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Die erste Ableitung von $[I]$ giebt, weil $\partial x = 1$ ist,

$$\partial y = n[x + \sqrt{(x^2-1)}]^{n-1}\left[1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}\right] = \frac{n[x+\sqrt{(x^2-1)}]^n}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{ny}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

oder $\partial y.\sqrt{(x^2-1)} = ny$. Die einzelnen Glieder quadrirt, giebt $(x^2-1).\partial y^2 = n^2y^2$, und hievon wieder die Ableitung genommen $2x\partial y^2 + 2(x^2-1)\partial y\partial^2 y = 2n^2y\partial y$. Durch $2\partial y$ dividirt, findet man

$o = n^2y - x\partial y - (x^2-1)\partial^2 y \quad [II]$. Man setze
$y = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots\ldots [III]$, so wird
$\partial y = nAx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + (n-2)A_2x^{n-3} + \ldots\ldots$
$\partial^2 y = n(n-1)Ax^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + (n-2)(n-3)A_2x^{n-4} + \ldots$

Diese Werthe in $[II]$ gesetzt und nach den Potenzen von x geordnet, giebt

$$
\begin{array}{rl|rl|rl|rl}
o = + & n^2 A & x^n + & n^2 A_1 & x^{n-1} + & n^2 A_2 & x^{n-2} + & n^2 A_3 \;\; x^{n-3} + \ldots \\
- & n A & - & (n-1) A_1 & - & (n-2) A_2 & - & (n-3) A_3 \\
- & n(n-1) A & - & (n-1)(n-2) A_1 & - & (n-2)(n-3) A_2 & - & (n-3)(n-4) A_3 \\
 & & & & + & n(n-1) A & + & (n-1)(n-2) A_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
\ldots\ldots + & n^2 A_r & x^{n-r} + \ldots\ldots \\
- & (n-r) A_r & \\
- & (n-r)(n-r-1) A_r & \\
+ & (n-r+2)(n-r+1) A_{r-2} &
\end{array}
$$

Nach §. 52. die Koeffizienten jedes Gliedes $= o$ gesetzt, so erhält man für den ersten Koeffizienten $o = o . A$, wodurch A unbestimmt bleibt. Für den zweiten Koeffizienten wird $o = (2n - 1) A_1$. Weil nun $2n - 1$ nicht $= o$ werden kann, so muß $A_1 = o$ seyn. Hienach findet man eben so $A_3 = o$; $A_5 = o$; $A_7 = o$; u. s. w.

Ferner ist ganz allgemein

$$o = [n^2 - (n-r) - (n-r)(n-r-1)] A_r + (n-r+2)(n-r+1) A_{r-2}.$$

Hieraus findet man

$$A_r = - \frac{(n-r+2)(n-r+1)}{r(2n-r)} A_{r-2}.$$

Hierin nach einander 2, 4, 6, ... statt r gesetzt, giebt

$$A_2 = - \frac{n}{2^2 . 1} A$$

$$A_4 = - \frac{n-3}{2^2 . 2} A_2 = \frac{n(n-3)}{2^4 . 1 . 2} A$$

$$A_6 = - \frac{(n-4)(n-5)}{2^2 . 3 (n-3)} A_4 = - \frac{n . (n-4)(n-5)}{2^6 . 1 . 2 . 3} A$$

$$A_8 = - \frac{(n-6)(n-7)}{2^2 . 4 (n-4)} A_6 = \frac{n . (n-5)(n-6)(n-7)}{2^8 . 1 . 2 . 3 . 4} A$$

u. s. w.

Den Werth für A zu finden, ist §. 31.

$$\sqrt{(x^2 - 1)} = x - \tfrac{1}{2} \frac{1}{x} - \tfrac{1}{8} \frac{1}{x^3} - \ldots \text{ also nach } [I]$$

$$y = \left(2x - \tfrac{1}{2} \frac{1}{x} - \ldots\right)^n, \text{ oder (§. 70.)}$$

$y = 2^n x^n - \ldots\ldots$ Diesen Ausdruck mit [III] verglichen, giebt $A = 2^n$, folglich

$$A = 2^n$$

$$A_2 = - \frac{n}{1} 2^{n-2}$$

$$A_4 = + \frac{n}{2} (n-3) 2^{n-4}$$

$$A_6 = - \frac{n}{3} (n-4)_2 \, 2^{n-6}$$

$$A_8 = + \frac{n}{4} (n-5)_3 \, 2^{n-8} \text{ u. s. w.}$$

Man findet daher nach [I] und [III]

$$[x+\sqrt{(x^2-1)}]^n = (2x)^n - \frac{n}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2x)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2(2x)^{n-6} + \frac{n}{4}(n-5)_3(2x)^{n-8} - \ldots$$

wo n jede ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn kann.

Durchgängig $-n$ statt n gesetzt, giebt, wegen §. 29.

$$[x+\sqrt{(x^2-1)}]^{-n} = (2x)^{-n} + \frac{n}{1}(2x)^{-n-2} + \frac{n}{2}(n+3)(2x)^{-n-4} + \frac{n}{3}(n+5)_2(2x)^{-n-6}$$
$$+ \frac{n}{4}(n+7)_3(2x)^{-n-8} + \frac{n}{5}(n+9)_4(2x)^{-n-10} + \ldots\ldots$$

§. 201.

Man setze $x = \cos\varphi$, so wird $\sin\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$, daher
$\sin\varphi . \sqrt{-1} = \sqrt{(1-x^2)}\sqrt{-1} = \sqrt{(x^2-1)}$. Nun ist §. 147. ($I$)

$$\cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1} = [x+\sqrt{(x^2-1)}]^n$$
$$\cos n\varphi - \sin n\varphi . \sqrt{-1} = [x-\sqrt{(x^2-1)}]^n, \text{ also}$$
$$2\cos n\varphi = [x+\sqrt{(x^2-1)}]^n + [x-\sqrt{(x^2-1)}]^n, \text{ oder weil}$$
$$x - \sqrt{(x^2-1)} = \frac{1}{x+\sqrt{(x^2-1)}}, \text{ also}$$
$$[x-\sqrt{(x^2-1)}]^n = [x+\sqrt{(x^2-1)}]^{-n}, \text{ so wird auch}$$
$$2\cos n\varphi = [x+\sqrt{(x^2-1)}]^n + [x+\sqrt{(x^2-1)}]^{-n}.$$

Hierin nach §. 200. die entsprechenden Werthe und dann $\cos\varphi$ statt x gesetzt, findet man

$$(I)\ 2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - \frac{n}{1}(2\cos\varphi^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2\cos\varphi)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots$$
$$+ (2\cos\varphi)^{-n} + \frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{-n-2} + \frac{n}{2}(n+3)(2\cos\varphi)^{-n-4} + \frac{n}{3}(n+5)_2(2\cos\varphi)^{-n-6} + \ldots$$

Hievon die Ableitung genommen indem man φ als veränderlich annimmt und alsdann durch $-2n$ dividirt, giebt wegen $\partial\cos\varphi = -\sin\varphi$ und $\partial\cos n\varphi = -n\sin n\varphi$,

$$(II)\ \sin n\varphi = \sin\varphi[(2\cos\varphi)^{n-1} - (n-2)(2\cos\varphi)^{n-3} + (n-3)_2(2\cos\varphi)^{n-5} - (n-4)_3(2\cos\varphi)^{n-7} + \ldots]$$
$$- \sin\varphi[(2\cos\varphi)^{-n-1} + (n+2)(2\cos\varphi)^{-n-3} + (n+4)_2(2\cos\varphi)^{-n-5} + (n+6)_3(2\cos\varphi)^{-n-7} + \ldots\ldots].$$

In (I) und (II) nach einander 2, 3, 4, ... statt n gesetzt, giebt

$$\cos 2\varphi = 2\cos\varphi^2 - 1$$
$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi$$
$$\cos 4\varphi = 8\cos\varphi^4 - 8\cos\varphi^2 + 1$$
$$\cos 5\varphi = 16\cos\varphi^5 - 20\cos\varphi^3 + 5\cos\varphi$$
$$\cos 6\varphi = 32\cos\varphi^6 - 48\cos\varphi^4 + 18\cos\varphi^2 - 1$$
$$\cos 7\varphi = 64\cos\varphi^7 - 112\cos\varphi^5 + 56\cos\varphi^3 - 7\cos\varphi$$
. . . .

$$\sin 2\varphi = \sin\varphi . 2\cos\varphi$$
$$\sin 3\varphi = \sin\varphi(4\cos\varphi^2 - 1)$$
$$\sin 4\varphi = \sin\varphi(8\cos\varphi^3 - 4\cos\varphi)$$
$$\sin 5\varphi = \sin\varphi(16\cos\varphi^4 - 12\cos\varphi^2 + 1)$$
$$\sin 6\varphi = \sin\varphi(32\cos\varphi^5 - 32\cos\varphi^3 + 6\cos\varphi)$$
$$\sin 7\varphi = \sin\varphi(64\cos\varphi^6 - 80\cos\varphi^4 + 24\cos\varphi^2 - 1)$$
. . . .

§. 202.

Will man die maclaurinsche Reihe auf die Auflösung unentwickelter Funkzionen in Reihen anwenden, so ist zu bemerken, daß in der unentwickelten Funkzion $F(x;y) = 0$ der Werth von y eine Funkzion von x ist, und durch $y = fx$ bezeichnet werden kann. Hienach wird

$$\partial y = y' = f^1 x;\ \partial^2 y = y'' = f^2 x;\ \partial^3 y = y''' = f^3 x;\ \ldots\ldots$$

und weil man durch fortgesetzte Ableitung der Funkzion $F(x;y) = 0$ die Werthe $\partial y;\ \partial^2 y;\ \partial^3 y;\ldots$ finden kann, so sind dadurch auch die Werthe $f^1 x;\ f^2 x;\ f^3 x;$ bekannt, mit welchen man nach §. 196. verfährt.

1. Beispiel. Es ist die unentwickelte Funkzion $ay^3 - bxy + 1 = 0$ gegeben, man soll y nach den Potenzen von x entwickeln.

Hieraus erhält man für die auf einander folgenden Ableitungen:

$$3ay^2\partial y - bx\partial y - by = 0$$
$$6ay\partial y^2 + 3ay^2\partial^2 y - bx\partial^2 y - 2b\partial y = 0$$

u. s. w. Daher findet man, wenn $y = fx$ gesetzt wird

$$\partial y = f^1 x = \frac{by}{3ay^2 - bx}$$
$$\partial^2 y = f^2 x = \frac{2b\partial y - 6ay\partial y^2}{3ay^2 - bx}$$
$$\partial^3 y = f^3 x = \frac{3b\partial^2 y - 18ay\partial y\partial^2 y - 6a\partial y^3}{3ay^2 - bx}$$
$$\partial^4 y = f^4 x = \frac{4b\partial^3 y - 24ay\partial y\partial^3 y - 36a\partial y^2\partial^2 y - 18ay\partial^2 y^2}{3ay^2 - bx}$$

u. s. w.

Wegen $y = fx$ wird $y = f$ für $x = 0$ (§. 3.), daher wenn in der gegebenen Gleichung $x = 0$ gesetzt wird, so findet man $ay^3 + 1 = 0$, und hieraus y oder $f = \frac{-1}{\sqrt[3]{a}}$.

Diese Werthe $x = 0$ und $y = \frac{-1}{\sqrt[3]{a}}$ in die, für $f^1 x;\ f^2 x;\ f^3 x$ gefundenen Ausdrücke gesetzt, geben:

$$f^1 = \frac{-b}{3\sqrt[3]{a^2}};\ f^2 = 0;\ f^3 = \frac{2b^3}{27a\sqrt[3]{a}};\ f^4 = \frac{-8b^4}{81a\sqrt[3]{a^2}};$$

u. s. w. Nun ist §. 196.

$$y = fx = f + \frac{x}{1}f^1 + \frac{x^2}{2!}f^2 + \frac{x^3}{3!}f^3 + \ldots\ldots \text{ folglich}$$
$$y = \frac{-1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{b}{3\sqrt[3]{a^2}}x + \frac{b^3}{81a\sqrt[3]{a}}x^3 - \frac{b^4}{243a\sqrt[3]{a^2}}x^4 + \ldots\ldots$$

§. 203.

Statt aus der unentwickelten Gleichung $F(x;y) = 0$ den Werth von y durch eine Reihe darzustellen, welche nach den Potenzen von x fortschreitet, kann man durch ein ganz ähnliches Verfahren für y eine Reihe suchen, welche nach den Potenzen irgend einer beständigen Größe der gegebenen Gleichung fortschreitet, wenn man nur beim Entwickeln der Ableitungen, diese beständige Größe als unabhängig Veränderliche, alle übrige Größen aber, außer y, als beständig annimmt.

1. Bei=

1. **Beispiel.** Aus $ay^3 - bxy + 1 = o$ soll y nach den Potenzen von a entwickelt werden.

Man suche die auf einander folgenden Ableitungen dieser Funkzion, indem man a aber nicht x als unabhängig Veränderliche annimmt, so wird wegen $y = fa$ (§. 193.)

$$\frac{\partial y}{\partial a} = f^1 a = \frac{y^3}{bx - 3ay^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = f^2 a = \frac{6ay\partial y^2 + 6y^2\partial y}{bx - 3ay^2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial a^3} = f^3 a = \frac{18ay\partial y\partial^2 y + 9y^2\partial^2 y + 18y\partial y^2 + 6a\partial y^3}{bx - 3ay^2}; \text{ u. s. w.}$$

Für $a = o$ wird $-bxy + 1 = o$, also in diesem Falle $y = \frac{1}{bx}$, oder wegen $y = fa$ wird $f = \frac{1}{bx}$, und wenn man die Werthe $a = o$ und $y = \frac{1}{bx}$ in die vorstehende Gleichungen setzt, so wird

$$f^1 = \frac{1}{b^4x^4}; \; f^2 = \frac{6}{b^7x^7}; \; f^3 = \frac{72}{b^{10}x^{10}}; \text{ u. s. w. folglich}$$

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{1}{b^4x^4}a + \frac{3}{b^7x^7}a^2 + \frac{12}{b^{10}x^{10}}a^3 + \ldots\ldots$$

2. **Beispiel.** Aus $y^3 - 3axy + x^3 = o$ soll y nach den Potenzen von a entwickelt werden.

Wenn hier wieder die Ableitungen unter der Voraussetzung genommen werden, daß nur a und nicht x die unabhängig Veränderliche ist, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial a} = f^1 a = \frac{xy}{y^2 - ax};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = f^2 a = \frac{2x\partial y - 2y\partial y^2}{y^2 - ax};$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial a^3} = f^3 a = \frac{3x\partial^2 y - 6y\partial y\partial^2 y - 2\partial y^3}{y^2 - ax};$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial a^4} = f^4 a = \frac{4x\partial^3 y - 8y\partial y\partial^3 y - 6y\partial^2 y^2 - 12\partial y^2\partial^2 y}{y^2 - ax}; \text{ u. s. w.}$$

Für $a = o$ wird $y^3 + x^3 = o$, also $y = f = -x$, daher $f^1 = -1$; $f^2 = o$; $f^3 = \frac{2}{x^2}$; $f^4 = \frac{-8}{x^3}$; u. s. w. daher §. 196.

$$y = -x - a + \frac{1}{3x^2}a^3 - \frac{1}{3x^3}a^4 + \ldots\ldots$$

§. 204.

Erhält man aus der unentwickelten Gleichung $F(x;y) = o$ für die Ableitungen, wenn $x = o$ gesetzt, und danach y bestimmt ist, die unbestimmten Ausdrücke $\frac{o}{o}$, so könnte man zwar, nach §. 224., ihre Werthe finden; allein dies führt gewöhnlich auf weitläuftige Rechnungen, welche man vermeiden kann, wenn

$$y = x^r z$$

gesetzt und der Exponent r so bestimmt wird, daß die abgeleiteten Funktionen für $x = 0$ einen bestimmten Werth erhalten. Eben diese Verwandlung kann man anwenden, wenn die abgeleiteten Funktionen für $x = 0$ unendlich groß werden, weil für diesen Fall die maclaurinsche Reihe ihre Anwendbarkeit verliert.

Hat man daher aus $F(x; y) = 0$ die Gleichung $F(x; x^r z) = 0$ gebildet, und darin r den Bedingungen gemäß angenommen, so kann z nach einer Reihe, welche nach den Potenzen von x fortschreitet, entwickelt werden. Wenn alsdann statt z sein gleicher Werth $\frac{y}{x^r}$ eingeführt wird, so erhält man dadurch die gesuchte Entwickelung für y.

Bei der willkührlichen Annahme des Werths für r hat man, zur Erleichterung der Rechnung, vorzüglich dahin zu sehen, daß die Potenzen von x verschwinden, oder, wenn es seyn kann, einander gleich werden, wozu die folgenden Beispiele nähere Anleitung geben.

1. **Beispiel.** Aus $ay^3 - x^3 y - ax^3 = 0$ soll y nach den Potenzen von x entwickelt werden.

Für $x = 0$ wird $y = 0$, also

$$\partial y = \frac{3x^2 y + 3ax^2}{3ay^2 - x^3} = \frac{0}{0}.$$ Man setze daher $y = x^r z$, so wird

$ax^{3r} z^3 - x^{r+3} z - ax^3 = 0$, oder wenn man durch x^3 dividirt

$$ax^{3r-3} z^3 - x^r z - a = 0. \quad [I]$$

(*I*) Für $r = 1$ erhält man

$$az^3 - xz - a = 0,$$ auch wird $z = fx$, daher

$$\partial z = f^1 x = \frac{z}{3az^2 - x};$$

$$\partial^2 z = f^2 x = \frac{2\partial z - 6az\partial z^3}{3az^2 - x};$$

$$\partial^3 z = f^3 x = \frac{3\partial^2 z - 18az\partial z\partial^2 z - 6a\partial z^3}{3az^2 - x};$$

$$\partial^4 z = f^4 x = \frac{4\partial^3 z - 24az\partial z\partial^3 z - 36a\partial z^2\partial^2 z - 18az\partial^2 z^2}{3az^2 - x};$$ u. s. w.

Für $x = 0$ wird $az^3 - a = 0$, daher $z^3 = 1$, also $z = 1$ und die beiden übrigen Werthe sind unmöglich (§. 153.), daher wird z oder

$$f = 1;\ f^1 = \frac{1}{3a};\ f^2 = 0;\ f^3 = \frac{-2}{3^3 a^3};\ f^4 = \frac{8}{3^4 a^4};$$

u. s. w. also §. 196.

$$z = 1 + \frac{1}{3a} x - \frac{1}{3^4 a^3} x^3 + \frac{1}{3^5 a^4} x^4 + \ldots\ldots$$

Wegen $r = 1$ ist $y = xz$ also $z = \frac{y}{x}$ folglich

$$y = x + \frac{1}{3a} x^2 - \frac{1}{3^4 a^3} x^4 + \frac{1}{3^5 a^4} x^5 + \ldots\ldots$$

(*II*) Wenn hingegen $r = 0$ gesetzt wird, so findet man aus [*I*].

$$ax^{-3} z^3 - z - a = 0.$$

Setzt man, um die Rechnung mit negativen Exponenten zu vermeiden, $x^{-3} = u$, weil nach

vollendeter Rechnung x wieder eingeführt werden kann, so erhält man

$$auz^3 - z - a = 0,$$

daher wird, wegen $z = fu$, wenn u als unabhängig veränderlich genommen wird,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f^1 u = \frac{az^3}{1 - 3auz^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = f^2 u = \frac{6az^2 \partial z + 6auz \partial z^2}{1 - 3auz^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = f^3 u = \frac{9az^2 \partial^2 z + 18auz \partial z \partial^2 z + 18az \partial z^2 + 6au \partial z^3}{1 - 3auz^2};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = f^4 u = \frac{12az^2 \partial^3 z + 24auz \partial z \partial^3 z + 72az \partial z \partial^2 z + 36au \partial z^2 \partial^2 z + 24a \partial z^3}{1 - 3auz^2}; \text{ u. s. w.}$$

Für $u = 0$ wird $z = f = -a$, daher

$$f^1 = -a^4;\ f^2 = -6a^7;\ f^3 = -72a^{10};\ f^4 = -1320a^{13};\ \text{u. s. w.}$$

also $z = -a - a^4 u - 6a^7 \frac{u^2}{2} - 72a^{10} \frac{u^3}{3!} - 1320a^{13} \frac{u^4}{4!} - \ldots\ldots$ oder man erhält weil $u = x^{-3}$ und $y = x^0 z = z$, wegen $r = 0$ ist,

$$y = -\left[a + \frac{a^4}{x^3} + \frac{3a^7}{x^6} + \frac{12a^{10}}{x^9} + \frac{55a^{13}}{x^{12}} + \ldots\ldots\right]$$

(III) Für $r = \frac{1}{2}$ wird aus [I], $ax^{\frac{3}{2}} z^3 - x^{\frac{1}{2}} z - a = 0$, oder durch $x^{\frac{3}{2}}$ dividirt

$$az^3 - z - ax^{-\frac{3}{2}} = 0$$

und wenn man $x^{-\frac{3}{2}} = u$ setzt, $az^3 - z - au = 0$, daher, wegen $z = fu$,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f^1 u = \frac{-a}{1 - 3az^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = f^2 u = \frac{6az \partial z^2}{1 - 3az^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = f^3 u = \frac{18az \partial z \partial^2 z + 6a \partial z^3}{1 - 3az^2};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = f^4 u = \frac{24az \partial z \partial^3 z + 36a \partial z^2 \partial^2 z + 18az \partial^2 z^2}{1 - 3az^2}; \text{ u. s. w.}$$

Für $u = 0$ wird $az^3 - z = 0$ oder $(az^2 - 1)z = 0$, also $z = 0$ und $z = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Für $z = 0$ erhält man die bei (II) bereits gefundene Reihe.

Für $z = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$ wird $f = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$; $f^1 = \frac{a}{2}$; $f^2 = \mp \frac{3a^3}{4\sqrt{a}}$; $f^3 = 3a^4$; $f^4 = \mp \frac{315a^6}{2^4 \sqrt{a}}$; u. s. w. also §. 196.

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{a}{2} u \mp \frac{3a^3}{4\sqrt{a}} \frac{u^2}{2} + 3a^4 \frac{u^3}{3!} \mp \frac{315a^6}{16\sqrt{a}} \frac{u^4}{4!} + \ldots.$$

oder man erhält, weil $u = x^{-\frac{3}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{2}} z$, also $z = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$, wegen $r = \frac{1}{2}$ ist,

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{a}{2} \mp \frac{3a^3}{8x\sqrt{ax}} + \frac{a^4}{2x^3} \mp \frac{105a^6}{128x^4\sqrt{ax}} + \ldots.$$

2. **Beispiel.** Aus $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ soll y nach den Potenzen von x entwickelt werden.

Für $x = 0$ wird $y = 0$, also

$$\partial y = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{0}{0}.$$ Man setze daher $y = x^r z$, so wird

$$x^{3r} z^3 - 3a x^{r+1} z + x^3 = 0, \text{ oder durch } x^3 \text{ dividirt:}$$

$$x^{3r-3} z^3 - 3a x^{r-2} z + 1 = 0. \quad [I]$$

(*I*) Für $r = 1$ erhält man $z^3 - 3ax^{-1}z + 1 = 0$, oder es wird, wenn man zur Vermeidung der Rechnung mit negativen Exponenten $x^{-1} = u$ setzt,

$$z^3 - 3auz + 1 = 0, \text{ daher, wegen } z = fu,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f^1 u = \frac{az}{z^2 - au};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = f^2 u = \frac{2a\partial z - 2z\partial z^2}{z^2 - au};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = f^3 u = \frac{3a\partial^2 z - 6z\partial z\partial^2 z - 2\partial z^3}{z^2 - au};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = f^4 u = \frac{4a\partial^3 z - 8z\partial z\partial^3 z - 12\partial z^2\partial^2 z - 6z\partial^2 z^2}{z^2 - au}; \text{ u. s. w.}$$

Für $u = 0$ wird $z^3 + 1 = 0$, also $z = f = \sqrt[3]{-1} = -1$, wo die beiden übrigen Werthe unmöglich sind, daher $f^1 = -a$; $f^2 = 0$; $f^3 = 2a^3$; $f^4 = -8a^4$; u. s. w. also §. 196.

$$z = -1 - au + 2a^3 \frac{u^3}{3!} - 8a^4 \frac{u^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Nun ist $u = x^{-1} = \frac{1}{x}$ und $y = xz$, also $z = \frac{y}{x}$, wegen $r = 1$, daher

$$y = -x - a + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^4}{3x^3} + \ldots\ldots$$

welches die §. 203. schon gefundene Reihe ist.

(*II*) Für $r = 2$ in [*I*] wird $x^3 z^3 - 3az + 1 = 0$, oder, wenn man zur Abkürzung $x^3 = u$ setzt,

$$uz^3 - 3az + 1 = 0, \text{ daher, wegen } z = fu,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f^1 u = \frac{z^3}{3(a - uz^2)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = f^2 u = \frac{2z^2\partial z + 2uz\partial z^2}{a - uz^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = f^3 u = \frac{3z^2\partial^2 z + 6uz\partial z\partial^2 z + 6z\partial z^2 + 2u\partial z^3}{a - uz^2};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = f^4 u = \frac{4z^2\partial^3 z + 8uz\partial z\partial^3 z + 24z\partial z\partial^2 z + 6uz\partial^2 z^2 + 12u\partial z^2\partial^2 z + 8\partial z^3}{a - uz^2}; \text{ u. s. w.}$$

Für $u = 0$ wird $z = f = \frac{1}{3a}$, daher

$$f^1 = \frac{1}{3^4 a^4};\ f^2 = \frac{2}{3^6 a^7};\ f^3 = \frac{8}{3^8 a^{10}};\ f^4 = \frac{440}{3^{12} a^{13}}; \text{ u. s. w. daher}$$

$$z = \frac{1}{3a} + \frac{1}{3^4 a^4} u + \frac{2}{3^6 a^7} \frac{u^2}{2!} + \frac{8}{3^8 a^{10}} \frac{u^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Nun ist $u = x^3$ und $y = x^2 z$ also $z = \frac{y}{x^2}$, wegen $r = 2$, folglich

$$y = \frac{x^2}{3a} + \frac{x^5}{3^4 a^4} + \frac{x^8}{3^6 a^7} + \frac{4x^{11}}{3^9 a^{10}} + \frac{55x^{14}}{3^{13} a^{13}} + \dots\dots$$

(*III*) Für $r = \frac{1}{2}$ in [*I*] wird $x^{-\frac{3}{2}} z^3 - 3ax^{-\frac{3}{2}} z + 1 = 0$, oder mit $x^{\frac{3}{2}}$ multiplizirt, $z^3 - 3az + x^{\frac{3}{2}} = 0$, und wenn man $x^{\frac{3}{2}} = u$ setzt

$$z^3 - 3az + u = 0, \text{ daher}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f^1 u = \frac{1}{3a - 3z^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = f^2 u = \frac{2z\partial z^2}{a - z^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = f^3 u = \frac{6z\partial z \partial^2 z + 2\partial z^3}{a - z^2};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = f^4 u = \frac{8z\partial z \partial^3 z + 12\partial z^2 \partial^2 z + 6z\partial^2 z^2}{a - z^2};$$

$$\frac{\partial^5 z}{\partial u^5} = f^5 u = \frac{10z\partial z \partial^4 z + 20\partial z^2 \partial^3 z + 20z\partial^2 z \partial^3 z + 30\partial z \partial^2 z^2}{a - z^2}; \text{ u. s. w.}$$

Für $u = 0$ wird $z^3 - 3az = 0$, oder $(z^2 - 3a).z = 0$, also $z = 0$ und $z = \pm\sqrt{3a}$.

Setzt man $z = 0$, so findet man die Reihe nach (*II*).

Für $z = \pm\sqrt{3a}$ erhält man

$$f^1 = \frac{-1}{6a}; \; f^2 = \mp \frac{\sqrt{3a}}{36a^3}; \; f^3 = \frac{-1}{3^3 a^4}; \; f^4 = \mp \frac{35\sqrt{3a}}{1296a^6}; \; f^5 = \frac{-20}{243a^7}; \text{ u. s. w.}$$

daher §. 196.

$$z = \pm\sqrt{3a} - \frac{1}{6a} u \mp \frac{\sqrt{3a}}{36a^3}\frac{u^2}{2!} - \frac{1}{3^3 a^4}\frac{u^3}{3!} \mp \frac{35\sqrt{3a}}{1296a^6}\frac{u^4}{4!} - \dots\dots$$

Nun ist $u = x^{\frac{3}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{2}} z$ also $z = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$, wegen $r = \frac{1}{2}$, daher

$$y = \pm\sqrt{3ax} - \frac{1}{6a} x^2 \mp \frac{\sqrt{3ax}}{72a^3} x^3 - \frac{1}{2.3^4 a^4} x^5 \mp \dots$$

Unter welchen Bedingungen die hier entwickelten Reihen brauchbar sind, wird im sechszehnten Kapitel aus einander gesetzt.

§. 205.

Es ist noch der Fall zu untersuchen, in welchem die taylorsche Reihe nicht zureicht die Entwickelung einer Funkzion zu bestimmen. Dieser Fall kann eintreten, wenn man der veränderlichen Größe x in der Entwickelung einen bestimmten Werth beilegt. Schon der binomische Lehrsatz giebt zu dergleichen Betrachtungen Veranlassung. So ist (§. 31.) ganz allgemein:

$$\sqrt{(x+h)} = \sqrt{x}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{h}{x} - \frac{1}{8}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{16}\frac{h^3}{x^3} - \frac{5}{128}\frac{h^4}{x^4} + \dots\dots\right]$$

Giebt man aber x einen bestimmten Werth, so kann diese Entwickelung ihre Brauchbarkeit verlieren, welches der Fall ist, wenn man $x = 0$ setzt; alsdann wird:

$$\sqrt{h} = 0\,[1 + \infty - \infty + \infty - \infty + \dots\dots]$$

wodurch sich nichts bestimmen läßt.

Aehnliche Fälle können bei der taylorschen Reihe eintreten, wenn die veränderliche Größe x irgend einen bestimmten Werth, etwa $= a$ erhält. Denn weil diese Reihe nach den ganzen Po-

tenzen von h fortschreitet und in dem übrigen Theile ihrer Glieder keine Werthe vorkommen, welche negative oder gebrochene Exponenten vom Zuwachs h enthalten, so kann dadurch, daß man $x = a$ setzt, in $f(x + h)$ eine gebrochene oder negative Potenz von h entstehen, welche alsdann in der Entwickelung fehlt, weshalb diese nicht zureicht und unbestimmt bleibt. Wäre z. B. in fx ein Ausdruck wie $\sqrt{(x - a)}$ enthalten, so wird sich in $f(x+h)$ dieser Ausdruck in $\sqrt{(x+h-a)}$ verwandeln, und die gefundene Entwickelung wird noch dem allgemeinen Ausdruck $f(x + h)$ entsprechen. Erhält aber nun x den bestimmten Werth a, so verwandelt sich $\sqrt{(x + h - a)}$ in $\sqrt{h} = h^{\frac{1}{2}}$, weshalb auch in der Entwickelung dieses Glied vorkommen sollte. Die taylorsche Reihe verliert alsdann ihre Anwendbarkeit, weil sie nur nach den ganzen Potenzen von h fortschreitet, und sie muß in solchen Fällen auf Ausdrücke führen, welche unbrauchbar und unbestimmt sind. In diesen Fällen kann man aber durch andere Mittel die gesuchte Entwickelung erhalten, wohin besonders gehört, daß man, wenn dergleichen unbestimmte Ausdrücke entstehen,

(*I*) statt die Funkzion $f(x + h)$ nach der taylorschen Reihe zu entwickeln, sogleich $x + h$ statt x in fx setzt, oder

(*II*) daß man in der Reihe

$$f(x + h) = fx + hf^1x + \tfrac{1}{2}h^2f^2x + \tfrac{1}{6}h^3f^3x + \ldots\ldots$$

x mit h verwechselt, also die Entwickelung nach

$$f(h + x) = fh + xf^1h + \tfrac{1}{2}x^2f^2h + \tfrac{1}{6}x^3f^3h + \ldots\ldots$$

bewirkt.

In den folgenden Beispielen sind die Entwickelungen, der einfachern Ausdrücke wegen, nach der vorstehenden ersten Methode bewirkt.

1. Beispiel. Es ist $fx = \sqrt{(x - a)}$ gegeben, man verlangt die Entwickelung von $f(x + h)$ für den Fall, daß $x = a$ wird.

Aus $fx = (x - a)^{\frac{1}{2}}$ findet man

$$f^1x = \tfrac{1}{2}(x - a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^2x = -\tfrac{1}{4}(x - a)^{-\frac{3}{2}}$$

. . . . daher nach §. 194.

$$f(x + h) = \sqrt{(x - a)} + \frac{h}{2\sqrt{(x - a)}} - \frac{h^2}{8\sqrt{(x - a)^3}} + \ldots\ldots$$

Für $x = a$ erhält man

$$f(a + h) = 0 + \infty - \infty + \ldots\ldots$$

welcher Ausdruck unbrauchbar und unbestimmt ist. Allein wenn man nach (*I*) in $fx = \sqrt{(x - a)}$ sogleich $a + h$ statt x setzt, so wird

$$f(a + h) = \sqrt{h}.$$

2. Beispiel. Es ist $fx = a + x^{\frac{3}{2}} + (x - b)\ (x - c)^{\frac{5}{2}}$ gegeben, man soll $f(x + h)$ für $x = c$ finden.

Hier wird:

$$f^1 x = \tfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + (x - c)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{2}(x - b)(x - c)^{\frac{3}{2}}$$
$$f^2 x = \tfrac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} + 5(x - c)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{15}{4}(x - b)(x - c)^{\frac{1}{2}}$$
$$f^3 x = -\tfrac{3}{8} x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{45}{4}(x - c)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{15}{8} \frac{x - b}{\sqrt{(x - c)}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und man sieht ein, daß alle folgende abgeleitete Funkzionen für $x = c$, unendlich groß werden.

Setzt man aber $c + h$ statt x in fx, so erhält man

$$f(c + h) = a + (c + h)^{\frac{3}{2}} + (c - b) h^{\frac{5}{2}} + h^{\frac{7}{2}},$$

wo man noch $(c + h)^{\frac{3}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln kann.

§. 206.

Zur Beurtheilung des Fehlers, welcher entsteht, wenn die taylorsche Reihe bei irgend einem ihrer Glieder abbricht, setze man, wenn φ das Funkzionenzeichen bedeutet

$$\varphi x = \frac{fk - fx}{k - x}$$

wo k eine beständige Größe bedeutet und fk aus fx entsteht, wenn man k statt x in fx setzt.

Aus $fk - fx = (k - x)\varphi x$ wird

$$fx - fk = x\varphi x - k\varphi x, \text{ daher}$$
$$f^1 x = x\varphi^1 x + \varphi x - k\varphi^1 x$$
$$f^2 x = x\varphi^2 x + 2\varphi^1 x - k\varphi^2 x$$
$$f^3 x = x\varphi^3 x + 3\varphi^2 x - k\varphi^3 x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^n x = x\varphi^n x + n\varphi^{n-1} x - k\varphi^n x.$$

Hieraus findet man

$$\varphi x = f^1 x + (k - x)\varphi^1 x$$
$$\varphi^1 x = \tfrac{1}{2} f^2 x + \tfrac{1}{2}(k - x)\varphi^2 x$$
$$\varphi^2 x = \tfrac{1}{3} f^3 x + \tfrac{1}{3}(k - x)\varphi^3 x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^n x = \frac{1}{n+1} f^{n+1} x + \frac{1}{n+1}(k - x)\varphi^{n+1} x.$$

Es ist aber

$$fk = fx + (k - x)\varphi x$$
$$fk = fx + (k - x) f^1 x + (k - x)^2 \varphi^1 x$$
$$fk = fx + (k - x) f^1 x + \frac{(k - x)^2}{2} f^2 x + \frac{(k - x)^3}{2} \varphi^2 x$$
$$fk = fx + (k - x) f^1 x + \frac{(k - x)^2}{2} f^2 x + \frac{(k - x)^3}{2.3} f^3 x + \frac{(k - x)^4}{2.3} \varphi^3 x$$

und wenn man auf diese Art weiter geht

$$fk = fx + \frac{k - x}{1} f^1 x + \frac{(k - x)^2}{2!} f^2 x + \frac{(k - x)^3}{3!} f^3 x + \frac{(k - x)^4}{4!} f^4 x + \ldots + \frac{(k - x)^n}{n!} f^n x + \frac{(k - x)^{n+1}}{n!} \varphi^n x$$

wo die Reihe mit dem Gliede $\frac{(k - x)^{n+1}}{n!} \varphi^n x$ abbricht.

Hierin $x + h$ statt k gesetzt, giebt

$$(I)\ f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{3!} f^3 x + \frac{h^4}{4!} f^4 x + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n x + \frac{h^{n+1}}{n!} \varphi^n x,$$

wo $\varphi x = \frac{fk - fx}{k - x}$ ist, k aber eine beständige Größe bezeichnet. Mit Hülfe der gegebenen Funkzion fx läßt sich hieraus $\varphi^n x$ finden, und wenn man alsdann in dem für $\varphi^n x$ gefundenen Ausdruck $x + h$ statt k setzt, so wird $\varphi^n x$ lediglich eine Funkzion von x und h.

Mittelst des vorstehenden Ausdrucks kann man die taylorsche Reihe bei irgend einem Gliede, hier bei dem $n + 1$sten abbrechen, so giebt das folgende Glied $\frac{h^{n+1}}{n!} \varphi^n x$ die Summe aller derjenigen Glieder, welche in dieser Reihe fehlen, weshalb $\frac{h^{n+1}}{n!} \varphi^n x$ die **Ergänzung der Reihe** heißt.

1. **Beispiel.** In $fx = \frac{x^2 - a^2}{x}$ wachse x um h; man sucht die Entwickelung unter der Bedingung, daß die Reihe beim dritten Gliede abbricht. Hier ist

$$f(x + h) = fx + \frac{h}{1} f^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{2!} \varphi^2 x$$

wo $\varphi x = \frac{fk - fx}{k - x}$ ist.

Aber $fx = \frac{x^2 - a^2}{x} = x - a^2 x^{-1}$, also

$$f^1 x = 1 + a^2 x^{-2} \text{ und } f^2 x = -2a^2 x^{-3}.$$

Ferner $\varphi x = \frac{k - a^2 k^{-1} - x + a^2 x^{-1}}{k - x} = 1 + \frac{a^2}{kx}$

$\varphi^1 x = -\frac{a^2}{kx^2}$; $\varphi^2 x = \frac{2a^2}{kx^3}$, daher die Ergänzung oder die Summe der fehlenden Glieder $\frac{h^3}{2} \varphi^2 x = \frac{h^3}{2} \frac{2a^2}{kx^3}$. Hierin $k = x + h$ gesetzt, giebt

$$\frac{h^3}{2} \varphi^2 x = \frac{2a^2 h^3}{2(x+h)x^3}, \text{ folglich}$$

$$f(x + h) = \frac{x^2 - a^2}{x} + \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) h - \frac{a^2}{x^3} h^2 + \frac{a^2}{(x + h)x^3} h^3.$$

2. **Beispiel.** In dem Ausdruck $fx = \sqrt{x}$ wachse x um h, so wird hier, wenn man die veränderte Funkzion in eine Reihe verwandeln soll, welche bei dem dritten Gliede abbricht,

$$f(x + h) = fx + hf^1 x + \frac{h^2}{2} f^2 x + \frac{h^3}{2} \varphi^2 x \text{ und}$$

$$fx = x^{\frac{1}{2}};\ f^1 x = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}};\ f^2 x = -\tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ferner $\varphi x = \frac{fk - fx}{k - x} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{x}}{k - x} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{x}}$, daher

$\varphi^1 x = \frac{-1}{2\sqrt{x}.(\sqrt{k} + \sqrt{x})^2}$ und $\varphi^2 x = \frac{\sqrt{k} + 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}.(\sqrt{k} + \sqrt{x})^3}$, also, wegen $k = x + h$,

$$\frac{h^3}{2} \varphi^2 x = \frac{h^3}{2} \cdot \frac{\sqrt{(x + h)} + 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}[\sqrt{(x + h)} + \sqrt{x}]^3}, \text{ folglich}$$

$$\sqrt{(x + h)} = \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}} - \frac{h^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x} + \sqrt{(x + h)}}{8x\sqrt{x}.[\sqrt{x} + \sqrt{(x + h)}]^3} h^3.$$

§. 207.

§. 207.

Zusatz. Sehr oft führt das hier gezeigte Verfahren auf sehr weitläuftige Ausdrücke für $\varphi^n x$. In dergleichen Fällen muß man sich damit begnügen die Grenzen anzugeben, innerhalb deren der Werth der Ergänzung fällt, welches den Gegenstand der folgenden §. §. ausmacht.

§. 208.

Bezeichnet fx jede Funkzion von x, so wird

$$f(x+b) - fx = bf^1x + \tfrac{1}{2}b^2f^2x + \tfrac{1}{6}b^3f^3x + \dots \; [I].$$

Ist kein Glied dieser Reihe unendlich und f^1x positiv, so kann man b so klein annehmen daß $f^1x > \frac{1}{2}bf^2x + \frac{1}{6}b^2f^3x + \dots$ wird. Denn für $b = o$ ist dieser Satz einleuchtend, daher muß es für b einen so kleinen Werth geben, welcher der Annahme entspricht. Dies läßt sich eben so für das zweite und die folgenden Glieder beweisen.

Wäre nun f^1x positiv, so ist, wenn b klein genug angenommen wird, die Summe der Reihe [I] positiv, also auch der Ausdruck $f(x+b) - fx$. Unter der beizubehaltenden Voraussetzung, daß b hinlänglich klein angenommen werde, setze man a; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; ... statt x, so gelten noch die vorigen Schlüsse, weil x jeden Werth erhalten kann; ist daher die abgeleitete Funkzion

f^1a	positiv, so muß	$f(a+b) - fa$
$f^1(a+b)$	= = =	$f(a+2b) - f(a+b)$
$f^1(a+2b)$	= = =	$f(a+3b) - f(a+2b)$
$f^1(a+3b)$	= = =	$f(a+4b) - f(a+3b)$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
$f^1(a+nb-b)$	= = =	$f(a+nb) - f(a+nb-b)$

ebenfalls positiv seyn.

Setzt man voraus, daß $fx = o$ für $x = a$, also $fa = o$ sey, so wird hienach

$f(a+b)$ positiv, wenn f^1a positiv ist;

$f(a+2b)$ positiv, wenn f^1a und $f^1(a+b)$ positiv ist;

$f(a+3b)$ positiv, wenn f^1a, $f^1(a+b)$ und $f^1(a+2b)$ positiv ist, und überhaupt $f(a+b)$ bis $f(a+nb)$ positiv, wenn f^1a bis $f^1(a+nb-b)$, oder um so mehr, wenn f^1a bis $f^1(a+nb)$ positiv ist.

Wäre f^1a bis $f^1(a+nb)$ mit allen Zwischenwerthen negativ, so wird aus gleichen Gründen auch $f(a+b)$ bis $f(a+nb)$ negativ. Wenn hingegen b negativ und f^1a bis $f^1(a-nb)$ positiv ist, so wird die Summe der Reihe [I] negativ, also $f(a-b)$ bis $f(a-nb)$ negativ. Ist aber b und f^1a bis $f^1(a-nb)$ negativ, so wird auf gleiche Weise $f(a-b)$ bis $f(a-nb)$ negativ.

Man setze $nb = h$, wo h jede Größe bedeutet, weil, so klein auch b seyn mag, doch n so groß als man will angenommen werden kann, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß wenn f^1x für $x = a$ bis $x = a + h$ mit allen Zwischenwerthen positiv bleibt und keiner derselben unendlich ist, so muß auch fx für $x = a$ bis $x = a + h$ dasselbe Zeichen haben, wenn

$fa = 0$ ist. Eben dies gilt, wenn $f^1 x$ negativ wird. Wäre hingegen h negativ und $f^1 x$ positiv, so muß fx positiv werden und umgekehrt.

Werden diese Fälle zusammen gefaßt, so entsteht folgender allgemeiner Satz:

Wenn sich die ursprüngliche Funkzion fx für $x = a$ in Null verwandelt, und die erste abgeleitete Funkzion oder $f^1 x$ von $x = a$ bis $x = a + h$, für alle Zwischenwerthe, einerlei Zeichen behält und nicht unendlich wird, so hat die ursprüngliche Funkzion fx, für $x = a$ bis $x = a + h$ dasselbe Zeichen wie $f^1 x$, wenn h positiv ist, und das entgegengesetzte, wenn h negativ ist.

Weil a eine willkührliche Größe ist, so gilt der vorstehende Satz auch noch, wenn $a = 0$ wird, woraus folgende Regel entsteht:

Wenn sich die ursprüngliche Funkzion fx für $x = 0$ in Null verwandelt und die erste abgeleitete Funkzion von $x = 0$ bis $x = h$, für alle Zwischenwerthe, einerlei Zeichen behält und nicht unendlich wird, so hat fx für $x = 0$ bis $x = h$ dasselbe Zeichen wie $f^1 x$, wenn h positiv ist, und das entgegengesetzte, wenn h negativ ist.

§. 209.

Es ist $f(x + h) - fx = h\,(f^1 x + \frac{1}{2} h f^2 x + \frac{1}{6} h^2 f^3 x + \ldots)$.

Man setze daß innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = a + h$,

$$f^1 x + \tfrac{1}{2} h f^2 x + \tfrac{1}{6} h^2 f^3 x + \ldots \left\{\begin{matrix} > m \\ < M \end{matrix}\right\} \text{ werde,}$$

wo m und M beständige Größen sind, zwischen welchen der Werth der Reihe enthalten ist, so wird hienach für $x = a$,

$$f(a + h) - fa > mh, \text{ und } f(a + h) - fa < Mh$$

für alle Werthe von h; oder auch

$$f(a + h) - fa - mh > 0, \text{ und } Mh - f(a + h) + fa > 0,$$

daher sind beide Ausdrücke positiv, und man findet wenn man die erste Ableitung von denselben so nimmt daß h als veränderlich angenommen wird,

$$f^1 (a + h) - m, \text{ und } M - f^1 (a + h),$$

welche beide Ausdrücke (§. 208.) ebenfalls positiv seyn müssen, weil die ursprünglichen Funkzionen positiv sind, und für $h = 0$ verschwinden. Es ist daher

$$f^1 (a + h) > m, \text{ und } f^1 (a + h) < M, \text{ also}$$

m kleiner als der kleinste Werth von $f^1 (a + h)$, und M größer als der größte Werth von $f^1 (a + h)$, daher muß $f^1 x + \frac{1}{2} h f^2 x + \ldots$ zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $f^1 (a + h)$ enthalten seyn.

Eben so setze man, daß innerhalb $x = a$ bis $x = a + h$

$$f^2 x + \frac{h}{3} f^3 x + \frac{h^2}{3.4} f^4 x + \ldots \left\{\begin{matrix} > m \\ < M \end{matrix}\right\} \text{ werde, so ist}$$

$$f(a + h) - fa - hf^1 a > \frac{mh^2}{1.2} \text{ und } < \frac{Mh^2}{1.2}, \text{ oder auch}$$

$$f(a+h) - fa - hf^1 a - \frac{mh^2}{1.2} > 0, \text{ und}$$
$$\frac{Mh^2}{1.2} - f(a+h) + fa + hf^1 a > 0,$$

also beide Ausdrücke positiv, daher erhält man wenn h als veränderlich angenommen und die beiden auf einander folgenden Ableitungen genommen werden,

$$f^1(a+h) - f^1 a - mh \text{ und } Mh - f^1(a+h) + f^1 a;$$
$$f^2(a+h) - m; \qquad M - f^2(a+h).$$

Es ist daher diese erste abgeleitete Funkzion ebenfalls positiv (§. 208.), und weil auch diese für $h = 0$ verschwindet, so ist auch die zweite abgeleitete Funkzion positiv, also

$$f^2(a+h) > m \text{ und } f^2(a+h) < M, \text{ oder}$$

m kleiner als der kleinste Werth von $f^2(a+h)$, und M größer als der größte Werth von $f^2(a+h)$, daher muß $f^2 x + \frac{h}{3} f^3 x + \ldots$ zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $f^2(a+h)$ enthalten seyn.

Geht man auf eben diese Art weiter und setzt:

$$f^3 x + \frac{h}{4} f^4 x + \frac{h}{4.5} f^5 x + \ldots \begin{Bmatrix} > m \\ < M \end{Bmatrix}, \text{ so wird}$$

$$f(a+h) - fa - hf^1 a - \frac{h^2}{1.2} f^2 a - \frac{mh^3}{1.2.3} > 0, \text{ und}$$
$$\frac{Mh^3}{1.2.3} - f(a+h) + fa + hf^1 a + \frac{h^2}{1.2} f^2 a > 0,$$

Von beiden Ausdrücken dreimal hinter einander die Ableitungen genommen, giebt:

$$f^1(a+h) - f^1 a - hf^2 a - \frac{mh^2}{2}, \text{ und } \frac{Mh^2}{2} - f^1(a+h) + f^1 a + hf^2 a;$$
$$f^2(a+h) - f^2 a - mh; \qquad Mh - f^2(a+h) + f^2 a;$$
$$f^3(a+h) - m; \qquad M - f^3(a+h).$$

Hieraus folgt wie vorhin, daß die Reihe $f^3 x + \frac{h}{4} f^4 x + \ldots$ zwischen dem größten und kleinsten Werth enthalten ist, welchen $f^3(a+h)$ unter allen denjenigen annimmt, die von $h = 0$ bis zu h enthalten sind. Für $h = P$ sey $f^3(a+P)$ der größte, und für $h = p$ werde $f^3(a+p)$ der kleinste Werth von $f^3(a+h)$, so muß $f(a+h)$ zwischen den beiden Ausdrücken

$$fa + hf^1 a + \frac{h^2}{2} f^2 a + \frac{h^3}{2.3} f^3(a+p), \text{ und}$$
$$fa + hf^1 a + \frac{h^2}{2} f^2 a + \frac{h^3}{2.3} f^3(a+P)$$

enthalten seyn. Es muß daher zwischen $f^3(a+p)$ und $f^3(a+P)$ irgend einen Werth $f^3(a+q)$ geben, für welchen genau

$$f(a+h) = fa + hf^1 a + \frac{h^2}{2} f^2 a + \frac{h^3}{2.3} f^3(a+q) \text{ ist, oder man erhält auch, weil } a \text{ jeden Werth annehmen kann,}$$

$$f(x+h) = fx + hf^1 x + \frac{h^2}{2} f^2 x + \frac{h^3}{2.3} f^3(x+q).$$

Ganz ähnliche Resultate entstehen, wenn h nicht positiv sondern negativ vorausgesetzt wird.

Geht man auf diese Art weiter, so findet man ganz allgemein aus der Entwickelung

$$f(x+h) = fx + hf^1x + \frac{h}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}x + \ldots$$

wenn die Reihe beim $n+1$sten Gliede abbrechen soll, daß der wahre Werth derselben zwischen den Ausdrücken

$$fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+p), \text{ und}$$

$$fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+P)$$

enthalten ist, wo $f^{n+1}(x+p)$ den kleinsten, und $f^{n+1}(x+P)$ den größten Werth bezeichnet, welchen $f^{n+1}(x+h)$ für alle zwischen o und h gelegene Werthe erhält.

Hieraus folgt, daß, wenn man mit der taylorschen Reihe bei irgend einem Gliede abbrechen will, sich für die Ergänzung der Reihe, oder für die Summe derjenigen Glieder, welche man weggelassen hat, zwei Ausdrücke angeben lassen, wovon der eine größer und der andere kleiner als die Summe der fehlenden Glieder ist.

Den vorstehenden wichtigen Satz welcher zur Bestimmung der Grenze des Werths einer Entwickelung dient, wenn die taylorsche Reihe bei irgend einem Gliede abbricht, hat zuerst Lagrange bekannt gemacht. M. s.

J. L. Lagrange, Theorie der analytischen Funkzionen. Neue Aufl. übersetzt von D. A. L. Crelle. Berlin 1823. *I.* Theil, 6. Abschnitt; und

dessen Vorlesungen über die Funkzionen-Rechnung. Neue Aufl. übers. von Crelle. Berlin 1823. *IX.* Vorlesung.

§. 210.

Aufgabe. Wenn die taylorsche Reihe bei irgend einem Gliede abgebrochen wird, einen Näherungsausdruck für die fehlenden Glieder und zugleich die Grenzen des Fehlers anzugeben.

Auflösung. Nach §. 209. war

$$f(x+h) < fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+P)$$

$$f(x+h) > fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+p)$$

wo $f^{n+1}(x+P)$ den größten, und $f^{n+1}(x+p)$ den kleinsten Werth bezeichnet, welchen $f^{n+1}(x+h)$ für alle zwischen o und h gelegene Werthe erhält.

Bezeichnet R die Ergänzung, oder die Summe der fehlenden Glieder, wenn die Reihe für $f(x+h)$ beim $n+1$ten Gliede abgebrochen wird, so ist

$$R < \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+P), \text{ und}$$

$$R > \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+p), \text{ daher nach §. 17. } (II) \text{ der Näherungswerth}$$

$$(I)\; R^x = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{f^{n+1}(x+P) + f^{n+1}(x+p)}{2}$$

und der größtmögliche Fehler

$$(II) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{f^{n+1}(x+P) - f^{n+1}(x+p)}{2}$$

folglich beinahe

$$(III)\ f(x+h) = fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \frac{h^4}{4!}f^4x + \dots$$

$$\dots + \frac{h^n}{n!}f^nx + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{f^{n+1}(x+P) + f^{n+1}(x+p)}{2};$$

wo $f^{n+1}(x+P)$ den größten, und $f^{n+1}(x+p)$ den kleinsten Werth bezeichnet, welchen $f^{n+1}(x+h)$ zwischen $h = 0$ und h erhalten kann.

Wäre $f^{n+1}(x+P) + f^{n+1}(x+p) = 0$, so wird $R^1 = 0$ und (§. 17. *II.*) der größtmögliche Fehler

$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{n+1}(x+P).$$

1. **Beispiel.** Es sey $fx = x^r$, wo r jede mögliche Zahl bedeuten kann. Soll die Reihe für $f(x+h) = (x+h)^r$ bei dem $n+1$sten Gliede abbrechen, so wird (§. 190. 2. Beispiel.)

$$f^{n+1}(x+h) = \partial^{n+1}(x+h)^r = (n+1)!\,r_{n+1}(x+h)^{r-n-1}.$$

Für alle Werthe welche $f^{n+1}(x+h)$ von $h = 0$ bis h erhalten kann, ist der größte:

$$f^{n+1}(x+P) = (n+1)!\,r_{n+1}(x+h)^{r-n-1},$$

und der kleinste:

$$f^{n+1}(x+p) = (n+1)!\,r_{n+1}.x^{r-n-1},$$

wo für den ersten Fall $P = h$ und für den zweiten $p = 0$ ist.

Wenn daher die nach §. 176. (*I*) entwickelte Binomialreihe, welche nothwendig ganz mit der §. 25. gefundenen übereinstimmt, beim $n+1$sten Gliede abgebrochen wird, so entsteht folgender Näherungswerth

$$(x+h)^r = x^r + r_1x^{r-1}h + r_2x^{r-2}h^2 + r_3x^{r-3}h^3 + r_4x^{r-4}h^4 + \dots$$

$$\dots + r_nx^{r-n}h^n + r_{n+1}\frac{(x+h)^{r-n-1} + x^{r-n-1}}{2}\,h^{n+1}.$$

2. **Beispiel.** Die Reihe für $lg(x+h)$ (§. 164. *XI.*) soll beim $n+1$sten Gliede abbrechen, man sucht die Ergänzung der Reihe mit Angabe der Grenzen des Fehlers.

Hier wird $f(x+h) = lg(x+h)$ und nach §. 190. 4. Beispiel.

$f^{n+1}(x+h) = \partial^{n+1} lg(x+h) = \pm\frac{n!}{(x+h)^{n+1}}$, daher wird innerhalb der Grenzen $h = 0$ bis h

$$f^{n+1}(x+h) = \pm\frac{n!}{(x+h)^{n+1}} = f^{n+1}(x+p) \text{ der kleinste, und}$$

$$f^{n+1}(x+P) = \pm\frac{n!}{x^{n+1}} \text{ der größte Werth, welchen } f^{n+1}(x+h) \text{ von } h = 0$$

bis h erhalten kann. Hienach wird die Ergänzung

$$R^1 = \pm\frac{h^{n+1}}{n+1}\,\frac{x^{n+1} + (x+h)^{n+1}}{2x^{n+1}(x+h)^{n+1}}, \text{ folglich}$$

$$(I)\ lg(x+h) = lg\,x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots \mp \frac{h^n}{nx^n} \pm \frac{h^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1} + (x+h)^{n+1}}{2x^{n+1}(x+h)^{n+1}}$$

wobei der größt mögliche Fehler

$$= \pm \frac{h^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(x+h)^{n+1} - x^{n+1}}{2x^{n+1}(x+h)^{n+1}} \text{ ist.}$$

In (I) werde $x = 1$ und $h = y$ gesetzt, so erhält man

$$(II)\ lg(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots \mp \frac{y^n}{n} \pm \frac{y^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1 + (1+y)^{n+1}}{2(1+y)^{n+1}}$$

und den größten Fehler $= \pm \frac{y^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(1+y)^{n+1} - 1}{2(1+y)^{n+1}}$.

Hierin $-y$ statt y gesetzt, giebt

$$(III)\ lg(1-y) = -\left[\frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \ldots + \frac{y^n}{n} + \frac{y^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1 + (1-y)^{n+1}}{2(1-y)^{n+1}}\right]$$

und den größtmöglichen Fehler $= \pm \frac{y^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1 - (1-y)^{n+1}}{2(1-y)^{n+1}}$.

Von (II) werde (III) abgezogen, so findet man, wenn $n = 2r$ eine gerade Zahl ist

$$(IV)\ lg\frac{1+y}{1-y}$$

$$= 2\left[\frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \ldots + \frac{y^{2r-1}}{2r-1} + \frac{y^{2r+1}}{2r+1} \cdot \frac{(1+y)^{2r+1} + (1-y)^{2r+1} + 2(1-y^2)^{2r+1}}{2(1-y^2)^{2r+1}}\right]$$

und der größte Fehler $= \frac{y^{2r+1}}{2r+1}\left[\frac{(1+y)^{2r+1} - 1}{2(1+y)^{2r+1}} + \frac{1 - (1-y)^{2r+1}}{2(1-y)^{2r+1}}\right]$

$$= \frac{y^{2r+1}}{2r+1} \cdot \frac{(1+y)^{2r+1} - (1-y)^{2r+1}}{2(1-y^2)^{2r+1}} \text{ ist.}$$

Hierin durchgängig $\frac{x-1}{x+1}$ statt y gesetzt, giebt

$$(V)\ lg\,x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{2r-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2r-1} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2r+1} \frac{(x^{2r+1}+1)(x+1)^{2r+1} + 2(2x)_2^{r+1}}{2(2r+1)(2x)^{2r+1}}\right]$$

wo der größtmögliche Fehler $= \frac{(x-1)^{2r+1}}{2r+1} \cdot \frac{x^{2r+1} - 1}{2(2x)^{2r+1}}$ ist.

3. **Beispiel.** Die Reihe für $\sin(x+h)$ (§. 194.) soll beim $n+1$sten Gliede abbrechen, man sucht die Ergänzung der Reihe mit Angabe des größten Fehlers. Hier wird

$$f(x+h) = \sin(x+h), \text{ und}$$

$f^{n+1}(x+h) = \partial^{n+1}\sin(x+h) = \pm\sin(x+h)$, oder $\pm\cos(x+h)$, nach den verschiedenen Werthen welche n erhält (§. 180.). Nun ist von $\sin(x+h)$ und $\cos(x+h)$ der größte Werth $= +1$ und der kleinste $= -1$, daher wird

$f^{n+1}(x+P) = +1$; $f^{n+1}(x+p) = -1$; weil aber die Summe beider $= 0$ ist, so findet man

$$(I)\ \sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \sin x + \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \ldots - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Eine dieser Reihen mit Weglassung des vorstehenden letzten Gliedes gewählt, so ist der größtmögliche Fehler

$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Eben so findet man:

$$(II)\ \cos(x+h) = \cos x - \frac{h}{1}\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x - \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \cos x - \frac{h}{1}\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x - \ldots - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

In den Reihen (I) und (II) werde $x = o$ und dann $h = x$ gesetzt, so findet man, mit Weglassung des letzten Gliedes,

$$(III)\ \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
$$(IV)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \pm \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!},$$

wo für (III) der größtmögliche Fehler $= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, und für $(IV) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ist.

§. 211.

Zur Auffindung eines Näherungsausdrucks und des größten Fehlers welcher entsteht, wenn die maclaurinsche Reihe (§. 196.) bei irgend einem Gliede abgebrochen wird, setze man §. 210. durchgängig $x = o$, und alsdann $h = x$, so findet man einen Näherungswerth für

$$(I)\ fx = f + xf^1 + \frac{x^2}{2!}f^2 + \frac{x^3}{3!}f^3 + \frac{x^4}{4!}f^4 + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{f^{n+1}P + f^{n+1}p}{2}$$

wo $f^{n+1}P$ den größten, und $f^{n+1}p$ den kleinsten Werth bezeichnet, welchen $f^{n+1}x$ für alle zwischen o und x gelegene Werthe erhält.

Der größtmögliche Fehler ist alsdann

$$(II)\ = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{f^{n+1}P - f^{n+1}p}{2}.$$

Wird $f^{n+1}P + f^{n+1}p = o$, so ist die entsprechende Näherungsreihe

$$fx = f + xf^1 + \frac{x^2}{2!}f^2 + \frac{x^3}{3!}f^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n$$

und der größtmögliche Fehler $= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}P.$

Beispiel. Die Entwickelung von $fx = lg(a + bx)$ nach den Potenzen von x, soll beim fünften Gliede abbrechen, man sucht den entsprechenden Näherungsausdruck, und für diesen den größtmöglichen Fehler.

Aus $fx = lg(a + bx)$ wird nach §. 190.

$$f^r x = \mp \frac{(r-1)!\,b^r}{(a+bx)^r}, \text{ daher für } x = 0$$

$$f = lg\,a$$

$$f^1 = + \frac{b}{a}, \text{ wegen } 0! = 1 \text{ *)}$$

$$f^2 = - \frac{b^2}{a^2}$$

$$f^3 = + \frac{2!\,b^3}{a^3}$$

$$f^4 = - \frac{3!\,b^4}{a^4}$$

Nun ist $f^5 x = \frac{4!\,b^5}{(a+bx)^5}$, also $f^5 P = \frac{4!\,b^5}{a^5}$ der größte, und $f^5 p = \frac{4!\,b^5}{(a+bx)^5}$ der kleinste Werth, welchen $f^5 x$ zwischen 0 und x erhalten kann; also $\frac{f^5 P + f^5 p}{2} = \frac{4!\,b^5}{a^5} \cdot \frac{(a+bx)^5 + a^5}{2(a+bx)^5}$, daher findet man fx oder

$$lg(a+bx) = lg\,a + \frac{bx}{a} - \frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^3x^3}{3a^3} - \frac{b^4x^4}{4a^4} + \frac{b^5x^5}{5a^5} \cdot \frac{(a+bx)^5 + a^5}{2(a+bx)^5}.$$

Der größtmögliche Fehler ist

$$= \frac{b^5x^5}{5a^5} \cdot \frac{(a+bx)^5 - a^5}{2(a+bx)^5}.$$

§. 212.

Zur Bestimmung der Ableitung einer Funkzion, kann man auch die taylorsche Reihe anwenden. Sucht man die erste Ableitung von fx, also $f^1 x$; so ist nach (I) §. 176.

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f^1 x + h\left(\frac{1}{2!} f^2 x + \frac{h}{3!} f^3 x + \frac{h^2}{4!} f^4 x + \ldots\right)$$

und weil für $h = 0$ die auf $f^1 x$ folgenden Glieder verschwinden, so wird

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f^1 x \text{ für } h = 0.$$

Ist man nun im Stande den Werth von $\frac{f(x+h) - fx}{h}$ für den Fall anzugeben, daß $h = 0$ wird, so findet man dadurch $f^1 x = \partial fx$.

Bei der Anwendung dieses Ausdrucks wird vorausgesetzt, daß die Entwickelung von $f(x+h)$ bekannt, und der Nenner h als Faktor im Zähler $f(x+h) - fx$ enthalten sey.

---

*) Nach §. 6. ist die Faktorenfolge $1^{n+m;1} = 1.2.3 \ldots n(n+1) \ldots (n+m) = 1^{n;1} \cdot (n+1)^{m;1}$ oder $1^{n;1} = \frac{1^{n+m;1}}{(n+1)^{m;1}}$, oder es wird, weil (§. 6.) $1^{n;1} = (n)!$ ist, $(n)! = \frac{1^{n+m;1}}{(n+1)^{m;1}}$. Hierin $n = 0$ gesetzt, giebt $(0)! = \frac{1^{m;1}}{1^{m;1}} = 1$.

1. **Beispiel.** Man sucht die erste Ableitung von $fx = x^n$. Es ist

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + n_2 x^{n-2} h^2 + \ldots \text{ daher}$$

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = \frac{n x^{n-1} h + n_2 x^{n-2} h^2 + \ldots}{h} = n x^{n-1} + n_2 x^{n-2} h + \ldots$$

Hierin $h = o$ gesetzt, giebt $f^1 x = n x^{n-1}$; wie erfordert wird.

2. **Beispiel.** Man sucht die erste Ableitung von $fx = \sin x$. Ist nun

$$f(x+h) = \sin(x+h) = \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \ldots \ldots$$

bekannt, so findet man hieraus

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = \cos x - \frac{h}{2!} \sin x - \frac{h^2}{3!} \cos x + \ldots$$

Hierin $h = o$ gesetzt, giebt

$$f^1 x = \cos x.$$

3. **Beispiel.** Die erste Ableitung von dem Binomialkoeffizienten x_m zu finden, wird hier für $fx = x_m$

$$\frac{(x+h)_m - x_m}{h} = f^1 x \text{ für } h = o. \text{ Aber (§. 41. I.)}$$

$$(x+h)_m = x_m + x_{m-1} h + x_{m-2} h_2 + x_{m-3} h_3 + \ldots + h_m, \text{ oder}$$

$$(x+h)_m = x_m + h . x_{m-1} + \frac{h}{2}(h-1) x_{m-2} + \frac{h}{3}(h-1)_2 x_{m-3} + \ldots + \frac{h}{m}(h-1)_{m-1},$$

daher wird

$$\frac{(x+h)_m - x_m}{h} = x_{m-1} + \tfrac{1}{2}(h-1) x_{m-2} + \tfrac{1}{3}(h-1)_2 x_{m-3} + \ldots + \frac{1}{m}(h-1)_{m-1}.$$

Hierin $h = o$ gesetzt, giebt, wegen §. 35., den Werth von $f^1 x$, oder

$$\partial . x_m = x_{m-1} - \tfrac{1}{2} x_{m-2} + \tfrac{1}{3} x_{m-3} - \tfrac{1}{4} x_{m-4} + \ldots \pm \frac{1}{m-1} x \mp \frac{1}{m} x_0,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades die unteren für ein ungerades m gelten.

§. 213.

Den vorstehenden Untersuchungen gemäß lassen sich von der Urfunkzion $y = fx$ die auf einander folgenden Ableitungen finden. Nicht so leicht ist es umgekehrt von jeder gegebenen abgeleiteten Funkzion die vorhergehende Ableitung, oder die Urfunkzion anzugeben.

Die Funkzion aus welcher eine Ableitung entstanden ist, heißt die **Zurückleitung** oder das **Integral** derselben. So ist $\partial^{r-1} y = f^{r-1} x$ die Zurückleitung von $\partial^r y = f^r x$. Will man die Zurückleitung von $\partial^r y = f^r y$ andeuten, so kann dies durch einen negativen Ordnungsexponenten geschehen und es ist alsdann $\partial^{-1} . \partial^r y = f^{-1} f^r x = \partial^{r-1} y = f^{r-1} x$ die Zurückleitung von $\partial^r y = f^r x$, ganz auf eine ähnliche Weise, wie $\partial^n . \partial^r y = \partial^{n+r} y$ ist. Die Zurückleitung von $\partial y = f^1 x$ ist daher

$$\partial^{-1} . \partial y = f^{-1} f^1 x = \partial^{-1} . f^1 x.$$

Aber $\partial^{-1} \partial y = y$ und $f^{-1} f^1 x = fx$, daher wird auch

$$\partial^{-1} f^1 x = fx,$$

oder fx ist die Zurückleitung von $f^1 x$.

Diese Bezeichnung der Zurückleitung durch ∂^{-1} wird in der Folge beibehalten werden, bis andere Untersuchungen eine Abänderung erfordern. Auch folgt hieraus, daß, wenn von einer gegebenen Funkzion die nächste Ableitung bekannt ist, so kennt man auch die Zurückleitung dieser Ableitung.

Beim Aufsuchen der Zurückleitungen aus gegebenen Funkzionen ist noch besonders zu bemerken, daß Funkzionen, welche in Absicht der veränderlichen Größe einerlei Gestalt haben, aber durch Addition oder Subtraction beständiger Größen von einander verschieden sind, dennoch einerlei Ableitung geben. Wäre z. B. $fx = x^n + a$ und $Fx = x^n - b$, so wird $f^1x = F^1x = nx^{n-1}$; woraus man aber nicht schließen darf, daß $fx = Fx$ ist, weil in Absicht der beständigen Größen a, b eine wesentliche Verschiedenheit vorhanden ist. Dies entsteht daher, weil die Ableitung jeder beständigen Größe $= 0$ ist (§. 177.), also die beständige Größe, welche mit der Urfunkzion durch Addition oder Subtraction verbunden war, in der Ableitung verschwindet.

So ist, wenn diese beständige noch näher zu bestimmende Größe, welche sich für jeden vorkommenden besondern Fall finden läßt, mit C bezeichnet wird, welche man auch die **Constante** der Zurückleitung nennt, nach dem vorhergehenden Beispiele

$$\partial^{-1}\, nx^{n-1} = x^n + C.$$

Wenn daher von fx die Ableitung f^1x oder $f^1x = \partial fx$ bekannt ist, so erhält man die Zurückleitung, oder

$$(I)\ \partial^{-1} f^1x = fx + C.$$

Mittelst dieses Satzes und der bereits gefundenen Ableitungen, lassen sich mehrere Zurückleitungen für vorkommende Fälle bestimmen, von welchen einige der vorzüglichsten hier angeführt werden sollen. Vollständige Untersuchungen über diese Gegenstände, folgen hienächst in der Differenzial- und Integralrechnung, und es ist nur hier vorläufig zu bemerken, daß die Lehre von den Ableitungen der Funkzionen mit der Differenzialrechnung und die Zurückleitung der Funkzionen mit der Integralrechnung überein kommt, so daß was hier Ableitung genannt wird, dort **Differenzial** heißt. Auch hat man sich hier der in der Differenzialrechnung üblichen Bezeichnung bedient, wornach $\partial^n y$ das $n$te Differenzial von y bedeutet. In der Integralrechnung bedient man sich des Zeichens $\int$ um das Integral einer Funkzion anzudeuten, so daß, ∂^{-1} mit $\int$ einerlei ist. Hier hat man deshalb diese Bezeichnung noch nicht eingeführt, um Verwechselungen mit dem Summenzeichen in der Lehre von den Reihen zu vermeiden. Uebrigens hat man durch die vorhergehenden Untersuchungen alle schwankende Begriffe über das in der Differenzialrechnung gewöhnlich vorkommende Unendlichkleine zu beseitigen gesucht, die Lehren selbst aber nur so weit ausgeführt, als solche für die zunächst folgenden Untersuchungen erforderlich waren.

Noch ist zu bemerken, daß eben so wie $\partial^n fx = f^n x$ die $n$te Ableitung von fx bezeichnet, eben so bedeutet $\partial^{-n} fx = f^{-n} x$ die $n$te Zurückleitung von fx, oder $\partial^{-n} fx$ bedeutet, daß $n$mal hinter einander von fx die Zurückleitung genommen werden soll. Wird daher von fx die $n$te Ableitung und dann wieder die $n$te Zurückleitung genommen, so entsteht wieder fx, oder es ist

$$\partial^{-n}(\partial^n fx) = \partial^{n-n} fx = fx \text{ und } \partial^n(\partial^{-n} fx) = \partial^{n-n} fx = fx.$$

Eben so wird

$$\partial^m(\partial^{-n}fx) = \partial^{m-n}fx = f^{m-n}x, \text{ und}$$
$$\partial^{-n}(\partial^m fx) = \partial^{m-n}fx = f^{m-n}x.$$

§. 214.

Bezeichnet fx jede mögliche Funkzion der urveränderlichen Größe x, für welche $\partial x = 1$ ist, so wird (§. 188.)

$$(n+1)(fx)^n . f^1 x = \partial(fx)^{n+1}, \text{ oder wegen §. 179. } (I)$$

$$(fx)^n . f^1 x = \partial \frac{(fx)^{n+1}}{n+1}, \text{ daher §. 213. } (I)$$

$$(I) \quad \partial^{-1}(fx)^n . f^1 x = \frac{(fx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Hienach wird für $fx = a + bx^r$; $f^1 x = rbx^{r-1}$, also

$$\partial^{-1}(fx)^n . f^1 x = \partial^{-1}[rbx^{r-1}(a+bx^r)^n] = \frac{(a+bx^r)^{n+1}}{n+1}, \text{ oder}$$

$$\partial^{-1}[x^{r-1}(a+bx^r)^n] = \frac{(a+bx^r)^{n+1}}{(n+1)rb} + C,$$

wo r und n jede mögliche Zahl bedeuten können.

Für $r = 2$ wird

$$\partial^{-1}[x(a+bx^2)^n] = \frac{(a+bx^2)^{n+1}}{2(n+1)b} + C.$$

Für $r = 1$ wird

$$\partial^{-1}(a+bx)^n = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + C.$$

Hierin $-b$ statt b gesetzt, giebt

$$\partial^{-1}(a-bx)^n = C - \frac{(a-bx)^{n+1}}{(n+1)b}.$$

Für $a = 0$ und $b = r = 1$ wird

$$\partial^{-1}x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Durchgängig $-n$ statt n gesetzt, giebt

$$\partial^{-1}\frac{x^{r-1}}{(a+bx^r)^n} = C - \frac{1}{(n-1)rb(a+bx^r)^{n-1}}$$

$$\partial^{-1}\frac{1}{(a+bx)^n} = C - \frac{1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}}$$

$$\partial^{-1}\frac{1}{(a-bx)^n} = \frac{1}{(n-1)b(a-bx)^{n-1}} + C$$

$$\partial^{-1}\frac{1}{x^n} = C - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

Wegen der Zurückleitung von $\frac{1}{a+bx}$ s. m. §. 218. (I)

Wäre $f^1 x$ eine beständige Größe, so erhält man auch (§. 179. $I.$)

$$(II) \quad \partial^{-1}(fx)^n = \frac{(fx)^{n+1}}{(n+1)f^1 x} + C$$

und für $n = 1$

$$\partial^{-1} fx = \frac{(fx)^2}{2f^1x} + C.$$

Eben so wird nach §. 180. 185 und 187.

$$(III)\ \partial^{-1}\ a^{fx}.f^1x = \frac{a^{fx}}{lg\ a} + C$$

und für $a = e$ und $fx = x$

$$\partial^{-1} e^x = e^x + C.$$

$$(IV)\ \partial^{-1} \frac{1}{x} = lg\ x + C.$$

$$(V)\ \partial^{-1}\ sin\ x = C - cos\ x.$$

$$(VI)\ \partial^{-1}\ cos\ x = sin\ x + C.$$

$$(VII)\ \partial^{-1} \frac{f^1x}{fx} = lg\,fx + C.$$

$$(VIII)\ \partial^{-1} \frac{f^1x}{\sqrt{[1-(fx)^2]}} = Arc\ sin\ fx + C.$$

$$(IX)\ \partial^{-1} \frac{f^1x}{1+(fx)^2} = Arc\ tg\,fx + C.$$

$$(X)\ \partial^{-1} \frac{f^1x}{fx\sqrt{[(fx)^2-1]}} = Arc\ sec\,fx + C$$

$$(XI)\ \partial^{-1} \frac{f^1x}{\sqrt{[2fx-(fx)^2]}} = Arc\ sin\ vers\,fx + C.$$

Nach §. 188. (5. Beisp.) erhält man ferner

$$(XII)\ \partial^{-1} e^{-nx} = C - \frac{e^{-nx}}{n} + C,$$

wo durchgängig e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Setzt man $y = fx$, so hätte man auch für die Zurückleitungen (I) (III) und (VII) folgende Ausdrücke, wegen $\partial y = f^1x$, erhalten können:

$$\partial^{-1}(y^n \partial y) = \frac{y^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\partial^{-1}(a^y \partial y) = \frac{a^y}{lg\,a} + C$$

$$\partial^{-1} \frac{\partial y}{y} = lg\,y + C,$$

nur ist wohl zu bemerken, daß hier ∂y unter dem Zurückleitungszeichen ∂^{-1} nicht $= 1$ gesetzt werden darf, weil y eine abhängig Veränderliche ist, und nur $\partial x = 1$ gesetzt werden kann.

§. 215.

Wenn gleich die Ableitung von einer beständigen Größe $= o$ ist (§. 177.), so darf man doch hievon nicht auf die Zurückleitung schließen. Man setze daher $fx = Ax$, wo A eine beständige Größe ist, so wird $\partial fx = f^1x = A$. Diese Werthe in (I) §. 213. gesetzt, giebt

$$\partial^{-1} A = Ax + C$$

und für $A = 1$

$$\partial^{-1} 1 = x + C.$$

Wäre hingegen y irgend eine Funkzion von x und man sucht die Zurückleitung von $A\partial y$, so ist offenbar

$$\partial^{-1}.A\partial y = A\partial^{-1}\partial y = Ay + C, \text{ und}$$
$$\partial^{-1}.\partial y = y + C.$$

§. 216.

Sucht man die Zurückleitung von Fx für den Fall, daß F^1x keine beständige Größe ist, so findet der Ausdruck (*II*) §. 214. keine Anwendung. Allein es ist für $y = fx.Fx$ nach §. 182. $\partial y = f^1x.Fx + fx.F^1x$, daher, wenn man durchgängig die Zurückleitung nimmt, $y = \partial^{-1}(f^1x.Fx) + \partial^{-1}(fx.F^1x)$ *), oder, wenn man für y seinen Werth setzt:

$$(I)\ \partial^{-1}(f^1x.Fx) = fx.Fx - \partial^{-1}(fx.F^1x) + C,$$

oder, wenn f^1x eine beständige Größe ist (§. 177.)

$$(II)\ \partial^{-1}Fx = \frac{fx.Fx}{f^1x} - \frac{\partial^{-1}(fx.F^1x)}{f^1x} + C,$$

so daß man hienach die Zurückleitung von Fx finden kann, wenn die Zurückleitung von $fx.F^1x$ bekannt ist. Dies Verfahren ist unter dem Namen der theilweisen Zurückleitung (*Intégration par parties*) bekannt.

Beispiel. Sucht man die Zurückleitung von $Fx = lg\,(a + bx)$, so wird $F^1x = \frac{b}{a+bx}$. Setzt man nun hier, den Ausdruck (*II*) anzuwenden, $fx = a + bx$, so wird $f^1x = b$ und $\partial^{-1}(fx.F^1x) = \partial^{-1}b = bx + C$ (§. 215.) folglich

$$\partial^{-1}\,lg\,(a + bx) = \frac{(a+bx).lg\,(a+bx)}{b} - x + C.$$

Für $a = 1$ und $b = -1$ wird

$$\partial^{-1}\,lg\,(1 - x) = C - x - (1 - x)\,lg\,(1 - x).$$

§. 217.

Zusatz. Man setze $fx = P$ und $F^1x = Q$, so sind P und Q Funkzionen von x und man findet $f^1x = \partial P$ und $\partial^{-1}F^1x = Fx = \partial^{-1}Q$. Diese Werthe in die Gleichung (*I*) gesetzt, geben

$$(I)\ \partial^{-1}(\partial P.\partial^{-1}Q) = P.\partial^{-1}Q - \partial^{-1}(P.Q) + C.$$

Dieser Ausdruck läßt sich dann mit Nutzen anwenden, wenn man nicht im Stande ist die Zurückleitung von $\partial P\partial^{-1}Q$ unmittelbar anzugeben, aber wohl die Zurückleitung vom Produkt PQ kennt.

Aus dem vorstehenden Ausdruck erhält man auch

$$(II)\ \partial^{-1}(P.Q) = P.\partial^{-1}Q - \partial^{-1}(\partial P.\partial^{-1}Q) + C.$$

---

*) Daß $\partial^{-1}[f^1x.Fx + fx.F^1x] = \partial^{-1}(f^1x.Fx) + \partial^{-1}(fx.F^1x)$ ist, bedarf keines besondern Beweises, weil man nur die Ableitungen dieser Ausdrücke nehmen darf, um auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $f^1x.Fx + fx.F^1x$ wieder zu erhalten.

§. 218.

Die Zurückleitungsrechnung, von welcher hier nur die Grundzüge zusammen gestellt sind, gehört zu den weitläuftigsten und schwierigsten der ganzen Analysis, und erfordert sowohl als die weitere Ausführung der Ableitungsrechnung besondere Abschnitte. Mittelst der angegebenen Zurückleitungen ist man jedoch im Stande von mehreren zusammengesetzten Ausdrücken die Zurückleitungen anzugeben, von welcher hier noch einige Fälle angeführt werden sollen.

Die Zurückleitung von $u = \frac{x^m}{a + bx}$ zu finden, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, setze man $z = a + bx$, so wird $x = \frac{z-a}{b}$, daher (§. 25.)

$$x^m = \frac{1}{b^m}(z^m - maz^{m-1} + m_2 a^2 z^{m-2} - \ldots \mp ma^{m-1}z \pm a^m), \text{ daher}$$

$$u = \frac{x^m}{z} = \frac{1}{b^m}\left(z^{m-1} - maz^{m-2} + \ldots \mp ma^{m-1} \pm \frac{a^m}{z}\right).$$

Nun ist $\partial z = b$, also $\frac{\partial z}{b} = 1$ und $\frac{1}{b^m} = \frac{\partial z}{b^{m+1}}$, daher auch

$$u = \frac{1}{b^{m+1}}\left(z^{m-1}\partial z - maz^{m-2}\partial z + \ldots \mp ma^{m-1}\partial z \pm a^m \frac{\partial z}{z}\right)$$

und hieraus, wenn man von den einzelnen Gliedern die Zurückleitung nimmt,

$$\partial^{-1}u = \frac{1}{b^{m+1}}\left(\frac{z^m}{m} - \frac{ma}{m-1}z^{m-1} + \frac{m_2 a^2}{m-2}z^{m-2} - \ldots \mp ma^{m-1}z \pm a^m \lg z\right) + C,$$

oder es wird, wegen $z = a + bx$,

$$(I)\quad \partial^{-1}\frac{x^m}{a+bx} = \frac{1}{b^{m+1}}\left[\frac{(a+bx)^m}{m} - \frac{ma}{m-1}(a+bx)^{m-1} + \frac{m_2 a^2}{m-2}(a+bx)^{m-2} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \pm \frac{m_2 a^{m-2}}{2}(a+bx)^2 \mp \frac{ma^{m-1}}{1}(a+bx) \pm a^m \lg(a+bx)\right] + C,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades m gelten.

Hierin nach einander o, 1, 2 ... statt m gesetzt, giebt, wenn man die beständigen Größen mit unter C begreift

$$\partial^{-1}\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b}\lg(a+bx) + C$$

$$\partial^{-1}\frac{x}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\lg(a+bx) + C$$

$$\partial^{-1}\frac{x^2}{a+bx} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3}\lg(a+bx) + C.$$

$$\partial^{-1}\frac{x^3}{a+bx} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4}\lg(a+bx) + C$$

$$\partial^{-1}\frac{x^4}{a+bx} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5}\lg(a+bx) + C \text{ u. s. w.}$$

In (I) werde $-b$ statt b gesetzt; dieß giebt

$$(II)\quad \partial^{-1}\frac{x^m}{a-bx} = \frac{\mp 1}{b^{m+1}}\left[\frac{(a-bx)^m}{m} - \frac{ma}{m-1}(a-bx)^{m-1} + \frac{m_2 a^2}{m-2}(a-bx)^{m-2} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \pm \frac{m_2 a^{m-2}}{2}(a-bx)^2 \mp \frac{ma^{m-1}}{1}(a-bx) \pm a^m \lg(a-bx)\right] + C.$$

Hierin $a = b = 1$ und nach einander o, 1, 2 . . . . statt m gesetzt, giebt

$$\partial^{-1} \frac{1}{1-x} = C - lg\,(1-x)$$

$$\partial^{-1} \frac{x}{1-x} = C - x - lg\,(1-x)$$

$$\partial^{-1} \frac{x^2}{1-x} = C - \frac{x^2}{2} - x - lg\,(1-x)$$

$$\partial^{-1} \frac{x^3}{1-x} = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - lg\,(1-x)$$

$$\partial^{-1} \frac{x^4}{1-x} = C - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - lg\,(1-x)$$

und überhaupt:

$$\partial^{-1} \frac{x^m}{1-x} = C - \frac{x^m}{m} - \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{x^{m-2}}{m-2} - \ldots\ldots - \frac{x^2}{2} - x - lg\,(1-x).$$

Die Zurückleitung von $u = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x}$ zu finden, setze man $x^{\frac{1}{2}} = z$, so wird $x = z^2$ und $2z\partial z = 1$, daher

$$u = \frac{z}{1-z^2} = \frac{2z^2\partial z}{1-z^2} = -2\partial z + \frac{2\partial z}{1-z^2}.$$ Nun ist

$$\frac{2}{1-z^2} = \frac{2}{(1+z)(1-z)} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+z} - \frac{-1}{1-z},$$ daher

$$u = -2\partial z + \frac{\partial z}{1+z} - \frac{-\partial z}{1-z},$$ also nach (*I*) und (*II*)

$$\partial^{-1} u = -2z + lg\,(1+z) - lg\,(1-z) = -2z + lg\,\frac{1+z}{1-z} + C,$$

oder wegen $z = x^{\frac{1}{2}}$

$$(III)\quad \partial^{-1} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x} = -2x^{\frac{1}{2}} + lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Eben so findet man

$$(IV)\quad \partial^{-1} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x-1} = 2x^{\frac{1}{2}} + lg\,\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1} + C.$$

Weil $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x}$ und $\partial^{-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \partial^{-1} x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$ ist, so erhält man

$$\partial^{-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)} = \partial^{-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \partial^{-1} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x},$$ also nach (*III*)

$$(V)\quad \partial^{-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)} = lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Es ist $u = \frac{1}{(a+bx)x} = \frac{1}{ax} - \frac{b}{a(a+bx)}$, daher

$$\partial^{-1} u = \frac{1}{a}\partial^{-1}\frac{1}{x} - \frac{b}{a}\partial^{-1}\frac{1}{a+bx},$$ oder nach (*I*)

$$\partial^{-1} u = \frac{1}{a}\,lg\,x - \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b}\,lg\,(a+bx) + C,$$ folglich

$$(VI)\quad \partial^{-1} \frac{1}{(a+bx)x} = C + \frac{1}{a}\,lg\,\frac{x}{a+bx} = C - \frac{1}{a}\,lg\,\frac{a+bx}{x}.$$

Ferner ist $u = \frac{1}{(a+bx)x^2} = \frac{1}{ax^2} - \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2(a+bx)}$; wovon man sich überzeugen kann, wenn die Brüche unter einerlei Nenner gebracht werden, daher wird.

$$\partial^{-1} u = \frac{1}{a}\partial^{-1}\frac{1}{x^2} - \frac{b}{a^2}\partial^{-1}\frac{1}{x} + \frac{b^2}{a^2}\partial^{-1}\frac{1}{a+bx},$$

daher §. 214. (I) und (IV)

$$\partial^{-1} u = \frac{1}{a}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{b}{a^2}\, lg\, x + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\, lg\,(a+bx) + C, \text{ folglich}$$

$$(VII)\ \partial^{-1}\frac{1}{(a+bx)x^2} = C - \frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\, lg\, \frac{a+bx}{x}.$$

Die Zurückleitung von $a^x x^m$ zu finden, wenn m eine positive ganze Zahl ist, setze man $a^x = f^1 x$ und $x^m = Fx$, dies giebt $fx = \frac{a^x}{lg\, a}$ (§. 214. $III.$) und $F^1 x^m = m x^{m-1}$, daher nach §. 216. (I)

$$\partial^{-1} a^x x^m = \frac{a^x x^m}{lg\, a} - \frac{m\,\partial^{-1} a^x x^{m-1}}{lg\, a}. \text{ Ferner}$$

$$\partial^{-1} a^x x^{m-1} = \frac{a^x x^{m-1}}{lg\, a} - \frac{(m-1)\,\partial^{-1} a^x x^{m-2}}{lg\, a}$$

. . . .

$$\partial^{-1} a^x x^2 = \frac{a^x x^2}{lg\, a} - \frac{2\,\partial^{-1} a^x x}{lg\, a}$$

$$\partial^{-1} a^x x = \frac{a^x x}{lg\, a} - \frac{1\,\partial^{-1} a^x}{lg\, a}.$$

Aber $\frac{\partial^{-1} a^x}{lg\, a} = \frac{a^x}{(lg\, a)^2}$, daher erhält man, wenn $(lg\, a)^m$ durch $lg^m a$ bezeichnet wird, mittelst der vorstehenden Gleichungen

$$\partial^{-1} a^x x^m = \frac{a^x x^m}{lg\, a} - \frac{m a^x x^{m-1}}{lg^2 a} + \frac{m(m-1) a^x x^{m-2}}{lg^3 a} - \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots 3.2.1\, a^x}{lg^{m+1} a}, \text{ oder}$$

$$(VIII)\ \partial^{-1} a^x x^m = \frac{a^x}{lg\, a}\left[x^m - \frac{m x^{m-1}}{lg\, a} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{lg^2 a} - \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}}{lg^3 a} + \ldots \right.$$
$$\left.\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots 3.2.1}{lg^m a}\right] + C.$$

Hienach wird

$$\partial^{-1} a^x = \frac{a^x}{lg\, a} + C.$$

$$\partial^{-1} a^x x = \frac{a^x}{lg\, a}\left[x - \frac{1}{lg\, a}\right] + C.$$

$$\partial^{-1} a^x x^2 = \frac{a^x}{lg\, a}\left[x^2 - \frac{2x}{lg\, a} + \frac{1.2}{lg^2 a}\right] + C.$$

$$\partial^{-1} a^x x^3 = \frac{a^x}{lg\, a}\left[x^3 - \frac{3x^2}{lg\, a} + \frac{2.3x}{lg^2 a} - \frac{1.2.3}{lg^3 a}\right] + C.$$

u. s. w.

Sucht man die Zurückleitung von $x^m e^{-nx}$, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, so erhält man ganz auf eine ähnliche Weise wie bei der vorhergehenden Zurückleitung

(IX)

$$(IX)\quad \partial^{-1} x^m e^{-nx} = -\frac{e^{-nx}}{n}\left[x^m + \frac{m}{n}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2}x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{n^3}x^{m-3} + \dots \right.$$
$$\left. \dots\dots + \frac{m(m-1)\dots 3.2.1}{n^m}\right] + C,$$

und hienach

$$\partial^{-1} e^{-nx} = -\frac{e^{-nx}}{n} + C$$
$$\partial^{-1} x\ e^{-nx} = -\frac{e^{-nx}}{n}\left(x + \frac{1}{n}\right) + C$$
$$\partial^{-1} x^2 e^{-nx} = -\frac{e^{-nx}}{n}\left(x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1.2}{n^2}\right) + C$$
$$\partial^{-1} x^3 e^{-nx} = -\frac{e^{-nx}}{n}\left(x^3 + \frac{3}{n}x^2 + \frac{2.3}{n^2}x + \frac{1.2.3}{n^3}\right) + C$$

u. s. w.

Die Zurückleitung von $u = x^m\, lg\,(a + bx)$ zu finden, wenn m eine ganze positive Zahl ist, setze man $f^1 x = x^m$ und $Fx = lg\,(a + bx)$, so wird $fx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ und $F^1 x = \frac{b}{a + bx}$, daher §. 216. (I)

$$\partial^{-1} u = \frac{x^{m+1}}{m+1}\, lg\,(a + bx) - \partial^{-1}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{b}{a+bx}\right] + C, \text{ oder}$$

$$(X)\quad \partial^{-1}[x^m\, lg\,(a + bx)] = \frac{x^{m+1}}{m+1}\, lg\,(a+bx) - \frac{b}{m+1}\,\partial^{-1}\left[\frac{x^{m+1}}{a+bx}\right] + C,$$

wo die zuletzt angedeutete Zurückleitung nach (I) gefunden werden kann.

Hieraus findet man

$$\partial^{-1} x\, lg\,(a + bx) = C + \frac{ax}{2b} - \frac{x^2}{4} - \frac{a^2 - b^2x^2}{2b^2}\, lg\,(a + bx)$$
$$\partial^{-1} x^2\, lg\,(a + bx) = C - \frac{a^2x}{3b^2} + \frac{ax^2}{2.3b} - \frac{x^3}{3.3} + \frac{a^3 + b^3x^3}{3b^3}\, lg\,(a + bx).$$

Für $a = 1$ und $b = -1$ wird

$$\partial^{-1} x\ \ lg\,(1 - x) = C - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1 - x^2}{2}\, lg\,(1 - x)$$
$$\partial^{-1} x^2\, lg\,(1 - x) = C - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2.3} - \frac{x^3}{3.3} - \frac{1 - x^3}{3}\, lg\,(1 - x).$$

In (X) werde $-m$ statt m gesetzt, so erhält man

$$(XI)\quad \partial^{-1}\frac{lg\,(a + bx)}{x^m} = C - \frac{lg\,(a + bx)}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{b}{m-1}\,\partial^{-1}\left[\frac{1}{(a+bx)\,x^{m-1}}\right].$$

Hieraus findet man wegen (VI) und (VII)

$$\partial^{-1}\frac{lg\,(a + bx)}{x^2} = C - \frac{a + bx}{ax}\, lg\,(a + bx) + \frac{b}{a}\, lg\, x$$
$$\partial^{-1}\frac{lg\,(a + bx)}{x^3} = C + \frac{bx^2 - a^2}{2a^2x^2}\, lg\,(a + bx) - \frac{b}{2a^2}\, lg\, x.$$

§. 219.

In den Fällen, wenn man die Zurückleitung einer Funkzion nach bekannten Regeln nicht finden kann, läßt sich solche näherungsweise durch eine Reihe mittelst des taylorschen Satzes ausdrücken.

Für $h = -x$ in §. 176. (I) wird

$$F(x-x) = F = Fx - xF^1x + \frac{x^2}{2!}F^2x - \frac{x^3}{3!}F^3x + \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$Fx = F + xF^1x - \frac{x^2}{2!}F^2x + \frac{x^3}{3!}F^3x - \frac{x^4}{4!}F^4x + \ldots\ldots$$

oder wenn man $Fx = f^{-1}x$ setzt, so wird $F^1x = fx$; $F^2x = f^1x$; $F^3x = f^2x$; ..... und wenn man die noch näher zu bestimmende beständige Grösse statt F mit C bezeichnet, so erhält man

$$(I)\ f^{-1}x = C + xfx - \frac{x^2}{2!}f^1x + \frac{x^3}{3!}f^2x - \frac{x^4}{4!}f^3x + \frac{x^5}{5!}f^4x - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^nx \mp \ldots$$

welches die von Johann **Bernoulli** in *Acta eruditorum*, *Anno* 1694. *p.* 437. zuerst bekannt gemachte Reihe ist. (*Joann. Bernoulli Opera omnia. T. I. Laus.* 1742. *p.* 125.)

Wird in der maclaurinschen Reihe von jedem Gliede die Zurückleitung genommen, so findet man (§. 196.)

$$\partial^{-1}fx = \partial^{-1}f + \frac{f^1}{1}\partial^{-1}x + \frac{f^2}{2!}\partial^{-1}x^2 + \frac{f^3}{3!}\partial^{-1}x^3 + \ldots\ldots$$

oder weil $\partial^{-1}f = C + xf$ (§. 215.); $\partial^{-1}x = \frac{x^2}{2}$; $\partial^{-1}x^2 = \frac{x^3}{3}$; u. s. w. ist, so findet man, wegen $\partial^{-1}fx = f^{-1}x$,

$$(II)\ f^{-1}x = C + xf + \frac{x^2}{2!}f^1 + \frac{x^3}{3!}f^2 + \frac{x^4}{4!}f^3 + \frac{x^5}{5!}f^4 + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^n + \ldots$$

Nach diesen beiden Zurückleitungsreihen läßt sich von einer jeden Funkzion, deren Ableitungen bekannt sind, die Zurückleitung durch eine Reihe ausdrücken. Die entsprechenden Reihen erscheinen aber sehr oft in einer wenig brauchbaren Gestalt, ob sie gleich in vielen Fällen eines einfachen Ausdrucks fähig sind.

Ein anderer Näherungs-Ausdruck für die Zurückleitung einer Funkzion ist §. 1057. entwickelt.

Beispiel. Die Zurückleitung von $fx = lg\,x$ zu finden, wird (§. 180.)

$$f^1x = \frac{1}{x};\ f^2x = \frac{-1}{x^2};\ f^3x = \frac{+2!}{x^3};\ f^4x = \frac{-3!}{x^4};\ \text{u. s. w.}$$

daher nach (I), weil $\partial^{-1}fx = \partial^{-1}lg\,x = f^{-1}x$ ist,

$$\partial^{-1}lg\,x = C + x\,lg\,x - \frac{x}{1.2} - \frac{x}{2.3} - \frac{x}{3.4} - \frac{x}{4.5} - \frac{x}{5.6} - \ldots \text{ oder}$$

$$= C + x\,lg\,x - x\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots\right)$$

Nach §. 164. (XVI) ist aber die in Klammern eingeschlossene Reihe $= 1$, daher eigentlich

$$\partial^{-1}lg\,x = x\,lg\,x - x + C.$$

Nimmt man von diesem Ausdruck die erste Ableitung, so findet man $lg\,x$, wie erfordert wird.

Die Reihe (II) findet hier keine Anwendung, weil die Glieder derselben unbestimmt werden, es sey denn, daß man die Zurückleitung von $lg\,(a+x)$ statt $lg\,x$ sucht.

Anwendung.

I. Auflösung der Gleichungen.

§. 220.

Die Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots = 0$ bezeichne man mit $fx = 0$. Hat diese Gleichung zwei oder mehrere **gleiche Wurzeln**, so müssen eben so viel, weniger einer, in der Ableitung $f^1 x$ vorkommen.

Die Gleichung habe r gleiche Wurzeln, jede $= a$, so ist $(x - a)^r$ ein Faktor derselben, daher $fx = p(x - a)^r$, wo p eine solche Funkzion von x ist, welche den Faktor $x - a$ nicht enthält. Hieraus findet man

$$f^1 x = [(x - a)\,\partial p + rp]\,(x - a)^{r-1},$$

also ist $(x - a)^{r-1}$ ein Faktor der Ableitung $f^1 x$.

Sind daher in der Gleichung $fx = 0$, r gleiche Faktoren, so müssen $r - 1$ derselben in der Ableitung $f^1 x$ vorkommen.

Hat hienach eine Gleichung vier gleiche Wurzeln, so müssen in ihrer Ableitung noch drei derselben als Faktor von der Form $x - a$ enthalten seyn, und wenn eine Gleichung nur zwei gleiche Wurzeln, jede $= a$ hat, so ist $x - a$ ein Faktor ihrer Ableitung. Um daher die gleichen Wurzeln einer Gleichung $fx = 0$ zu finden, suche man für fx und deren Ableitung $f^1 x$ den größten gemeinschaftlichen Theiler, auf eben die Art, wie man den gemeinschaftlichen Theiler zweier ganzen Zahlen sucht. Findet sich dann ein Theiler von der Form $x \pm a$, so ist $\mp a$ eine von den gesuchten Wurzeln der Gleichung fx, welche hier als eine rationale ganze Funkzion von x vorausgesetzt wird.

1. Beispiel. $x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = 0$ giebt, wenn dieser Ausdruck $= fx$ gesetzt wird, $f^1 x = 3x^2 - 22x + 39$. Durch Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers erhält man

$$\begin{array}{l}
x^3 - 11x^2 + 39x - 45 \,\Big)\, 3x^2 - 22x + 39 \,\Big(\, \tfrac{1}{3}x - \tfrac{11}{9} \\
x^3 - \tfrac{22}{3}x^2 + 13x \\
\hline
-\tfrac{11}{3}x^2 + 26x - 45 \\
-\tfrac{11}{3}x^2 + \tfrac{242}{9}x - \tfrac{143}{3} \\
\hline
3x^2 - 22x + 39 \,\Big)\, -\tfrac{8}{9}x + \tfrac{8}{3} \,\Big(\, -\tfrac{27}{8}x + \tfrac{117}{8} \\
3x^2 - 9x \\
\hline
-13x + 39 \\
-13x + 39 \\
\hline
0
\end{array}$$

Es ist daher $-\frac{8}{9}x + \frac{8}{3}$ der gemeinschaftliche Theiler von fx und $f^1 x$, also $-\frac{8}{9}x + \frac{8}{3} = 0$, oder $-x + 3 = 0$, also $x = 3$ eine doppelte Wurzel von fx.

Man findet hienach

$$\frac{x^3 - 11x^2 + 39x - 45}{(x-3)^2} = x - 5, \text{ also ist}$$

$$x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = (x-3)^2 (x-5).$$

2. **Beispiel.** Zu untersuchen, ob die Gleichung

$$fx = x^5 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + 16 = 0$$

gleiche Wurzeln hat, wird $f^1 x = 5x^4 - 24x^2 + 48x - 28$.

Sucht man den gemeinschaftlichen Theiler für beide Ausdrücke, so findet man denselben $\frac{169}{4}x^2 - \frac{169}{2}x + \frac{169}{2}$, oder $x^2 - 2x + 2 = 0$. Die Wurzeln dieses Ausdrucks sind $x = 1 + \sqrt{-1}$ und $x = 1 - \sqrt{-1}$, welches die doppelte Wurzeln von fx sind. Nun ist ferner

$$\frac{x^5 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + 16}{(x^2 - 2x + 2)^2} = x + 4, \text{ oder weil}$$

$$(x^2 - 2x + 2)^2 = (x - 1 - \sqrt{-1})^2 (x - 1 + \sqrt{-1})^2, \text{ so wird auch}$$

$$x^5 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + 16 = (x - 1 - \sqrt{-1})^2 (x - 1 + \sqrt{-1})^2 (x + 4).$$

Uebrigens kann man beim Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers die Brüche dadurch vermeiden, daß man den Divisor oder Dividend mit einerlei Zahl multiplizirt, weil dadurch der gesuchte gemeinschaftliche Theiler keine Aenderung in seinem Werthe erleidet.

§. 221.

Von der Gleichung $fx = 0$ sey α ein naher Werth für die Wurzel x und der fehlende Theil $= z$, so ist $x = \alpha + z$. Nach der taylorschen Reihe (§. 176.) ist aber

$$f(\alpha + z) = f\alpha + zf^1\alpha + \frac{z^2}{2} f^2\alpha + \frac{z^3}{2.3} f^3\alpha + \ldots = 0,$$

folglich, wenn z so klein ist, daß die höheren Potenzen von z wegfallen können, so wird $f\alpha + zf^1\alpha = 0$, und hieraus $z = -\frac{f\alpha}{f^1\alpha}$.

Wenn daher die Gleichung $fx = 0$ gegeben, und α ein bekannter naher Werth ihrer Wurzel ist, so bestimme man $f\alpha$ und $f^1\alpha$ aus fx, und man findet alsdann einen noch näheren Werth der Wurzel, wenn zu α noch

$$z = -\frac{f\alpha}{f^1\alpha}$$

hinzugesetzt wird.

Dieses Verfahren, die **Wurzel einer Gleichung durch Näherung zu finden**, kommt wesentlich mit der **neutonschen Näherungsmethode** überein, nur daß der vorstehende Ausdruck das Gesetz, nach welchem die Wurzel zu bestimmen ist, allgemein und sehr einfach darstellt.

Als Beispiel kann die von Neuton gewählte Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ dienen, welche derselbe (*La Méthode des Fluxions et des Suites infinies, par Neuton. à Paris, 1740.*) auflöst. Man setze $fx = x^3 - 2x - 5$, daher ist $f^1 x = 3x^2 - 2$, und weil man sich leicht überzeugt, daß 2 eine nahe Wurzel der gegebenen Gleichung ist, setze man $\alpha = 2$, so

wird $f\alpha = \alpha^3 - 2\alpha - 5 = -1$ und $f^1\alpha = 3\alpha^2 - 2 = 10$, also

$$z = -\frac{f\alpha}{f^1\alpha} = \frac{1}{10},$$

und es ist 2, 1 ein näherer Werth für x.

Setzt man ferner $\alpha = 2,1$, so wird $f\alpha = 0,061$ und $f^1\alpha = 11,23$, daher

$$z = -\frac{0,061}{11,23} = -0,00543,$$

also $2,1 - 0,00543 = 2,09457$ ein näherer Werth für x.

Will man die Wurzel noch genauer haben, so sey $\alpha = 2,09457$, alsdann wird $f\alpha = 0,000206\,694\,766\,993$ und $f^1\alpha = 11,161670\,4547$, daher

$$z = -0,000018\,5182,$$

folglich ein näherer Werth für x

$$2,09457 - 0,0000185182 = 2,094551\,4818$$

Neuton findet (a. a. O. *p.* 7.) 2,094551 48

und Lagrange (*Traité de la résolution des équations numériques, nouv. édit. Paris,* 1808. *pag.* 33.) 2,094551 4865

§. 222.

Zusatz. Will man den Werth z für die Gleichungen eines jeden Grades besonders angeben, so sey allgemein die Gleichung des $n$ten Grades

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + kx + l = o.$$

Setzt man diese $= fx$, so wird

$$f^1x = nx^{n-1} + (n-1)\,ax^{n-2} + (n-2)\,bx^{n-3} + \ldots + k.$$

Hieraus findet man, wenn α ein naher Werth für die Wurzel x ist, den Zusatz

$$z = -\frac{\alpha^n + a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} + c\alpha^{n-3} + \ldots + k\alpha + l}{n\alpha^{n-1} + (n-1)\,a\alpha^{n-2} + (n-2)\,b\alpha^{n-3} + \ldots + k}.$$

Für die Gleichung vom dritten Grade $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ wird

$$z = -\frac{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}{3\alpha^2 + 2a\alpha + b},$$

und für die Gleichung vom vierten Grade $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = o$ wird

$$z = -\frac{\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d}{4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c}.$$

II. Von dem Werthe der Funkzionen, wenn solche in besonderen Fällen unbestimmt zu seyn scheinen.

§. 223.

In irgend einer Funkzion von x werde die unveränderliche Größe a statt x gesetzt, so entsteht daraus ein besonderer Werth dieser Funkzion, welcher aber auch die Form $\frac{o}{o}$; $o\,.\,\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$;

oder $\infty - \infty$ annehmen kann. Diese Ausdrücke sind unbestimmt, allein mittelst der folgenden Untersuchungen lassen sich die bestimmten Werthe derselben in jedem besondern Falle ausmitteln.

Wäre die Funkzion $y = \frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$ gegeben, und man sucht den besondern Werth für y, wenn $x = a$ wird, so erhält man $y = \frac{0}{0}$.

Sehr oft, wenn dergleichen Fälle vorkommen, liegt die Unbestimmtheit darin, daß man unterlassen hat, einen gemeinschaftlichen Faktor wegzuschaffen. So ist:

$$y = \frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2} = \frac{(a-x)(a^2 + ax + x^2)}{(a-x)(a+x)} = \frac{a^2 + ax + x^2}{a + x},$$

also $y = \frac{3}{2} a$ für $x = a$.

Hierher gehören alle Funkzionen von der Form:

$$y = \frac{A(x^m - a^m)}{B(x^n - a^n)},$$

welche $\frac{0}{0}$ für $x = a$ geben. Wird hier Zähler und Nenner durch $x - a$ dividirt, so entsteht (§. 61.)

$$y = \frac{A(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1})}{B(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})},$$

und daher für $x = a$

$$y = \frac{0}{0} = \frac{A \cdot m a^{m-1}}{B \cdot n a^{n-1}} = \frac{mA}{nB} a^{m-n}.$$

Ist hingegen

$$y = \frac{A(x-a)^m}{B(x-a)^n}$$

gegeben, wo $y = \frac{0}{0}$ für $x = a$ wird, so findet man

$$y = \frac{A(x-a)^{m-n}}{B}, \text{ also, wenn } m > n \text{ ist, für } x = a$$

$$y = \frac{0}{0} = 0.$$

Ferner ist:

$$y = \frac{A}{B(x-a)^{n-m}}, \text{ also, wenn } n > m \text{ ist, für } x = a$$

$$y = \frac{0}{0} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{0} = \infty.$$

§. 224.

Ist die gebrochene Funkzion:

$$y = \frac{Fx}{fx}$$

gegeben, welche $\frac{0}{0}$ für $x = a$ werde, so kann man in den meisten Fällen durch Ableitungen den besonderen Werth von y finden.

Denn es ist $y f x = F x$, also $y \partial f x + \partial y . f x = \partial F x$. (§. 183.) Weil aber $f x = 0$ für $x = a$ wird, so erhält man $y \partial f x = \partial F x$, folglich

$$y = \frac{\partial F x}{\partial f x} \text{ für } x = a.$$

Wäre ferner $\frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{0}{0}$ für $x = a$, so erhält man auf eben die Art

$$y = \frac{\partial^2 F x}{\partial^2 f x} \text{ für } x = a.$$

Wird auch dieser Ausdruck $= \frac{0}{0}$, so findet man alsdann eben so

$$y = \frac{\partial^3 F x}{\partial^3 f x} \text{ für } x = a \text{ u. s. w.}$$

1. **Beispiel.** $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ für $x = 1$ zu finden. Hier ist $\partial F x = n x^{n-1}$ und $\partial f x = 1$, also

$$\frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{n x^{n-1}}{1}, \text{ oder } y = n \text{ für } x = 1.$$

2. **Beispiel.** $y = \frac{x^3 + 5 a x^2 - 4 a^2 x - 2 a^3}{x^2 - a^2}$ für $x = a$ zu bestimmen, giebt $y = \frac{0}{0}$, also wird hier

$$\frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{3 x^2 + 10 a x - 4 a^2}{2 x}, \text{ oder } y = \frac{9 a^2}{2 a} = \frac{9}{2} a \text{ für } x = a.$$

3. **Beispiel.** $y = \frac{x}{\sin x}$ für $x = 0$ zu bestimmen, giebt $y = \frac{0}{0}$, also

$$y = \frac{\partial x}{\partial \sin x} = \frac{1}{\cos x} \text{ oder } y = \frac{1}{1} = 1 \text{ für } x = 0.$$

4. **Beispiel.** $y = \frac{lg(1 - x)}{x}$ für $x = 0$, giebt $y = \frac{0}{0}$. Aber

$$\partial\, lg(1 - x) = \frac{-1}{1 - x} \text{ daher } \frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{-1}{1 - x}, \text{ folglich } y = -1 \text{ für } x = 0.$$

5. **Beispiel.** $y = \frac{lg(1 + x) - lg(1 - x)}{x}$ für $x = 0$, giebt $y = \frac{0}{0}$. Aber $\partial\, lg(1 + x) = \frac{1}{1 + x}$ und $\partial\, lg(1 - x) = \frac{-1}{1 - x}$ daher

$$\frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}}{1}; \text{ also } y = 2 \text{ für } x = 0.$$

6. **Beispiel.** $y = \frac{\sin x}{\sin n x}$ giebt $y = \frac{0}{0}$ für $x = 0$, also

$$\frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{\cos x}{n \cos x} = \frac{1}{n}, \text{ oder } y = \frac{1}{n} \text{ für } x = 0.$$

7. **Beispiel.** $y = \frac{lg\, x}{\sqrt{(1 - x)}}$ giebt $y = \frac{0}{0}$ für $x = 1$, also

$$\frac{\partial F x}{\partial f x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{(1 - x)}}} = -\frac{2\sqrt{(1 - x)}}{x}, \text{ oder } y = 0 \text{ für } x = 1.$$

8. **Beispiel.** $y = \frac{a^x - b^x}{x}$ für $x = o$ zu finden, giebt $y = \frac{o}{o}$, also

$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{a^x\, lg\, a - b^x\, lg\, b}{1}$, daher $y = lg\, a - lg\, b = lg\, \frac{a}{b}$ für $x = o$.

9. **Beispiel.** $y = \frac{5 - 2x^2 - \sqrt{(8x^2+1)}}{x^2 - 1}$ giebt $\frac{o}{o}$ für $x = 1$; also

$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{-4x - 8x(8x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{-4x - 2x\sqrt{(8x^2+1)}}{x\sqrt{(8x^2+1)}}$, daher $y = -\frac{10}{3}$ für $x = 1$.

10. **Beispiel.** $y = \frac{a^4 + (3x - 4a)\sqrt{(2ax - a^2)^3}}{\sqrt{(2ax - x^2)^3} - a^3}$ für $x = a$ zu bestimmen, giebt $y = \frac{o}{o}$, also $\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{\sqrt{(2ax - a^2)^3} + a(3x - 4a)\sqrt{(2ax - a^2)}}{(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)}}$; für $x = a$ giebt dieser Ausdruck ebenfalls $y = \frac{o}{o}$; daher ferner:

$\frac{\partial^2 Fx}{\partial^2 fx} = \frac{(15a^2x - 10a^3)\sqrt{(2ax - x^2)}}{(a^2 - 4ax + 2x^2)\sqrt{(2ax - a^2)}}$, folglich $y = -5a$ für $x = a$.

11. **Beispiel.** $y = \frac{x^x - x}{1 - x + lg\, x}$ für $x = 1$ zu bestimmen, giebt $y = \frac{o}{o}$, also (§. 186. 5. Beisp.)

$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{x^x(1 + lg\, x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}}$; für $x = 1$ wird ebenfalls $y = \frac{o}{o}$, daher ferner:

$$\frac{\partial^2 Fx}{\partial^2 fx} = \frac{x^x(1 + lg\, x)^2 + \frac{x^x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}, \text{ folglich } y = -2 \text{ für } x = 1.$$

12. **Beispiel.** $y = \frac{(1+x)\, lg\, x}{(1-x)^2}$ für $x = 1$ zu finden, giebt $y = \frac{o}{o}$, also

$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{(1+x)\frac{1}{x} + lg\, x}{-2(1-x)}$, daher $y = \frac{2}{-2\,.\,o} = \frac{1}{o}$, oder $y = \infty$ für $x = 1$.

§. 225.

Verwandelt sich die gebrochene Funkzion $y = \frac{Fx}{fx}$ in $y = \frac{\infty}{\infty}$ für $x = a$, so dividire man Zähler und Nenner derselben durch $Fx\,.\,fx$, alsdann erhält man

$$y = \frac{\frac{1}{fx}}{\frac{1}{Fx}},$$

also $y = \frac{o}{o}$ für $x = a$, wodurch dieser Fall auf den §. 224. zurückgeführt ist.

Wenn hingegen die Funkzion $y = Fx\,.\,fx$ gegeben wäre, und man findet $Fx = o$ und $fx = \infty$ für $x = a$, also

$$y = o\,.\,\infty,$$

so

so setze man

$$y = \frac{Fx}{\frac{1}{fx}},$$

da alsdann $y = \frac{0}{0}$ für $x = a$ wird, weshalb auch der vorliegende Fall auf den §. 224. gebracht ist.

In mehrern Fällen lassen sich auch die besonderen Werthe von y durch Anwendung der Sätze §. 37. finden.

1. **Beispiel.** $y = \frac{tg\,\frac{a\pi + x}{2a}}{sec\,(\frac{1}{2}\pi - x)}$ giebt $y = \frac{\infty}{\infty}$ für $x = 0$. Aber

$y = \frac{1}{sec\,(\frac{1}{2}\pi - x)} : \frac{1}{tg\,\frac{a\pi + x}{2a}} = \frac{cos\,(\frac{1}{2}\pi - x)}{cot\,\frac{a\pi + x}{2a}}$ für $x = 0$ giebt $y = \frac{0}{0}$, daher

$$\partial Fx = \partial\, cos\,(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \partial x\, sin\,(\tfrac{1}{2}\pi - x), \text{ und}$$

$$\partial fx = \partial\, cot\,\frac{a\pi + x}{2a} = \frac{-\partial x}{2a\left(sin\,\frac{a\pi + x}{2a}\right)^2}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = -\,2a\, sin\,(\tfrac{1}{2}\pi - x)\left(sin\,\frac{a\pi + x}{2a}\right)^2, \text{ folglich}$$

$$y = -\,2a \text{ für } x = 0.$$

2. **Beispiel.** $y = \frac{lg\,x}{x}$ giebt $y = \frac{\infty}{\infty}$ für $x = \infty$. Es ist aber auch $y = \frac{1}{x} : \frac{1}{lg\,x}$, also $y = \frac{0}{0}$ für $x = \infty$, daher

$$\partial Fx = \partial\,\frac{1}{x} = -\,x^{-2} \text{ und §. 180.}$$

$$\partial fx = \partial\,\frac{1}{lg\,x} = -\,\partial\, lg\,x = -\,x^{-1}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{-x^{-2}}{-x^{-1}} = \frac{1}{x}, \text{ folglich (§. 10.)}$$

$$y = \frac{lg\,x}{x} = 0 \text{ für } x = \infty,$$

woraus folgt, daß beim fortgesetzten Wachsen der Logarithmen und ihrer zugehörigen Zahlen diese Zahlen schneller als ihre Logarithmen wachsen.

3. **Beispiel.** $y = (a - x)\; tg\,\frac{\pi x}{2a}$ giebt $y = 0 \cdot \infty$ für $x = a$. Aber

$y = \frac{a - x}{\frac{1}{tg\,\frac{\pi x}{2a}}} = \frac{a - x}{cot\,\frac{\pi x}{2a}}$ für $x = a$ giebt $y = \frac{0}{0}$, daher

$$\partial Fx = -\,\partial x, \text{ und } \partial fx = \partial\, cot\,\frac{\pi x}{2a} = \frac{-\pi\,\partial x}{2a\left(sin\,\frac{\pi x}{2a}\right)^2}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{2a\left(sin\,\frac{\pi x}{2a}\right)^2}{\pi}, \text{ folglich } y = \frac{2a}{\pi} \text{ für } x = a.$$

4. **Beispiel.** $y = \frac{a^x.(b+cx)}{d+ex}$ für $x = \infty$ zu finden, giebt $y = \frac{\frac{b}{x}+c}{\frac{d}{x}+e}a^x$, also (§. 10.) $y = \frac{c}{e}a^x$ für $x = \infty$, daher wird nach §. 37.

$$\frac{a^x(b+cx)}{d+ex} = \begin{Bmatrix} \infty \text{ wenn } a > 1 \\ 0 \text{ wenn } a < 1 \\ \frac{c}{e} \text{ wenn } a = 1 \end{Bmatrix} \text{ für } x = \infty.$$

§. 226.

Hat man $y = \frac{1}{Fx} - \frac{1}{fx}$ und man findet für $x = a$

$$y = \infty - \infty,$$

so darf man nur beide Ausdrücke auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen und erhält alsdann

$$y = \frac{fx - Fx}{Fx fx},$$

so daß hienach leicht ein bestimmter Werth für y gefunden wird.

1. **Beispiel.** $y = \frac{1}{lg\,x} - \frac{x}{lg\,x}$ für $x = 1$ zu finden, giebt $y = \infty - \infty$. Aber $y = \frac{1-x}{lg\,x}$ giebt für $x = 1$; $y = \frac{0}{0}$ also

$$\frac{\partial(1-x)}{\partial\,lg\,x} = \frac{-\partial x}{\frac{\partial x}{x}} = -x, \text{ also } y = -1 \text{ für } x = 1.$$

2. **Beispiel.** $y = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ für $x = 1$ giebt $y = \infty - \infty$. Aber $y = -\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x}$; also $y = -\frac{1}{2}$ für $x = 1$.

3. **Beispiel.** $y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lg\,x}$ für $x = 1$ giebt $\infty - \infty$. Aber $y = \frac{x\,lg\,x - x + 1}{(x-1)\,lg\,x}$ für $x = 1$ giebt $\frac{0}{0}$, also §. 224.

$$\frac{\partial Fx}{\partial fx} = \frac{1 + lg\,x - 1}{1 + lg\,x - \frac{1}{x}} = \frac{x\,lg\,x}{x + lg\,x - 1} \text{ für } x = 1 \text{ giebt } \frac{0}{0}, \text{ daher}$$

$$\frac{\partial^2 Fx}{\partial^2 fx} = \frac{1 + lg\,x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x + x\,lg\,x}{x+1}; \text{ also } y = \tfrac{1}{2} \text{ für } x = 1.$$

§. 227.

In vielen Fällen kann man die unbestimmt scheinenden Werthe einer Funkzion dadurch leicht angeben, daß man diejenigen Ausdrücke der veränderlichen Größe, welche unbestimmt bleiben, in Reihen auflöst, in denselben den gegebenen bestimmten Werth statt der veränderlichen Größe einführt und die etwa vorkommenden gemeinschaftlichen Faktoren im Zähler und Nenner wegschafft.

Diese Verwandlung in Reihen ist besonders dann nöthig, wenn durch fortgesetztes Ableiten keine bestimmte Werthe für die Funkzion erhalten werden, weil alsdann die Regeln §. 224 und 225. gar keine Anwendung finden. Verschwinden für $x = a$ sämmtliche Glieder der Reihen außer einigen welche beständig werden, so ist der besonderer Werth der Funkzion für $x = a$ gefunden. Werden aber für alle Glieder der Reihe beständige Größen erhalten, wenn man $x = a$ setzt, so würde man alsdann den gesuchten Werth nur durch Reihen ausgedrückt finden. Dies zu vermeiden, setze man $a + h$ statt x (wo h eine ganz willkührliche Größe bedeutet), und nach vollendeter Entwickelung, $h = 0$, so erhält man den gesuchten besondern Werth. Das sechste Beispiel wird dies näher erläutern.

1. **Beispiel.** $y = \frac{x}{\sin x}$ für $x = 0$ giebt $y = \frac{0}{0}$. Aber §. 168.

$$y = \frac{x}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \ldots}, \text{ daher}$$

$y = 1$ für $x = 0$ wie §. 162. 3. Beispiel.

2. **Beispiel.** $y = \frac{a^x - b^x}{x}$ für $x = 0$ giebt $y = \frac{0}{0}$. Aber §. 162. (*XVI*)

$$y = \frac{1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \ldots - 1 - \beta x - \frac{1}{2}\beta^2 x^2 - \ldots}{x}, \text{ wenn } \alpha = lg\, a \text{ und}$$

$\beta = lg\, b$ gesetzt wird, oder

$$y = \alpha - \beta + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}x + \ldots$$

$$y = \alpha - \beta = lg\, a - lg\, b = lg\, \frac{a}{b} \text{ für } x = 0.$$

3. **Beispiel.** $y = \frac{x^r}{a^x}$ für $x = \infty$, wenn $a > 1$ und r eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist, wird $y = \frac{\infty}{\infty}$. Setzt man $lg\, a = \alpha$, so wird §. 162. (*XVI*)

$$y = \frac{x^r}{1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 x^3 + \ldots}, \text{ daher, wenn } r \text{ eine positive ganze Zahl ist,}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x^r} + \frac{\alpha}{x^{r-1}} + \ldots + \frac{\alpha^r}{r} + \frac{\alpha^{r+1}x}{r+1} + \frac{\alpha^{r+2}x^2}{r+2} + \ldots},$$

Für $x = \infty$ verschwinden alle Glieder welche x zum Divisor haben, daher wird alsdann

$$y = \frac{1}{\frac{\alpha^r}{r} + \infty + \infty + \infty + \ldots} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Ist r ein positiver Bruch, so wird

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x^r} + \frac{\alpha x^{1-r}}{1} + \frac{\alpha^2 x^{2-r}}{2} + \frac{\alpha^3 x^{3-r}}{3} + \ldots}.$$

Nun ist $x^r = \infty$ für $x = \infty$, wenn r irgend einen positiven Bruch bedeutet, also wird hier ebenfalls $y = 0$ für $x = \infty$, folglich $y = 0$ für $x = \infty$, wenn $a > 1$ und r eine positive ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Eben dies gilt für $r = 0$.

Hiebei ist wohl zu bemerken, daß nur $\infty + \infty + \infty + \ldots\ldots = \infty$ ist, daß man aber nicht berechtigt ist dies auf die Reihe $\infty - \infty + \infty - \infty + \ldots\ldots$ auszudehnen, weil diese Reihe auch jeden andern Werth erhalten kann.

4. **Beispiel.** $y = \frac{x^n}{lg\, x}$ für $x = \infty$, wenn n eine positive Zahl bedeutet, giebt $y = \frac{\infty}{\infty}$. Weil sich aber für $lg\, x$ keine schickliche Reihe angeben läßt, so setze man $lg\, x = u$, alsdann wird $x = e^u$ (§. 164. *III.*), daher (§. 162. *VI.*)

$$y = \frac{e^{nu}}{u} = \frac{1 + nu + \frac{1}{2} n^2 u^2 + \frac{1}{6} n^3 u^3 + \ldots\ldots}{u} = \frac{1}{u} + n + \frac{n^2 u}{2} + \ldots\ldots$$

Für $u = \infty$ wird $x = \infty$, folglich $y = n + \infty + \infty + \ldots\ldots$ oder $y = \infty$ für u oder $x = \infty$.

5. **Beispiel.** $y = x\, lg\, x$ für $x = 0$ giebt $y = -0 . \infty$ (§. 167.). Um einen gebrochenen Ausdruck für y zu erhalten, setze man $lg\, x = -u$, so wird $x = e^{-u} = \frac{1}{e^u}$ (§. 164. *III.*), daher $y = -\frac{u}{e^u}$. Nach dem dritten Beispiele wird $y = 0$ für $u = \infty$ und wegen $x = \frac{1}{e^u}$ wird $x = 0$ für $u = \infty$, daher wird auch in der Gleichung

$y = x\, lg\, x = -\frac{u}{e^u}$ für $x = 0$, $u = \infty$ werden; dies giebt daher $y = 0$ für $x = 0$.

Wäre $y = (1 - x)\, lg\, (1 - x)$ gegeben, so findet man eben so $y = 0$ für $x = 1$.

6. **Beispiel.** $y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x - a)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ giebt $y = \frac{0}{0}$ für $x = a$. Wollte man hier nach §. 224. verfahren, so erhält man durch fortgesetztes Differenziiren stets $\frac{\infty}{\infty}$ statt y, wodurch nichts bestimmt wird. Setzt man aber $a + h$ statt x, also

$$y = \frac{\sqrt{(a + h)} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{(2ah + h^2)}}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} h + \frac{1}{8} a^{-\frac{3}{2}} h^2 + \ldots\ldots - a^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}}{(2a + h)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{h^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} h + \ldots\ldots}{(2a + h)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + \ldots}{(2a + h)^{\frac{1}{2}}},$$

so findet man, wenn $h = 0$ gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2a}} \text{ für } x = a.$$

7. **Beispiel.** $y = (b + cx) . a^x$ für $x = \infty$ zu finden, wenn $a < 1$ ist, giebt (§. 37.) $y = \infty . 0$. Nun ist nach dem dritten Beispiele

$\frac{x}{a^x} = x \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0$ für $x = \infty$, wenn $a > 1$ oder $\frac{1}{a} < 1$ ist, wenn man daher $\frac{1}{a} = a$ setzt, so wird auch

$$x a^x = 0 \text{ für } x = \infty, \text{ wenn } a < 1, \text{ daher ist auch (§. 37.)}$$

$$(b + cx)\, a^x = 0 \text{ für } x = \infty, \text{ wenn } a < 1.$$

Offenbar wird auch

$$(b + cx)\, a^x = \infty \text{ für } x = \infty, \text{ wenn } a = 1 \text{ oder } a > 1 \text{ ist.}$$

8. **Beispiel.** $y = \frac{a^x}{b + cx}$ für $x = \infty$ zu finden, wenn $a > 1$ ist, giebt $y = \frac{\infty}{\infty}$. Aber (§. 162. *XVI.*)

$$y = \frac{1 + ax + \frac{1}{2}a^2x^2 + \ldots}{b + cx} = \frac{\frac{1}{x} + a + \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{6}a^3x^2 + \frac{1}{24}a^4x^3 + \ldots}{\frac{b}{x} + c}.$$

Hierin $x = \infty$ gesetzt, giebt

$$y = \frac{a^x}{b + cx} = \infty \text{ für } x = \infty, \text{ wenn } a > 1 \text{ ist.}$$

Dagegen erhält man (§. 37.)

$$y = \frac{a^x}{b + cx} = 0 \text{ für } x = \infty, \text{ wenn } a = 1 \text{ oder } a < 1 \text{ ist.}$$

9. **Beispiel.** $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ für $x = \infty$ zu finden, wird hier §. 25.

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = 1 + x\,\frac{a}{x} + \frac{x(x-1)}{1.2}\,\frac{a^2}{x^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,\frac{a^3}{x^3} + \ldots$$

$$= 1 + a + 1.\left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{a^2}{2!} + 1.\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{a^3}{3!} + \ldots$$

also für $x = \infty$

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \ldots = e^a \text{ (§. 162. } VI.\text{)},$$

daher für $a = 1$

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}718\,281\,828 \ldots \text{ für } x = \infty.$$

(Im vorstehenden Beispiele würde man ein falsches Resultat erhalten haben, wenn man $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = (1 + 0)^\infty = 1^\infty$ für $x = \infty$ und hienach $y = 1$ für $x = \infty$ gesetzt hätte, weil bei der Ermittelung des besonderen Werths einer Funkzion kein unentwickeltes Glied derselben, wie hier $\frac{a}{x}$, weggelassen werden darf.)

Um zu übersehen, wie sich für verschiedene wachsende Werthe von x die Werthe von $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ der Zahl e immer mehr nähern, setze man

$x = 1$, so wird $y = 2$;
$x = 10$, so wird $y = 2{,}5997 \ldots$
$x = 1000$, so wird $y = 2{,}7169 \ldots$
$x = 1000000$, so wird $y = 2{,}7182803 \ldots$
u. s. w.

10. **Beispiel.** $y = \frac{a^x}{x^r}$ für $x = \infty$, für verschiedene Werthe von a und r zu finden, setze man

I. $a > 1$, so wird §. 162. (*XVI*)

$$y = \frac{1 + ax + \frac{1}{2} a^2 x^2 + \ldots}{x^r}.$$

Ist nun r eine positive ganze Zahl, so wird

$$y = \frac{1}{x^r} + \frac{a}{x^{r-1}} + \ldots + \frac{a^r}{r} + \frac{a^{r+1} x}{r+1} + \frac{a^{r+2} x^2}{r+2} + \ldots$$

und weil für $x = \infty$ alle Glieder, welche x zum Divisor haben, verschwinden, so wird $y = \infty$ für $x = \infty$, wenn $a > 1$ und r eine positive ganze Zahl ist.

Ist r ein positiver Bruch, so wird

$$y = \frac{1}{x^r} + \frac{a x^{1-r}}{1} + \frac{a^2 x^{2-r}}{2} + \frac{a^3 x^{3-r}}{3} + \frac{a^4 x^{4-r}}{4} + \ldots$$

also hier ebenfalls $y = \infty$ für $x = \infty$, wenn r ein positiver Bruch wird. Eben dies gilt für $r = 0$.

Ist r eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so wird offenbar $y = \infty$ für $x = 0$ und $a > 1$.

II. $a = 1$ giebt $y = \frac{1}{x^r}$, daher wird, wenn r eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist, $y = 0$ für $x = \infty$. Wird r eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so erhält man $y = \infty$ für $x = \infty$. Ist $r = 0$, so wird $y = 1$ für $x = \infty$.

III. $a < 1$, so wird, wenn r eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist, $\frac{1}{x^r} = 0$ und (§. 37.) $a^x = 0$ für $x = \infty$, daher $y = 0$ für $x = \infty$. Eben dies gilt für $r = 0$.

Ist r eine negative ganze oder gebrochene Zahl $= -\varrho$, so wird $y = x^\varrho a^x$. Nun setze man $a = \frac{1}{b}$, so wird $b > 1$ wegen $a < 1$, also

$x^\varrho a^x = \frac{x^\varrho}{b^x} = 0$ für $x = \infty$ (3. Beisp.), also auch $\frac{a^x}{x^r} = 0$ für $x = \infty$, wenn r eine negative ganze oder gebrochene Zahl ist. Hieraus folgt, daß für $x = \infty$

$$\frac{a^x}{x^r} = \begin{cases} \infty, \text{ wenn } a > 1 \text{ und } r = 0, \text{ oder eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl,} \\ 0, \text{ wenn } a = 1 \text{ und } r \text{ eine positive ganze oder gebrochene Zahl,} \\ 1, \text{ wenn } a = 1 \text{ und } r = 0, \\ \infty, \text{ wenn } a = 1 \text{ und } r \text{ eine negative ganze oder gebrochene Zahl,} \\ 0, \text{ wenn } a < 1 \text{ und } r = 0, \text{ oder eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl wird.} \end{cases}$$

11. **Beispiel.** $y = a^x . x^r$ für $x = \infty$, wenn a und r verschiedene Werthe erhalten zu bestimmen, setze man

I. $a > 1$, so ist, wenn $r = 0$ oder eine positive ganze oder gebrochene Zahl wird, $y = \infty$ für $x = \infty$.

Ist r eine negative ganze oder gebrochene Zahl $= - \varrho$, so wird $y = \frac{a^x}{x^\varrho}$, daher (10. Beisp.) $y = \infty$ für $x = \infty$.

II. $a = 1$ giebt $y = x^r$, daher wird, wenn r eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist, $y = \infty$ für $x = \infty$. Wird r eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so wird $y = o$ für $x = \infty$. Ist $r = o$, so wird $y = 1$ für $x = \infty$.

III. $a < 1$. Man setze $a = \frac{1}{b}$, so wird $b > 1$, und man erhält $y = \frac{x^r}{b^x}$, daher wird (3. Beisp.), wenn $r = o$ oder eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist, $y = o$ für $x = \infty$.

Ist r eine negative ganze oder gebrochene Zahl $= - \varrho$, so wird $y = \frac{a^x}{x^\varrho}$, daher (10. Beisp.) $y = o$ für $x = \infty$.

Hieraus folgt, daß für $x = \infty$

$$a^x x^r = \begin{cases} \infty, \text{ wenn } a > 1 \text{ und } r = o \text{ oder eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl,} \\ \infty, \text{ wenn } a = 1 \text{ und } r \text{ eine positive ganze oder gebrochene Zahl,} \\ 1, \text{ wenn } a = 1 \text{ und } r = o, \\ o, \text{ wenn } a = 1 \text{ und } r \text{ eine negative ganze oder gebrochene Zahl,} \\ o, \text{ wenn } a < 1 \text{ und } r = o \text{ oder eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl wird.} \end{cases}$$

Achtes Kapitel.

Zerlegung der rationalen gebrochenen Funkzionen in Partial- oder Theilbrüche.

---

§. 228.

Jede algebraische gebrochene Funkzion, von welcher die Abmessungen der unbekannten Größe im Zähler größer als im Nenner sind, läßt sich durch unmittelbare Division in eine ganze und eine solche gebrochene Funkzion verwandeln, in deren Zähler die unbekannte Größe weniger Abmessungen als im Nenner hat. So ist

$$\frac{3x^3 + 2x^2 + 4x + 30}{x + 2} = 3x^2 - 4x + 12 + \frac{6}{x+2},$$

wo $\frac{6}{x+2}$ eine echte gebrochene Funkzion ist.

Eben so kann eine jede gebrochene Funkzion, worin die unbekannten Größen gebrochene oder negative Exponenten enthalten, in eine solche verwandelt werden, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind. Wäre der Ausdruck

$\frac{a + bx^{\frac{n}{m}}}{c + dx + ex^{-p}}$ gegeben, so multiplizire man Zähler und Nenner mit x^{pm}. Dadurch erhält man

$\frac{ax^p + bx^{p+\frac{n}{m}}}{cx^p + dx^{p+1} + e}$, und wenn man alsdann $x = y^m$ setzt, so wird $x^p = y^{mp}$, daher erhält man

$$\frac{ay^{mp} + by^{mp+n}}{cy^{mp} + dy^{mp+m} + e} = \frac{(a + by^n)\,y^{mp}}{cy^{mp} + dy^{mp+m} + e},$$

wo die Exponenten der unbekannten Größe positive ganze Zahlen sind.

Es kann daher jede algebraische gebrochene Funkzion in eine andere verwandelt werden, welche im Zähler weniger Abmessungen als im Nenner hat, und wo die Exponenten der unbekannten Größe ganze positive Zahlen sind, oder die gebrochene Funkzion ist echt und rational.

§. 229.

Lassen sich die Faktoren des Nenners einer gegebenen echten, gebrochenen, rationalen Funkzion angeben, so kann man, mit Hülfe der Lehre von den unbestimmten Koeffizienten, eben so viel Brüche finden, als der Nenner Faktoren hat, welche zusammengenommen der gegebenen Funkzion gleich sind, und deren Nenner mit den einzelnen Faktoren des Nenners der gegebenen Funkzion übereinkommen. Die so entstehenden Brüche heißen **Partial- oder Theilbrüche**, und das Verfahren, durch welches man diese Brüche findet, die **Zerlegung** der gegebenen Funkzion in ihre Partialbrüche.

Wäre daher die echte gebrochene Funkzion $\frac{Fx}{P.Q}$ gegeben, wo F das Funkzionszeichen ist, und die Faktoren des Nenners, welche ebenfalls Funkzionen von x sind, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen, also Primfaktoren unter einander sind; wäre ferner x^p die höchste Potenz von x in P und x^q in Q, so läßt sich beweisen, daß die entsprechenden Partialbrüche auf folgende Art ausgedrückt werden können:

$$\frac{Fx}{P.Q} = \frac{A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_{p-2}x^{p-2} + A_{p-1}x^{p-1}}{P}$$
$$+ \frac{B + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots + B_{q-2}x^{q-2} + B_{q-1}x^{q-1}}{Q};$$

wo A; A_1; A_2; .... B; B_1; B_2; .... noch näher zu bestimmende Koeffizienten sind, welche kein x enthalten. Im Zähler des ersten Partialbruchs sind p und im Zähler des zweiten q, also überhaupt $p + q$ unbekannte Koeffizienten vorhanden.

Die Glieder dieser Gleichung mit PQ multiplizirt, giebt

$$Fx = Q(A + A_1x + \ldots + A_{p-1}x^{p-1}) + P(B + \ldots + B_{q-1}x^{q-1}) \text{ oder}$$
$$0 = Q(A + \ldots + A_{p-1}x^{p-1}) + P(B + \ldots + B_{q-1}x^{q-1}) - Fx.$$

Unter-

Untersucht man die Beschaffenheit vorstehender Produkte, so ist x^q die höchste Potenz von x in Q und x^p in P, daher wird durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation, und wenn alle Glieder nach den Potenzen von x geordnet werden, eine vollständige Gleichung mit allen Potenzen von x bis zu x^{p+q-1} erhalten, oder die auf o reduzirte Gleichung hat $p + q$ Glieder, wovon jedes mit einer Potenz von x multiplizirt ist, weil auch $x^0 = 1$ als eine solche Potenz angesehen werden kann. Nach §. 52. ist aber jedes dieser Glieder = o, wodurch für die unbekannten Koeffizienten eben so viel Gleichungen entstehen, als unbekannte Größen sind. Hieraus folgt, daß die angenommene Form für die Zähler der Partialbrüche auf bestimmte Werthe führt und nach derselben die gegebene gebrochene Funkzion in ihre Partialbrüche zerlegt werden kann. Eben dies gilt, wenn der Nenner aus drei oder mehrern Faktoren besteht.

Soll daher die Form des Zählers aus dem gegebenen Nenner eines Partialbruchs gebildet werden, wenn p der höchste Exponent von x im Nenner ist, so wird der Zähler aus einem ganzen algebraischen Ausdruck welcher alle Potenzen von x bis zur $p-1$sten enthält, oder aus folgenden Gliedern bestehen:

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{p-2} x^{p-2} + A_{p-1} x^{p-1}.$$

Ob einige dieser Glieder wegfallen oder = o werden, läßt sich nur nach der vorzunehmenden Entwickelung beurtheilen.

Wäre $(x^2 + a)^3$ als Nenner eines Partialbruchs gegeben, so ist x^6 die höchste Potenz von x, also wird die Form des Partialbruchs

$$\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5}{(x^2 + a)^3}.$$

Eben so erhält man für den Nenner x^4 den Partialbruch $\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3}{x^4}$.

§. 230.

Zusatz. In den Fällen, wenn der Nenner eines Partialbruchs aus einem Produkt gleicher Faktoren besteht, kann derselbe auch noch unter einer andern Form dargestellt und in so viel besondere Brüche zerlegt werden, als der Exponent des gegebenen Nenners Einheiten enthält. Wäre z. B. $(x^2 + a)^3$ der gegebene Nenner eines Partialbruchs, so ist dieser:

$$\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5}{(x^2 + a)^3};$$

man kann aber auch statt desselben setzen:

$$\frac{B + B_1 x}{x^2 + a} + \frac{B_2 + B_3 x}{(x^2 + a)^2} + \frac{B_4 + B_5 x}{(x^2 + a)^3},$$

wo B; B_1; ... eben so wie A; A_1; ... noch näher zu bestimmende Koeffizienten sind. Daß die letztere Form ebenfalls angenommen werden kann, folgt daraus, weil sie mit der erstern übereinkommt, wenn die letzten drei Brüche auf einen Nenner gebracht und die Zähler addirt werden. Dieser neue Zähler hat alsdann eben die Form wie der vorstehende, und seine Koeffizienten lassen sich eben so wie die Koeffizientrn A; A_1; A_2; .... finden.

Noch leichter übersieht man, daß statt des Partialbruchs $\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3}{x^4}$ folgende vier $\frac{B}{x} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x^3} + \frac{B_3}{x^4}$ gesetzt werden können.

1. Beispiel. Wäre die echte gebrochene Funktion $\frac{4+3x}{x(x-1)(x^2+1)}$ gegeben, welche in ihre Partialbrüche zerlegt werden soll, so setze man:

$$\frac{4+3x}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C+Dx}{x^2+1}, \text{ alsdann ist:}$$

$$4 + 3x = (x-1)(x^2+1)A + x(x^2+1)B + x(x-1)(C+Dx), \text{ oder}$$

$$0 = \left.\begin{array}{l} +A \\ +B \\ +D \end{array}\right| x^3 \left.\begin{array}{l} -A \\ +C \\ -D \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l} +A \\ +B \\ -C \\ -3 \end{array}\right| x \left.\begin{array}{l} -A \\ -4 \end{array}\right| \text{. daher §. 52.}$$

$$\begin{array}{r|l|l} -A-4=0 & A=-4 & \\ A+B-C-3=0 & B-C-7=0 & B-D-3=0 \\ -A+C-D=0 & C-D+4=0 & B+D-4=0, \text{ daher} \\ A+B+D=0 & B+D-4=0 & \end{array}$$

$$A=-4;\ B=\tfrac{7}{2};\ C=-\tfrac{7}{2};\ D=\tfrac{1}{2};\ \text{also}$$

$$\frac{4+3x}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{-4}{x} + \frac{7}{2(x-1)} - \frac{7-x}{2(x^2+1)}.$$

2. Beispiel. Es sey ferner:

$$\frac{1}{x(x^2+ax+b)} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+ax+b}, \text{ also}$$

$$1 = (x^2+ax+b)A + x(B+Cx), \text{ oder}$$

$$0 = \left.\begin{array}{l} +A \\ +C \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l} +aA \\ +B \end{array}\right| x \left.\begin{array}{l} +bA \\ -1 \end{array}\right| \text{ also}$$

$$A=\frac{1}{b};\ B=-\frac{a}{b};\ C=-\frac{1}{b};\ \text{folglich}$$

$$\frac{1}{x(x^2+ax+b)} = \frac{1}{bx} - \frac{a+x}{b(x^2+ax+b)}.$$

3. Beispiel. Es sey:

$$\frac{4+x^2}{(x-2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1};\ \text{also}$$

$$4+x^2 = (x+3)(x-1)^2A + (x-2)(x-1)^2B + (x-2)(x+3)C + (x-2)(x+3)(x-1)D, \text{ daher}$$

$$0 = \left.\begin{array}{l} +A \\ +B \\ +D \end{array}\right| x^3 \left.\begin{array}{l} +A \\ -4B \\ +C \\ -1 \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l} -5A \\ +5B \\ +C \\ -7D \end{array}\right| x \left.\begin{array}{l} +3A \\ -2B \\ -6C \\ +6D \\ -4 \end{array}\right| \text{ oder}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
A = -B - D & B = \frac{C-D-1}{5} & \\
A = 4B - C + 1 & & \\
A = \frac{5B + C - 7D}{5} & B = \frac{2D - C}{10} & C = \frac{4D-3}{7} = \frac{4D+2}{3};\ \text{alſo} \\
A = \frac{2B + 6C - 6D + 4}{3} & B = \frac{3D - 6C - 4}{5} &
\end{array}$$

$$D = -\tfrac{23}{16};\ C = -\tfrac{5}{4};\ B = -\tfrac{13}{80};\ A = \tfrac{8}{5};\ \text{folglich}$$

$$\frac{4+x^2}{(x-2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{8}{5(x-2)} - \frac{13}{80(x+3)} - \frac{5}{4(x-1)^2} - \frac{23}{16(x-1)}.$$

4. **Beiſpiel.** Es ſey ferner:

$$\frac{1+x+x^5}{(x^2-4)x^4} = \frac{A+Bx}{x^2-4} + \frac{C+Dx+Ex^2+Fx^3}{x^4};\ \text{alſo}$$

$$1 + x + x^5 = x^4(A+Bx) + (x^2-4)(C+Dx+Ex^2+Fx^3),\ \text{daher}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|}
o = +B & x^5 + A & x^4 + D & x^3 + C & x^2 - 4D & x - 4C \\
+F & +E & -4F & -4E & -1 & -1 \\
-1 & & & & &
\end{array}$$

Hieraus findet man

$$A = \frac{+1}{16};\ B = \frac{+17}{16};\ C = \frac{-1}{4};\ D = \frac{-1}{4};\ E = \frac{-1}{16};\ F = \frac{-1}{16};\ \text{folglich}$$

$$\frac{1+x+x^5}{(x^2-4)x^4} = \frac{1+17x}{16(x^2-4)} - \frac{4+4x+x^2+x^3}{16x^4}.$$

5. **Beiſpiel.** Wäre ferner:

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)} = \frac{A}{1+ax} + \frac{B}{1+bx} + \frac{C}{1+cx},\ \text{ſo wird hieraus:}$$

$$a' + b'x + c'x^2 = A(1+bx)(1+cx) + B(1+ax)(1+cx) + C(1+ax)(1+bx);\ \text{daher}$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
o = +bcA & x^2 + (b+c)A & x + A & \\
+acB & +(a+c)B & +B & \\
+abC & +(a+b)C & +C & \\
-c' & -b' & -a' & \text{folglich}
\end{array}$$

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)} = \frac{a^2a' - ab' + c'}{(a-b)(a-c)(1+ax)} - \frac{b^2a' - bb' + c'}{(a-b)(b-c)(1+bx)} + \frac{c^2a' - cb' + c'}{(a-c)(b-c)(1+cx)}.$$

6. **Beiſpiel.** Es ſey:

$$\frac{2x+1}{(x^2+2x+5)(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{A+Bx}{x^2+2x+5} + \frac{C+Dx}{x^2+x+1} + \frac{E+Fx}{x^2+1},\ \text{alſo}$$

$$2x + 1 = (x^2+x+1)(x^2+1)(A+Bx) + (x^2+2x+5)(x^2+1)(C+Dx) + (x^2+2x+5)(x^2+x+1)(E+Fx);\ \text{daher}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|}
o = B & x^5 + A & x^4 + A & x^3 + 2A & x^2 + A & x + A \\
D & B & 2B & B & +B & +5C \\
F & C & 2C & 6C & +2C & +5E \\
 & 2D & 6D & 2D & +5D & -1 \\
 & E & 3E & 8E & +7E & \\
 & 3F & 8F & 7F & +5F & \\
 & & & & -2 &
\end{array}$$

Hieraus findet man:

$$\frac{2x+1}{(x^2+2x+5)(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{455+26x}{26.65(x^2+2x+5)} - \frac{2-5x}{13(x^2+x+1)} + \frac{3-4x}{10(x^2+1)}.$$

Die hier angeführten Fälle sind zureichend, die Allgemeinheit des vorstehenden Verfahrens zu zeigen. Weil sich aber das Auffinden der unbekannten Zähler der Partialbrüche noch erleichtern läßt, so folgt die nöthige Anweisung hiezu in den folgenden §§.

§. 231.

Aufgabe. Die echte gebrochene rationale Funkzion $\frac{Fx}{(ax-b)fx}$ in ihre Partialbrüche zu zerlegen.

Auflösung. Man setze $\frac{Fx}{(a-bx)fx} = \frac{A}{ax-b} + \frac{P}{fx}$, wo A eine beständige Größe P aber irgend eine rationale ganze Funkzion von x ist (§. 229.), so erhält man

$$Fx = A.fx + (ax-b)P. \quad [I]$$

Für $ax-b=0$ wird $x=\frac{b}{a}$. Diesen Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt, giebt $F\frac{b}{a} = Af\frac{b}{a}$, also findet man den ersten Zähler

$$(I) \quad A = \frac{F\frac{b}{a}}{f\frac{b}{a}}.$$

Auch erhält man aus der Gleichung $[I]$, $P = \frac{Fx - Afx}{ax-b}$, daher findet man nach (I) den zweiten Zähler

$$(II) \quad P = \frac{f\frac{b}{a}.Fx - F\frac{b}{a}.fx}{(ax-b)f\frac{b}{a}},$$

wo $ax-b$ in den Zähler aufgehen muß, weil P eine ganze Funkzion von x ist. Hienach wird

$$\frac{Fx}{(ax-b)fx} = \frac{F\frac{b}{a}}{(ax-b)f\frac{b}{a}} + \frac{P}{fx}.$$

Für $Fx=1$ wird $F\frac{b}{a}=1$.

§. 232.

Zusatz. In dem zuletzt gefundenen Ausdruck werde $a=-a$ und $b=-b$ gesetzt, so findet man

$$(I) \quad \frac{Fx}{(b-ax)fx} = \frac{F\frac{b}{a}}{(b-ax)f\frac{b}{a}} + \frac{P}{fx}, \text{ und}$$

$$P = \frac{f\frac{b}{a}.Fx - F\frac{b}{a}.fx}{(b-ax)f\frac{b}{a}}.$$

Hierin $a = -a$ gesetzt, giebt

$$(II)\quad \frac{Fx}{(ax+b)fx} = \frac{F\left(-\frac{b}{a}\right)}{(ax+b)f\left(-\frac{b}{a}\right)} + \frac{P}{fx}, \text{ und}$$

$$P = \frac{f\left(-\frac{b}{a}\right).Fx - F\left(-\frac{b}{a}\right).fx}{(ax+b)f\left(-\frac{b}{a}\right)}.$$

Hierin $a = 1$ und $b = 0$ gesetzt, giebt

$$(III)\quad \frac{Fx}{x.fx} = \frac{F}{x.f} + \frac{P}{fx}, \text{ und}$$

$$P = \frac{f.Fx - F.fx}{x.f}.$$

1. **Beispiel.** Wäre $\frac{cx^2}{(x-a)(x^2+b)}$ gegeben, so setze man

$$\frac{cx^2}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{P}{x^2+b}, \text{ so ist:}$$

$Fx = cx^2$; $fx = x^2 + b$, also $Fa = a^2c$; $fa = a^2 + b$, daher

$$A = \frac{Fa}{fa} = \frac{a^2c}{a^2+b}, \text{ folglich}$$

$$\frac{cx^2}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{a^2c}{(a^2+b)(x-a)} + \frac{P}{x^2+b}.$$

Will man P finden, so ist:

$$P = \frac{Fxfa - Fafx}{(x-a)fa} = \frac{bc(x^2-a^2)}{(x-a)(a^2+b)} = \frac{bc(x+a)}{a^2+b}, \text{ daher}$$

$$\frac{cx^2}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{a^2c}{(a^2+b)(x-a)} + \frac{bc(x+a)}{(a^2+b)(x^2+b)}.$$

2. **Beispiel.** Es sey:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{P}{x^2+x+1}, \text{ so ist hier}$$

$Fx = x$; $fx = x^2 + x + 1$, also $F1 = 1$; $f1 = 3$, daher

$$A = \frac{F1}{f1} = \tfrac{1}{3}, \text{ folglich}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{P}{x^2+x+1}.$$

Sucht man P, so ist

$$P = \frac{Fxf1 - F1.fx}{(x-1)f1} = \frac{3x - x^2 - x - 1}{3(x-1)} = \frac{(x-1)(1-x)}{3(x-1)} = \frac{1-x}{3}, \text{ folglich}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1-x}{3(x^2+x+1)}.$$

3. **Beispiel.** Den Bruch $\frac{\alpha+\beta x}{(x+a)(x+b)}$ in seine Partialbrüche zu zerlegen, setze man

$$\frac{\alpha+\beta x}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{P}{x+b}, \text{ so wird}$$

$Fx = \alpha + \beta x$; $fx = x + b$ also $F - a = \alpha - \beta a$; $f - a = b - a$, daher

$$A = \frac{F-a}{f-a} = \frac{\alpha - \beta a}{b-a} = \frac{a\beta - \alpha}{a-b}, \text{ und}$$

$$P = \frac{f-a . Fx - F-a . fx}{(x+a) f-a} = \frac{(b-a)(\alpha+\beta x) - (\alpha - \beta a)(x+b)}{(x+a)(b-a)} = \frac{(x+a)(\beta b - \alpha)}{(x+a)(b-a)} = \frac{\alpha - b\beta}{a-b}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\alpha + \beta x}{(x+a)(x+b)} = \frac{a\beta - \alpha}{(a-b)(x+a)} - \frac{b\beta - \alpha}{(a-b)(x+b)}.$$

4. **Beispiel.** Es sey:

$$\frac{1 - x + x^2}{(1-x)(1-2x+2x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{P}{1-2x+2x^2}, \text{ so ist hier}$$

$Fx = 1 + x + x^2$; $fx = 1 - 2x + 2x^2$, also $F1 = 1$ und $f1 = 1$, daher $A = 1$.

Sucht man P, so wird:

$$P = \frac{Fx . f1 - F1 . fx}{(1-x) f1} = \frac{x - x^2}{1-x} = x, \text{ folglich}$$

$$\frac{1 - x + x^2}{(1-x)(1-2x+2x^2)} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-2x+2x^2}.$$

5. **Beispiel.** Es sey:

$$\frac{4 + 5x + x^2 - 8x^4}{(x+4)x^5} = \frac{A}{x+4} + \frac{P}{x^5}, \text{ so ist hier}$$

$Fx = 4 + 5x + x^2 - 8x^4$; $fx = x^5$, also $F(-4) = -2048$ und $f(-4) = -1024$, daher

$$A = \frac{F(-4)}{f(-4)} = 2.$$

Sucht man P, so wird

$$P = \frac{Fx . f(-4) - F(-4) fx}{(x+4) f(-4)} = \frac{4 + 5x + x^2 - 8x^4 - 2x^5}{x+4} = 1 + x - 2x^4, \text{ folglich}$$

$$\frac{4 + 5x + x^2 - 8x^4}{(x+4)x^5} = \frac{2}{x+4} + \frac{1 + x - 2x^4}{x^5}.$$

6. **Beispiel.** Es sey:

$$\frac{1}{(ax+b)x^m} = \frac{A}{ax+b} + \frac{P}{x^m}, \text{ so ist hier}$$

$Fx = 1$; $fx = x^m$ also $F\left(-\frac{b}{a}\right) = 1$ und $f\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(-\frac{b}{a}\right)^m$, daher

$$P = \frac{\left(\frac{b}{-a}\right)^m - x^m}{(ax+b)\left(\frac{b}{-a}\right)^m} = \frac{b^m - (-ax)^m}{b^m (ax+b)}.$$

Für $m = 2r$ wird $P = \frac{b^{2r} - a^{2r} x^{2r}}{b^{2r}(ax+b)}$, und

für $m = 2r+1$ wird $P = \frac{b^{2r+1} + a^{2r+1} x^{2r+1}}{b^{r2+1}(ax+b)}$, daher findet man nach §. 61. (*II*) und (*III*):

$$\frac{1}{(ax+b)x^{2r}} = \frac{a^{2r}}{b^{2r}(ax+b)} + \frac{b^{2r-1} - ab^{2r-2}x + a^2 b^{2r-3} x^2 - a^3 b^{2r-4} x^3 + \ldots + a^{2r-2} b x^{2r-2} - a^{2r-1} x^{2r-1}}{b^{2r} x^{2r}}$$

$$\frac{1}{(ax+b)x^{2r+1}} = \frac{-a^{2r+1}}{b^{2r+1}(ax+b)} + \frac{b^{2r} - a b^{2r-1} x + a^2 b^{2r-2} x^2 - \ldots - a^{2r-1} b x^{2r-1} + a^{2r} x^{2r}}{b^{2r+1} x^{2r+1}}.$$

Hienach findet man.

$$\frac{1}{(ax+b)x} = \frac{-a}{b(ax+b)} + \frac{1}{bx}$$

$$\frac{1}{(ax+b)x^2} = \frac{a^2}{b^2(ax+b)} + \frac{b-ax}{b^2x^2}$$

$$\frac{1}{(ax+b)x^3} = \frac{-a^3}{b^3(ax+b)} + \frac{b^2-abx+a^2x}{b^3x^3}$$

$$\frac{1}{(ax+b)x^4} = \frac{a^4}{b^4(ax+b)} + \frac{b^3-ab^2x+a^2bx^2-a^3x^3}{b^4x^4}$$

u. s. w.

§. 233.

Aufgabe. Die rationale echte gebrochene Funkzion $\frac{Fx}{(ax-b)^r}$ in ihre Partialbrüche zu zerlegen.

Auflösung. Man setze

$$\frac{Fx}{(ax-b)^r} = \frac{A}{(ax-b)^r} + \frac{A_1}{(ax-b)^{r-1}} + \frac{A_2}{(ax-b)^{r-2}} + \ldots + \frac{A_{r-1}}{ax-b}.$$

Nun ist $Fx = F\left(\frac{b}{a} + x - \frac{b}{a}\right)$, daher §. 176., wenn diese Funkzion nach den Potenzen von $x - \frac{b}{a} = \frac{ax-b}{a}$ entwickelt wird,

$$F\left(\frac{b}{a} + \frac{ax-b}{a}\right) = F\frac{b}{a} + \frac{ax-b}{1!a}F^1\frac{b}{a} + \frac{(ax-b)^2}{2!a^2}F^2\frac{b}{a} + \ldots + \frac{(ax-b)^{r-1}}{(r-1)!a^{r-1}}F^{r-1}\frac{b}{a},$$

oder Fx statt $F\left(\frac{b}{a} + \frac{ax-b}{a}\right)$ gesetzt, und durchgängig durch $(ax-b)^r$ dividirt, giebt

$$(I)\ \frac{Fx}{(ax-b)^r} = \frac{F\frac{b}{a}}{(ax-b)^r} + \frac{F^1\frac{b}{a}}{1!a(ax-b)^{r-1}} + \frac{F^2\frac{b}{a}}{2!a^2(ax-b)^{r-2}} + \frac{F^3\frac{b}{a}}{3!a^3(ax-b)^{r-3}} + \ldots + \frac{F^{r-1}\frac{b}{a}}{(r-1)!a^{r-1}(ax-b)}.$$

Diese Reihe muß früher abbrechen, wenn die höchste Potenz von x in Fx nicht bis zum $r-1$sten Grade steigt.

Zusatz. Für $a = 1$ wird

$$(II)\ \frac{Fx}{(x-b)^r} = \frac{Fb}{(x-b)^r} + \frac{F^1b}{1!(x-b)^{r-1}} + \frac{F^2b}{2!(x-b)^{r-2}} + \ldots + \frac{F^{r-1}b}{(r-1)!(x-b)}$$

und wenn man $-a$ statt a, so wie $-b$ statt b setzt

$$(III)\ \frac{Fx}{(b-ax)^r} = \frac{F\frac{b}{a}}{(b-ax)^r} - \frac{F^1\frac{b}{a}}{1!a(b-ax)^{r-1}} + \frac{F^2\frac{b}{a}}{2!a^2(b-ax)^{r-2}} - \frac{F^3\frac{b}{a}}{3!a^3(b-ax)^{r-3}} + \ldots \mp \frac{F^{r-1}\frac{b}{a}}{(r-1)!a^{r-1}(ax-b)},$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Beispiel. Es sey

$$\frac{x^3+2x^2+3x+1}{(x-2)^4} = \frac{A}{(x-2)^4} + \frac{A_1}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^2} + \frac{A_4}{x-2},$$ so wird

$Fx = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$; $F^1x = 3x^2 + 4x + 3$; $F^2x = 6x + 4$; $F^3x = 6$; $F^4x = 0$, und wegen $x - 2 = 0$; $x = 2$, daher

$A = F2 = 23$; $A_1 = F^1 2 = 23$; $A_2 = \frac{F^2 2}{2!} = 8$; $A_3 = \frac{F^3 2}{3!} = 1$ und $A_4 = 0$, folglich nach (II)

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{(x-2)^5} = \frac{23}{(x-2)^5} + \frac{23}{(x-2)^4} + \frac{8}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

§. 234.

Aufgabe. Die echte gebrochene rationale Funkzion $\frac{Fx}{fx}$ in ihre Partialbrüche zu zerlegen, wenn

$$fx = (ax - b)(a_1x - b_1)(a_2x - b_2)\ldots\ldots(a_rx - b_r) \text{ ist.}$$

Auflösung. Man setze

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A}{ax-b} + \frac{A_1}{a_1x-b_1} + \frac{A_2}{a_2x-b_2} + \ldots\ldots + \frac{A_r}{a_rx-b_r}, \text{ so wird}$$

$$\begin{aligned} Fx = A\,&(a_1x - b_1)(a_2x - b_2)(a_3x - b_3)\ldots\ldots \\ +A_1&(ax - b)(a_2x - b_2)(a_3x - b_3)\ldots\ldots \\ +A_2&(ax - b)(a_1x - b_1)(a_3x - b_3)\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$ daher

$$\left.\begin{aligned} F\frac{b}{a} &= \frac{A}{a^r}(a_1b - ab_1)(a_2b - ab_2)(a_3b - ab_3)\ldots\ldots \\ F\frac{b_1}{a_1} &= \frac{A_1}{a_1^r}(ab_1 - a_1b)(a_2b_1 - a_1b_2)(a_3b_1 - a_1b_3)\ldots\ldots \\ F\frac{b_2}{a_2} &= \frac{A_2}{a_2^r}(ab_2 - a_2b)(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_2 - a_2b_3)\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}[I]$$

Ferner wird nach §. 182. (III)

$$f^1x = a(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\ldots + a_1(ax-b)(a_2x-b_2)\ldots + a_2(ax-b)(a_1x-b_1)\ldots + \ldots$$

daher

$$\begin{aligned} f^1\frac{b}{a} &= \frac{a}{a^r}(a_1b - ab_1)(a_2b - ab_2)(a_3b - ab_3)\ldots\ldots \\ f^1\frac{b_1}{a_1} &= \frac{a_1}{a_1^r}(ab_1 - a_1b)(a_2b_1 - a_1b_2)(a_3b_1 - a_1b_3)\ldots\ldots \\ f^1\frac{b_2}{a_2} &= \frac{a_2}{a_2^r}(ab_2 - a_2b)(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_2 - a_2b_3)\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke mit den vorstehenden bei $[I]$ verglichen, giebt

$$A = \frac{aF\frac{b}{a}}{f^1\frac{b}{a}};\quad A_1 = \frac{a_1F\frac{b_1}{a_1}}{f^1\frac{b_1}{a_1}};\ \ldots\ldots\ A_r = \frac{a_rF\frac{b_r}{a_r}}{f^1\frac{b_r}{a_r}},$$

daher.

daher findet man für

$$fx = (ax - b)(a_1 x - b_1)(a_2 x - b_2) \ldots (a_r x - b_r)$$

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{a F \frac{b}{a}}{(ax - b) f^1 \frac{b}{a}} + \frac{a_1 F \frac{b_1}{a_1}}{(a_1 x - b_1) f^1 \frac{b_1}{a_1}} + \frac{a_2 F \frac{b_2}{a_2}}{(a_2 x - b_2) f^1 \frac{b_2}{a_2}} + \ldots + \frac{a_r F \frac{b_r}{a_r}}{(a_r x - b_r) f^1 \frac{b_r}{a_r}}.$$

Für $Fx = 1$ wird $F\frac{b}{a} = 1$; $F\frac{b_1}{a_1} = 1$ u. s. w.

§. 235.

Zusatz. Für $a = a_1 = a_2 \ldots = a_r = 1$ wird

$$fx = (x - b)(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \ldots (x - b_r) \text{ und}$$

$$(I)\ \frac{Fx}{fx} = \frac{Fb}{(x-b) f^1 b} + \frac{Fb_1}{(x-b_1) f^1 b_1} + \frac{Fb_2}{(x-b_2) f^1 b_2} + \ldots + \frac{Fb_r}{(x-b_r) f^1 b_r},$$

wo $f^1 b = (b - b_1)(b - b_2)(b - b_3)(b - b_4) \ldots (b - b_r)$

$f^1 b_1 = (b_1 - b)(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)(b_1 - b_4) \ldots (b_1 - b_r)$

$f^1 b_2 = (b_2 - b)(b_2 - b_1)(b_2 - b_3)(b_2 - b_4) \ldots (b_2 - b_r)$

. . . .

Statt $a, a_1, a_2 \ldots$ setze man $-a, -a_1, -a_2 \ldots$ und statt $-b, -b_1, -b_2 \ldots$ durchgängig $+1$, so wird

$$fx = (1 - ax)(1 - a_1 x)(1 - a_2 x)(1 - a_3 x) \ldots (1 - a_r x) \text{ und}$$

$$(II)\ \frac{Fx}{fx} = \frac{-a F \frac{1}{a}}{(1-ax) f^1 \frac{1}{a}} - \frac{a_1 F \frac{1}{a_1}}{(1-a_1 x) f^1 \frac{1}{a_1}} - \frac{a_2 F \frac{1}{a_2}}{(1-a_2 x) f^1 \frac{1}{a_2}} - \ldots - \frac{a_r F \frac{1}{a_r}}{(1-a_r x) f^1 \frac{1}{a_r}}$$

wo $f^1 \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^{r-1}} (a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) \ldots (a - a_r)$

$f^1 \frac{1}{a_1} = \frac{-1}{a_1^{r-1}} (a_1 - a)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_r)$

$f^1 \frac{1}{a_2} = \frac{-1}{a_2^{r-1}} (a_2 - a)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_r)$

. . . .

Wird vorausgesetzt, daß

$Fx = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_r x^r$, und

$fx = (1 - ax)(1 - a_1 x)(1 - a_2 x) + \ldots + (1 - a_r x)$ ist, so findet man nach dem vorstehenden Ausdruck

$$(III)\quad \frac{Fx}{fx} = \frac{a^r b + a^{r-1} b_1 + a^{r-2} b_2 + \ldots + a b_{r-1} + b_r}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_r)(1-ax)}$$

$$+ \frac{a_1^r b + a_1^{r-1} b_1 + a_1^{r-2} b_2 + \ldots + a_1 b_{r-1} + b_r}{(a_1-a)(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_r)(1-a_1 x)}$$

$$+ \frac{a_2^r b + a_2^{r-1} b_1 + a_2^{r-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{r-1} + b_r}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_r)(1-a_2 x)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{a_r^r b + a_r^{r-1} b_1 + a_r^{r-2} b_2 + \ldots + a_r b_{r-1} + b_r}{(a_r-a)(a_r-a_1)(a_r-a_2)\ldots(a_r-a_{r-1})(1-a_r x)}.$$

1. Beispiel. Es sey

$$\frac{2+3x}{(x-4)(x-1)x(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x+3},$$

so wird hier

$$\begin{array}{ll} Fx = 2 + 3x \text{ und} & fx = (x-4)(x-1)x(x+3), \text{ also} \\ F4 = 14 & f'4 = (4-1)(4-0)(4+3) = 84 \\ F1 = 5 & f'1 = (1-4)(1-0)(1+3) = -12 \\ F = 2 & f' = (0-4)(0-1)(0+3) = +12 \\ F-3 = -7 & f'-3 = (-3-4)(-3-1)(-3-0) = -84, \end{array}$$

daher $A = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$; $A_1 = \frac{-5}{12}$; $A_2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ und $A_3 = \frac{-7}{-84} = \frac{1}{12}$, folglich

$$\frac{2+3x}{(x-4)(x-1)x(x+3)} = \frac{1}{6(x-4)} - \frac{5}{12(x-1)} + \frac{1}{6x} + \frac{1}{12(x+3)}.$$

2. Beispiel. Es sey

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{1}{(x-b)(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_r)}$$

gegeben, und setzt man

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A}{x-b} + \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{x-b_2} + \ldots + \frac{A_r}{x-b_r},$$

so wird hier $Fx = 1$, daher nach (I)

$$A = \frac{1}{(b-b_1)(b-b_2)(b-b_3)\ldots(b-b_r)};$$

$$A_1 = \frac{1}{(b_1-b)(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots(b_1-b_r)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_r = \frac{1}{(b_r-b)(b_r-b_1)(b_r-b_2)\ldots(b_r-b_{r-1})},$$

oder wenn man $A = \frac{1}{B}$; $A_1 = \frac{1}{B_1}$; $A_2 = \frac{1}{B_2}$; .... setzt, so wird

$$B = (b - b_1)(b - b_2)(b - b_3) \ldots . (b - b_r)$$
$$B_1 = (b_1 - b)(b_1 - b_2)(b_1 - b_3) \ldots . (b_1 - b_r)$$
$$B_2 = (b_2 - b)(b_2 - b_1)(b_2 - b_3) \ldots . (b_2 - b_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_r = (b_r - b)(b_r - b_1)(b_r - b_2) \ldots . (b_r - b_{r-1}),$$ und
$$\frac{Fx}{fx} = \frac{1}{B(x-b)} + \frac{1}{B_1(x-b_1)} + \frac{1}{B_2(x-b_2)} + \ldots . + \frac{1}{B_r(x-b_r)}$$
mit Ausnahme von $r = o$.

3. **Beispiel.** Es sey
$$\frac{Fx}{fx} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-nx+x)(1-nx)}$$
gegeben, und setzt man
$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1-2x} + \frac{A_3}{1-3x} + \ldots . + \frac{A_{n-1}}{1-nx+x} + \frac{A_n}{1-nx},$$
so wird nach (III) $Fx = 1$; $b = 1$; $b_1 = b_2 = \ldots . = o$
$$a = 1;\ a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ \ldots\ a_r = n,$$ daher
$$A_1 = \frac{\mp 1}{1.2.3.4\ldots(n-1)} = \frac{\mp 1}{(n-1)!} = \frac{\mp n}{n!}$$
$$A_2 = \frac{\pm 2^{n-1}}{1.1.2.3\ldots(n-2)} = \frac{\pm 2^n}{2!(n-2)!} = \frac{\pm n_2 . 2^n}{n!}$$
$$A_3 = \frac{\mp 3^{n-1}}{2.1.1.2.3\ldots(n-3)} = \frac{\mp 3^n}{3!(n-3)!} = \frac{\mp n_3 . 3^n}{n!}$$
$$A_4 = \frac{\pm 4^{n-1}}{3.2.1.1.2.3\ldots(n-4)} = \frac{\pm 4^n}{4!(n-4)!} = \frac{\pm n_4 . 4^n}{n!}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \frac{+ n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1} = \frac{+ n^n}{n!}.$$
Hienach wird
$$\frac{Fx}{fx} = \frac{\mp n_1}{n!(1-x)} \pm \frac{n_2 2^n}{n!(1-2x)} \mp \frac{n_3 3^n}{n!(1-3x)} \pm \ldots - \frac{n_1 (n-1)^n}{n!(1-nx+x)} + \frac{1 . n^n}{n!(1-nx)}$$
oder wenn man die Partialbrüche in umgekehrter Ordnung schreibt
$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-nx+x)(1-nx)} =$$
$$+ \frac{n^n}{n!(1-nx)} - \frac{n_1 (n-1)^n}{n!(1-nx+x)} + \frac{n_2 (n-2)^n}{n!(1-nx+2x)} - \ldots \mp \frac{n_3 3^n}{n!(1-3x)} \pm \frac{n_2 2^n}{n!(1-2x)} \mp \frac{n_1}{n!(1-x)}$$
wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten, und $n_1, n_2, n_3 \ldots$ Binomialkoeffizienten sind.

§. 236.

Mit Anwendung der §. 231. gefundenen Auflösung ist man auch im Stande, die gebrochene Funkzion $\frac{Fx}{(ax-b)^r fx}$ in ihre Partialbrüche zu zerlegen. Denn man setze

$\frac{Fx}{(ax-b)^r fx} = \frac{1}{(ax-b)^{r-1}} \cdot \frac{Fx}{(ax-b)fx}$, so erhält man nach §. 231.

$$\frac{Fx}{(ax-b)fx} = \frac{A}{ax-b} + \frac{P}{fx}, \text{ folglich}$$

$$\frac{Fx}{(ax-b)^r fx} = \frac{A}{(ax-b)^r} + \frac{P}{(ax-b)^{r-1} fx}.$$

Mit $\frac{P}{(ax-b)^{r-1} fx}$ verfahre man auf gleiche Weise, so wird

$$\frac{P}{(ax-b)^{r-1} fx} = \frac{A_1}{(ax-b)^{r-1}} + \frac{P_1}{(ax-b)^{r-2} fx},$$

und wenn man auf diese Art fortfährt, erhält man zuletzt

$$\frac{Fx}{(ax-b)^r fx} = \frac{A}{(ax-b)^r} + \frac{A_1}{(ax-b)^{r-1}} + \frac{A_2}{(ax-b)^{r-2}} + \ldots + \frac{A_{r-1}}{ax-b} + \frac{P_{r-1}}{fx}.$$

Wegen eines einfacheren Verfahrens s. m. §. 241.

§. 237.

Statt daß bisher der eine zweitheilige Faktor des Nenners der gegebenen Funkzion nur die erste Potenz von x enthalten hat, so sey r irgend eine ganze Zahl und die zum Zerlegen gegebene echte gebrochene Funkzion nach der bisherigen Bezeichnung

$$\frac{Fx}{(x^r - a) \cdot fx} = \frac{N}{x^r - a} + \frac{P}{fx}.$$

Sucht man nun hieraus den Zähler N, weil alsdann der Zähler P eben so wie §. 232. leicht gefunden werden kann, so erhält man

$$N = \frac{Fx}{fx} - (x^r - a)\frac{P}{fx}, \text{ daher für } x^r - a = 0$$

$$N = \frac{Fx}{fx} \text{ und } x^r = a.$$

Will man nun aus diesen beiden Bedingungen den Zähler N bestimmen, so folgt aus §. 229, I, daß N von der Form:

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{r-1} x^{r-1} \; [I]$$

seyn muß. Hienach wird erfordert, daß $\frac{Fx}{fx}$ mit Hülfe von $x^r = a$ in einen Ausdruck von dieser Form verwandelt werde, d. h. in Fx darf der höchste Exponent von x nicht größer als $r-1$ seyn, und der Nenner fx darf kein x enthalten, weil nur unter diesen Bedingungen $N = \frac{Fx}{fx}$ eine solche rationale ganze Funkzion von x ist. Es kommt also zunächst darauf an, aus Fx alle Potenzen von x, deren Exponenten größer als $r-1$ sind, wegzuschaffen, welches mittelst des Ausdrucks $x^r = a$ leicht ist, denn man hat alsdann $x^{2r} = a^2$; $x^{3r} = a^3$; . . . und $x^{r+1} = ax$; $x^{r+2} = ax^2$; $x^{r+3} = ax^3$; u. s. w. Eben so kann man mittelst dieser Ausdrücke und eines noch anzuführenden Hülfssatzes, alle Werthe von x aus fx wegschaffen, wodurch $N = \frac{Fx}{fx}$ die erforderliche Form [I] erhält. Hiebei ist aber wohl zu bemerken, daß, wenn

x^r; x^{r+1}; x^{r+2}; . . . aus Fx weggeschafft sind, es alsdann nicht erlaubt ist, auch noch x^{r-1}; x^{r-2}; . . . . oder überhaupt niedrigere Potenzen von x aus Fx wegzuschaffen.

Wäre z. B. der zu zerlegende Bruch $\frac{1+x+x^5}{(x^2-4).x^4}$ gegeben, so setze man

$$\frac{1+x+x^5}{(x^2-4).x^4} = \frac{N}{x^2-4} + \frac{P}{x^4}; \text{ alsdann wird}$$

$$1 + x + x^5 = N.x^4 + (x^2 - 4)\,P, \text{ oder}$$

$$N = \frac{1+x+x^5}{x^4} \text{ für } x^2 - 4 = 0; \text{ also wird}$$

$$x^2 = 4;\ x^4 = 16 \text{ und } x^5 = 16x, \text{ daher}$$

$$N = \frac{1+x+x^5}{x^4} = \frac{1+17x}{16}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1+x+x^5}{(x^2-4).x^4} = \frac{1+17x}{16\,(x^2-4)} + \frac{P}{x^4}.$$

Die Bedingung, daß hier $N = \frac{Fx}{fx}$ für $x^2 = 4$ ist, hat im vorstehenden Beispiele den Zähler $N = \frac{1+17x}{16}$ für $x^2 = 4$ gegeben, woraus der Theilbruch $\frac{1+17x}{16(x^2-4)}$ wie §. 230. (4. Beisp.) folgte. Hätte man in dem Zähler $N = \frac{1+17x}{16}$ nun auch noch x dadurch wegschaffen wollen, daß man, wegen $x^2 = 4$, auch abwärts $x = 2$ daraus folgern und diesen Werth statt x in N setzen wollen, so würde man $N = \frac{1+17.2}{16} = \frac{35}{16}$, also statt $\frac{1+17x}{16(x^2-4)}$ den Bruch $\frac{35}{16(x^2-4)}$ erhalten haben. Dies Verfahren wäre aber den vorstehenden Bedingungen zuwider, weil es überhaupt nicht zulässig ist, den veränderlichen Theil des Zählers, in welchem kleinere Abmessungen als im Nenner vorkommen, wegzuschaffen.

Hieraus folgt, daß man aus $x^r - a = 0$, zwar $x^r = a$ und jede höhere Potenz von x bilden kann, daß es aber nicht erlaubt ist, hier noch Werthe von x für geringere Potenzen von x^r wie x^{r-1}; x^{r-2}; . . . . zu bilden, weil sonst N aufhört eine Funkzion von x zu seyn.

Ganz ähnliche Folgerungen entstehen, wenn in der zum Zerlegen gegebenen Funkzion statt des zweitheiligen Faktors $(x^r - a)$ der Faktor $x^r + ax^{r-1} + bx^{r-2} + \ldots + gx + h$ gegeben wäre.

§. 238.

Zusatz. Unter der Voraussetzung, daß in $N = \frac{Fx}{fx}$ für $x^r = a$ alle Potenzen, welche höher als x^{r-1} sind, weggeschafft worden, bezeichne man die dadurch veränderte Funkzion mit

$$N = \frac{[Fx]}{[fx]},$$

wobei zu bemerken ist, daß im vorliegenden Falle $x^r = a$, $x^{2r} = a^2$; $x^{3r} = a^3$; . . . . . $x^{r+1} = ax$; $x^{r+2} = ax^2$; $x^{r+3} = ax^3$; u. s. w. gesetzt werden kann.

Für $a = 0$ wird in dem vorliegenden Falle $x^r = 0$, also auch $x^{r+1} = 0$; $x^{r+2} = 0$, u. s. w., aber eben so wenig als man aus $x^r = a$, auch x^{r-1} ableiten darf, eben so wenig gilt dies, wenn $a = 0$ wird.

Nach den Bedingungen im vorigen §. muß $N = \frac{[Fx]}{[fx]}$ eine rationale ganze Funkzion von x seyn, daher darf im Nenner $[fx]$ kein x vorkommen. Mittelst der nachstehenden Hülfsgleichung (I) ist man im Stande, die veränderlichen Größen aus dem Nenner fx wegzuschaffen und dadurch $\frac{Fx}{fx}$ in eine ganze Funkzion von x zu verwandeln, wie erfordert wird, wenn solche $= N$ seyn soll.

Es sey $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, so ist auch nach bekannten Lehren von den Proportionen

$$(I)\quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta},$$

wovon man sich auch leicht überzeugen kann, wenn mit den Nennern übers Kreuz multiplizirt wird.

Wären nun z. B. die beiden Brüche

$$\frac{a + x}{b + cx^n} = \frac{d + ex^2}{gx^n}$$

gegeben, aus welchen man x^n im Nenner wegschaffen soll, so müssen zuvor die Koeffizienten von x^n einander gleich werden. Dies giebt

$$\frac{ag + gx}{bg + cgx^n} = \frac{cd + cex^2}{cgx^n}.$$

Beide Brüche durch Subtraction mit einander verbunden, geben:

$$\frac{ag + gx - (cd + cex^2)}{bg + cgx^n - cgx^n} = \frac{ag - cd + gx - cex^2}{bg}.$$

§. 239.

Aufgabe. Die gebrochene echte rationale Funkzion $\frac{Fx}{(x^r - a)fx}$ ist gegeben; man soll den Zähler N des Partialbruchs finden, dessen Nenner $x^r - a$ ist.

Auflösung. Man setze

$\frac{Fx}{(x^r - a)fx} = \frac{N}{x^r - a} + \frac{P}{fx}$, wo P eine unbekannte Größe bleibt.

Aus $x^r - a = 0$ wird $x^r = a$; $x^{r+1} = ax$; $x^{r+2} = ax^2$; ..... Bezeichnen nun $[Fx]$ und $[fx]$ diejenigen Werthe, welche aus Fx und fx entstehen, wenn a; ax; ... statt x^r; x^{r+1}; ... gesetzt werden, so kann man den Ausdruck $\frac{[Fx]}{[fx]}$ angeben.

Ist alsdann

I. $[fx]$ eine beständige Größe, so ist $N = \frac{[Fx]}{[fx]}$ (§. 238.).

Man sehe das folgende erste Beispiel.

II. Behält aber der Nenner $[fx]$ noch mehrere Potenzen von x, etwa x^{r-1}; x^{r-2}; x^{r-3}; ..... so bilde man dadurch, daß $\frac{[Fx]}{[fx]}$ im Zähler und Nenner mit x multiplizirt wird, einen neuen Ausdruck, in dessen Nenner, nach Hinwegschaffung von x^r, alsdann x^{r-1} als höchste Potenz von x übrig bleibt. Beide Ausdrücke nach §. 238. (I) mit einander verbunden, geben einen Bruch, in welchen x^{r-2} die höchste Potenz von x ist. Dieser neue Ausdruck werde mit x

im Zähler und Nenner multiplizirt und mit $\frac{[Fx]}{[fx]}$ nach §. 238. (*I*) verbunden, so entsteht daraus ein zweiter Ausdruck, dessen höchste Potenz im Nenner x^{r-2} ist. Beide Ausdrücke mit einander verbunden, geben alsdann einen, dessen höchste Potenz x^{r-3} ist u. s. w., so daß man durch Wiederholung des vorstehenden Verfahrens alle Potenzen von x aus dem Nenner wegschaffen kann, wodurch man zuletzt den Ausdruck für N erhält.

Man siehe das folgende zweite Beispiel.

1. **Beispiel.** Es sey $\frac{x^{13}+8}{(x^6-3)x^{12}} = \frac{N}{x^6-3} + \frac{P}{x^{12}}$ gegeben; man sucht N.

Hier ist $Fx = x^{13} + 8$; $fx = x^{12}$ und $x^6 - 3 = 0$ also $x^6 = 3$; $x^{12} = 9$; $x^{13} = 9x$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{9x+8}{9} = N, \text{ folglich}$$

$$\frac{x^{13}+8}{(x^6-3)x^{12}} = \frac{9x+8}{9(x^6-3)} + \frac{P}{x^{12}}.$$

2. **Beispiel.** Es sey

$$\frac{x^7}{(x^4-2)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)} = \frac{N}{x^4-2} + \frac{P}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} \text{ gegeben; man sucht } N.$$

Hier ist $Fx = x^7$; $fx = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ und $x^4 - 2 = 0$ also $x^4 = 2$; $x^5 = 2x$; $x^6 = 2x^2$; $x^7 = 2x^3$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{2x^3}{x^3+x^2+3x+3} = \left(\frac{2x^4}{x^4+x^3+3x^2+3x}\right) = \frac{4}{x^3+3x^2+3x+2}, \text{ oder}$$

$$\frac{2x^3}{x^3+x^2+3x+3} = \frac{4}{x^3+3x^2+3x+2} = \frac{2x^3-4}{-2x^2+1};$$

$$\frac{2.2x^3}{2x^3+2x^2+6x+6} = \left(\frac{x(2x^3-4)}{-2x^3+x}\right) = \frac{4-4x}{-2x^3+x} = \frac{4x^3+4-4x}{2x^2+7x+6} \text{ oder}$$

$$\frac{2x^3-4}{-2x^2+1} = \frac{4x^3+4-4x}{2x^2+7x+6} = \frac{6x^3-4x}{7x+7}; \text{ ferner}$$

$$\frac{7(2x^3-4)}{-14x^2+7} = \left(\frac{2x(6x^3-4x)}{14x^2+14x}\right) = \frac{24-8x}{14x^2+14x} = \frac{14x^3-8x-4}{14x+7};$$

$$\frac{2(6x^3-4x)}{14x+14} = \frac{14x^3-8x-4}{14x+7} = \frac{-2x^3+4}{7} = N, \text{ folglich}$$

$$\frac{x^7}{(x^4-2)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)} = \frac{4-2x^3}{7(x^4-2)} + \frac{P}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}.$$

Es wird ein für allemal bemerkt, daß diejenigen Ausdrücke, welche durch Vertauschung einer veränderlichen Größe abgekürzt werden müssen, hier in Klammern eingeschlossen sind.

3. **Beispiel.** Es sey $\frac{x^{15}+8}{x^{12}(x^6-3)} = \frac{N}{x^{12}} + \frac{P}{x^6-3}$ gegeben; man sucht N.

Hier ist $Fx = x^{15} + 8$; $fx = x^6 - 3$ und $x^{12} = 0$ also $x^{15} = 0$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{8}{x^6-3} = \left(\frac{8x^6}{x^{12}-3x^6}\right) = \frac{8x^6}{-3x^6};$$

$$\frac{3.8}{3x^6-9} = \frac{8x^6}{-3x^6} = \frac{3.8+8x^6}{-9} = -\frac{8(3+x^6)}{9} = N, \text{ folglich}$$

$$\frac{x^{13}+8}{x^{12}(x^6-3)} = -\frac{8(3+x^6)}{9x^{12}} + \frac{P}{x^6+3}.$$

Nach dem vorstehenden ersten Beispiele war $P = \frac{9x+8}{9}$, also

$$\frac{x^{13}+8}{x^{12}(x^6-3)} = -\frac{8(3+x^6)}{9x^{12}} + \frac{9x+8}{9(x^6+3)}.$$

Wollte man diese Zerlegung nach §. 230. bewirken, so würde dies in sehr weitläuftige Rechnungen verwickeln.

§. 240.

Aufgabe. Die echte gebrochene rationale Funkzion $\frac{Fx}{(x^r+ax^{r-1}+\ldots+g)fx}$ ist gegeben; man soll den Zähler N des Partialbruchs finden, dessen Nenner

$$X = x^r + ax^{r-1} + bx^{r-2} + \ldots + g \text{ ist.}$$

Auflösung. Man setze:

$$\frac{Fx}{Xfx} = \frac{N}{X} + \frac{P}{fx}, \text{ wo } P \text{ unbestimmt bleibt.}$$

Hienach wird

$$Fx = Nfx + PX.$$

Bezeichnen nun $[Fx]$ und $[fx]$ diejenigen Werthe, welche aus Fx und fx entstehen, wenn $-ax^{r-1} - bx^{r-2} - \ldots - g$ statt x^r gesetzt wird, und man bemerkt, daß alsdann $x^r + ax^{r-1} + \ldots + g = 0$ also $X = 0$ werden muß, so erhält man

$$[Fx] = N[fx] \text{ oder } N = \frac{[Fx]}{[fx]}.$$

Aus $x^r = -ax^{r-1} - bx^{r-2} - \ldots - g$ folgt ferner
$x^{r+1} = -ax^r - bx^{r-1} - \ldots - gx$; aber
$-ax^r = a^2x^{r-1} + abx^{r-2} + \ldots + ag$, daher

$$x^{r+1} = (a^2-b)x^{r-1} + (ab-c)x^{r-2} + \ldots + ag.$$

Eben so kann man x^{r+2}; x^{r+3}; .... entwickeln. Mit Hülfe dieser Ausdrücke und durch ein ähnliches Verfahren wie §. 237. 238. und 239. läßt sich der Nenner $[fx]$ in eine beständige Größe verwandeln, und man erhält alsdann den gesuchten Zähler N.

Zur Erleichterung bei der Anwendung dieses Verfahrens kann man sich in nachstehenden Verwandlungen üben.

Für $x^2 - ax - b = 0$ wird:
$x^2 = ax + b$, also $x^3 = ax^2 + bx$ oder
$x^3 = (a^2+b)x + ab$, also $x^4 = (a^2+b)x^2 + abx$, oder
$x^4 = (a^3+2ab)x + (a^2+b)b$;
$x^5 = (a^4+3a^2b+b^2)x + (a^2+2b)ab$;
. . . .

Für

Für $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$ wird:

$x^3 = ax^2 + bx + c$, also $x^4 = ax^3 + bx^2 + cx$ oder

$x^4 = (a^2 + b)x^2 + (ab + c)x + ac$;

$x^5 = (a^3 + 2ab + c)x^2 + (a^2b + ac + b^2)x + (a^2 + b)c$;

. . . .

Ferner für $x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$ oder

$x^4 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ wird:

$x^5 = (a^2 + b)x^3 + (ab + c)x^2 + (ac + d)x + ad$;

$x^6 = (a^3 + 2ab + c)x^3 + (a^2b + ac + b^2 + d)x^2 + (a^2c + ad + bc)x + (a^2 + b)d$;

. . . .

Für $x^7 - 2x^5 + 3x^3 - x + 1$ wird:

$x^7 = 2x^5 - 3x^3 + x - 1$;

$x^8 = 2x^6 - 3x^4 + x^2 - x$, also $x^9 = 2x^7 - 3x^5 + x^3 - x^2$ oder

$x^9 = x^5 - 5x^3 - x^2 + 2x - 2$;

$x^{10} = x^6 - 5x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x$;

$x^{11} = -3x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1$;

u. s. w.

Beispiel. Es sey

$\frac{x^7}{(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - 2)} = \frac{N}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{P}{x^4 - 2}$ gegeben, man sucht N.

Hier ist $Fx = x^7$; $fx = x^4 - 2$ und $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ also $x^5 = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$; $x^6 = 1$; $x^7 = x$, daher.

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{x}{x^4 - 2} = \left(\frac{x^3}{x^6 - 2x^2}\right) = \frac{x^3}{1 - 2x^2};$$

$$\frac{2x}{2x^4 - 4} = \left(\frac{x^5}{x^2 - 2x^4}\right) = \frac{-x^4 - x^3 - x^2 - x - 1}{x^2 - 2x^4} = \frac{x - x^4 - x^3 - x^2 - 1}{-4 + x^2};$$

$$\frac{x^3}{1 - 2x^2} = \frac{2x - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2}{-8 + 2x^2} = \frac{2x - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2}{-7} = N, \text{ oder}$$

$$N = \frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{7}.$$

Nach §. 239. 2. Beisp. ist $P = \frac{4 - 2x^3}{7}$, folglich

$$\frac{x^7}{(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - 2)} = \frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{7(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} + \frac{4 - 2x^3}{7(x^4 - 2)}.$$

§. 241.

Setzt man die echte gebrochene rationale Funkzion

$$\frac{Fx}{(x^r - a)^n fx} = \frac{N}{(x^r - a)^n} + \frac{P}{fx},$$

so läßt sich der Zähler N mittelst ähnlicher Betrachtungen wie §. 240. ausmitteln. Nur ist hiebei zu bemerken, daß die allgemeinste Form des Zählers von N

$= A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{rn-1} x^{rn-1}$ ist, daß also keine Potenz von x, welche niedriger als x^{rn} ist, aus dem Ausdruck $\frac{Fx}{fx}$ hinweggeschaft werden darf (§. 237.). Wenn daher $(x^r - a)^n = 0$ gesetzt wird, so darf man, zur Bewirkung der nöthigen Verwandelungen, nicht $x^r - a = 0$ setzen, sondern es ist nothwendig $x^r - a$ auf die $n$te Potenz zu erheben und daraus x^{rn} zu entwickeln. Nun ist $(x^r - a)^n = x^{rn} - n a x^{rn-r} + \ldots \pm a^n$, daher findet man für $(x^r - a)^n = 0$

$$x^{rn} - n a x^{rn-r} + \ldots \pm a^n = 0, \text{ also}$$
$$x^{rn} = n a x^{rn-r} - \ldots \mp a^n.$$

Diese Bemerkungen gelten ebenfalls, wenn $(x^r + a x^{r-1} + b x^{r-2} + \ldots + g)^n$ der Nenner des zu suchenden Partialbruchs wäre, weil alsdann $x^r + a x^{r-1} + \ldots + g$ auf die $n$te Potenz erhoben und $= 0$ gesetzt werden müßte.

Hienach läßt sich nun jede echte gebrochene rationale Funkzion in ihre Partialbrüche zerlegen, so groß auch die Anzahl der Faktoren des Nenners seyn mag, weil man für jeden einzelnen Faktor des Nenners den zugehörigen Zähler des entsprechenden Partialbruchs finden kann, wenn das Produkt der übrigen Faktoren im Nenner der gegebenen Funkzion $= fx$ gesetzt und die Rechnung nach der vorhergehenden Anleitung ausgeführt wird.

Zur Uebung sind noch mehrere hieher gehörige Beispiele beigefügt.

1. Beispiel. Es sey

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)} = \frac{N}{x^2+1} + \frac{N_1}{x^3+1} + \frac{N_2}{x^4+1};$$

wo $Fx = 1$, also auch $[Fx] = 1$ ist.

1) Für den Nenner $x^2 + 1$ ist

$fx = (x^3+1)(x^4+1)$ und $x^2 + 1 = 0$, also $x^2 = -1$; $x^3 = -x$; $x^4 = 1$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{2-2x} = \left(\frac{x}{2x-2x^2}\right) = \frac{x}{2x+2} = \frac{1+x}{4} = N.$$

2) Für den Nenner $x^3 + 1$ wird:

$fx = (x^2+1)(x^4+1)$ und $x^3 + 1 = 0$, also $x^3 = -1$; $x^4 = -x$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{x^2-x+2} = \left(\frac{x}{x^3-x^2+2x}\right) = \frac{x}{-x^2+2x-1} = \frac{1+x}{1+x};$$

$$\frac{1}{x^2-x+2} = \frac{x(1+x)}{x+x^2} = \frac{1-x-x^2}{-2x+2};$$

$$\frac{2(1+x)}{2+2x} = \frac{1-x-x^2}{-2x+2} = \frac{3+x-x^2}{4} = N_1.$$

3) Für den Nenner $(x^4 + 1)$ wird:

$fx = (x^2+1)(x^3+1)$ und $x^4 + 1 = 0$, oder $x^4 = -1$; $x^5 = -x$; also

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{x^5+x^3-x+1} = \left(\frac{x}{x^4+x^3-x^2+x}\right) = \frac{x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1-x}{2x^2-2x+2};$$

$$\frac{2}{2x^3+2x^2-2x+2} = \frac{x-x^2}{2x^3-2x^2+2x} = \frac{2-x+x^2}{4x^2-4x+2};$$

$$\frac{2(1-x)}{4x^2-4x+4} = \frac{2-x+x^2}{4x^2-4x+2} = \frac{-x-x^2}{2} = N_2, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)} = \frac{1+x}{4(x^2+1)} + \frac{3+x-x^2}{4(x^3+1)} - \frac{x+x^2}{2(x^4+1)}.$$

2. **Beispiel.** Es sey $\frac{x+x^3}{(x^2-a)(x^3-b)} = \frac{N}{x^2-a} + \frac{N_1}{x^3-b}$ gegeben, wo $Fx = x + x^3$ ist.

1) Für den Nenner $x^2 - a$ ist:
$fx = x^3 - b$ und $x^2 - a = 0$, also $x^2 = a$; $x^3 = ax$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{x+ax}{ax-b} = \left(\frac{x^2+ax^2}{ax^2-bx}\right) = \frac{a+a^2}{a^2-bx}, \text{ oder}$$

$$\frac{bx+abx}{abx-b^2} = \frac{a^2+a^3}{a^3-abx} = \frac{a^3+a^2+bx+abx}{a^3-b^2} = \frac{(a+1)(a^2+bx)}{a^3-b^2} = N.$$

2) Für den Nenner $x^3 - b$ wird:
$fx = x^2 - a$ und $x^3 - b = 0$, also $x^3 = b$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{x+b}{x^2-a} = \left(\frac{x^2+bx}{x^3-ax}\right) = \frac{x^2+bx}{b-ax} = \left(\frac{x^3+bx^2}{bx-ax^2}\right) = \frac{b+bx^2}{bx-ax^2};$$

$$\frac{ax+ab}{ax^2-a^2} = \frac{b+bx^2}{bx-ax^2} = \frac{ax+ab+b+bx^2}{bx-a^2};$$

$$\frac{b(x^2+bx)}{b^2-abx} = \frac{a(ax+ab+b+bx^2)}{abx-a^3} = \frac{(a+1)ab+(a^2+b^2)x+(a+1)bx^2}{b^2-a^3} = N_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{x+x^3}{(x^2-a)(x^3-b)} = \frac{(a+1)(a^2+bx)}{(a^3-b^2)(x^2-a)} + \frac{(a+1)ab+(a^2+b^2)x+(a+1)bx^2}{(b^2-a^3)(x^3-b)}.$$

3. **Beispiel.** Es sey $\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{N}{x^2+x+1} + \frac{N_1}{x^2+2x+3}$ gegeben, wo $Fx = x^3 + 1$ ist.

1) Für den Nenner $x^2 + x + 1$ wird:
$fx = x^2 + 2x + 3$ und $x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 = -x - 1$; $x^3 = 1$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{2}{x+2} = \left(\frac{2x}{x^2+2x}\right) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2-2x}{3} = N.$$

2) Für den Nenner $x^2 + 2x + 3$ wird:
$fx = x^2 + x + 1$ und $x^2 + 2x + 3 = 0$, also $x^2 = -2x - 3$; $x^3 = x + 6$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{x+7}{-x-2} = \left(\frac{x^2+7x}{-x^2-2x}\right) = \frac{5x-3}{3} = N_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{2-2x}{3(x^2+x+1)} + \frac{5x-3}{3(x^2+2x+3)}.$$

4. **Beispiel.** Es sey $\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2} = \frac{N}{1+x} + \frac{N_1}{1+x^2} + \frac{N_2}{(1-x)^2}$ gegeben, wo $Fx = 1 + x + x^2$ ist.

1) Für den Nenner $1 + x$ wird:
$fx = (1+x^2)(1-x)^2$ und $1 + x = 0$, also $x = -1$; $x^2 = 1$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{2.4} = \frac{1}{8} = N.$$

2) Für den Nenner $1+x^2$ ist:

$fx=(1+x)(1-x)^2=1-x-x^2+x^3$ und $1+x^2=0$, also $x^2=-1$; $x^3=-x$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]}=\frac{x}{2-2x}=\left(\frac{x^2}{2x-2x^2}\right)=\frac{-1}{2x+2}=\frac{x-1}{4}=N_1.$$

3) Für den Nenner $(1-x)^2$ ist:

$fx=(1+x)(1+x^2)=1+x+x^2+x^3$ und $(1-x)^2=1-2x+x^2=0$, also $x^2=2x-1$; $x^3=3x-2$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]}=\frac{3x}{6x-2}=\left(\frac{3x^2}{6x^2-2x}\right)=\frac{6x-3}{10x-6}, \text{ oder}$$

$$\frac{15x}{30x-10}=\frac{18x-9}{30x-18}=\frac{-3x+9}{8}=N_2, \text{ folglich}$$

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{8(1+x)}+\frac{x-1}{4(1+x^2)}+\frac{9-3x}{8(1-x)^2}.$$

5. **Beispiel.** Es sey $\frac{x^2}{(x-2)^3(x^2+1)}=\frac{N}{(x-2)^3}+\frac{N_1}{x^2+1}$, wo $Fx=x^2$ ist.

1) Für den Nenner $(x-2)^3$ wird

$fx=x^2+1$ und $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8=0$, also $x^3=6x^2-12x+8$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]}=\frac{x^2}{x^2+1}=\left(\frac{x^3}{x^3+x}\right)=\frac{6x^2-12x+8}{6x^2-11x+8};$$

$$\frac{6x^2}{6x^2+6}=\frac{6x^2-12x+8}{6x^2-11x+8}=\frac{12x-8}{11x-2};$$

$$\frac{11x^2}{11x^2+11}=\frac{12x^2-8x}{11x^2-2x}=\frac{8x-x^2}{11+2x};$$

$$\frac{2(12x-8)}{22x-4}=\frac{11(8x-x^2)}{121+22x}=\frac{64x+16-11x^2}{125}=N.$$

2) Für den Nenner x^2+1 ist:

$fx=(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ und $x^2+1=0$, also $x^2=-1$; $x^3=-x$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]}=\frac{-1}{11x-2}=\left(\frac{-x}{11x^2-2x}\right)=\frac{x}{11+2x}, \text{ oder}$$

$$\frac{-2}{22x-4}=\frac{11x}{121+22x}=\frac{11x+2}{125}=N_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{x^2}{(x-2)^3(x^2+1)}=\frac{16+64x-11x^2}{(x-2)^3}+\frac{11x+2}{125(x^2+1)}.$$

6. **Beispiel.** Es sey $\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)(x-1)^3}=\frac{N}{x+1}+\frac{N_1}{x^2+x+1}+\frac{N_2}{(x-1)^3}$ gegeben, wo $Fx=1$ also $[Fx]=1$ ist.

1) Für den Nenner $x+1$ wird:

$fx=(x^2+x+1)(x-1)^3$ und $x+1=0$, also $x=-1$; $x^2=1$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]}=\frac{1}{-1.8}=-\frac{1}{8}=N.$$

2) Für den Nenner x^2+x+1 wird:

$fx=(x+1)(x-1)^3=x^4-2x^3+2x-1$ und $x^2+x+1=0$, also $x^2=-x-1$; $x^3=1$; $x^4=x$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{3x-3} = \left(\frac{x}{3x^2-3x}\right) = \frac{x}{-6x-3}, \text{ oder}$$

$$\frac{2}{6x-6} = \frac{x}{-6x-3} = \frac{2+x}{-9} = N_2.$$

3) Für den Nenner $(x-1)^3$ ist:

$fx = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ und $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$, also $x^3 = 3x^2 - 3x + 1$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{5x^2 - x + 2} = \left(\frac{x}{5x^3 - x^2 + 2x}\right) = \frac{x}{14x^2 - 13x + 5};$$

$$\frac{14}{70x^2 - 14x + 28} = \frac{5x}{70x^2 - 65x + 25} = \frac{14 - 5x}{51x + 3};$$

$$\frac{51}{225x^2 - 51x + 102} = \frac{5x(14 - 5x)}{225x^2 + 15x} = \frac{51 - 70x + 25x^2}{102 - 66x};$$

$$\frac{22(14 - 5x)}{1122x + 66} = \frac{17(51 - 70x + 25x^2)}{1734 - 1122x} = \frac{1175 - 1300x + 425x^2}{1800} = N_2, \text{ oder}$$

$$N_2 = \frac{47 - 52x + 17x^2}{72}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)(x-1)^3} = \frac{-1}{8(x+1)} - \frac{2+x}{9(x^2+x+1)} + \frac{47 - 52x + 17x^2}{72(x-1)^3}.$$

7. **Beispiel.** Es sey $\frac{2x^6 + 7x^2 - 4x}{(x^2+1)^3(2x^4-5)} = \frac{N}{(x^2+1)^3} + \frac{N_1}{2x^4-5}$;
wo $Fx = 2x^6 + 7x^2 - 4x$ ist.

1) Für den Nenner $(x^2+1)^3$ wird:

$fx = 2x^4 - 5$ und $(x^2+1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = 0$, also $x^6 = -3x^4 - 3x^2 - 1$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{2x^6 + 7x^2 - 4x}{2x^4 - 5} = \left(\frac{2x^7 + 7x^4 - 4x^3}{2x^6 - 5x^2}\right) = \frac{6x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 2x}{6x^4 + 11x^2 + 2};$$

$$\frac{3(2x^6 + 7x^2 - 4x)}{6x^4 - 15} = \frac{6x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 2x}{6x^4 + 11x^2 + 2} = \frac{10x^5 - 7x^4 - 21x^3 + 14x}{11x^2 + 17};$$

$$\frac{11(2x^6 + 7x^2 - 4x)}{22x^4 - 55} = \frac{2x^2(10x^5 - 7x^4 - 21x^3 + 14x)}{22x^4 + 34x^2} = \frac{28x^3 - 2x^5 - 35x^2 + 44x + 14}{34x^2 + 55};$$

$$\frac{11(28x^3 - 2x^5 - 35x^2 + 44x + 14)}{374x^2 + 605} = \frac{34(10x^3 - 7x^4 - 21x^2 + 14x)}{374x^2 + 578}$$

$$= \frac{238x^4 - 22x^5 - 32x^3 + 329x^2 + 8x + 154}{27} = N.$$

2) Für den Nenner $2x^4 - 5$ wird:

$fx = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ und $2x^4 - 5 = 0$, also $x^4 = \frac{5}{2}$; $x^5 = \frac{5}{2}x$; $x^6 = \frac{5}{2}x^2$; daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{14x^3 + 2x}{11x^2 + 17} = \left(\frac{14x^2 + 2x^3}{11x^4 + 17x^2}\right) = \frac{4x^3 + 70}{34x^2 + 55}, \text{ oder}$$

$$\frac{34(14x^2 + 2x)}{374x^2 + 578} = \frac{11(4x^3 + 70)}{374x^2 + 605} = \frac{44x^3 - 476x^2 - 68x + 770}{27} = N_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{2x^6 + 7x^2 - 4x}{(x^2+1)^3(2x^4-5)} = \frac{238x^4 - 22x^5 - 32x^3 + 329x^2 + 8x + 154}{27(x^2+1)^3} + \frac{44x^3 - 476x^2 - 68x + 770}{27(2x^4-5)}.$$

8. **Beispiel.** Die Funkzion $\frac{1}{(x^4+a^4)^2}$ in ihre Partialbrüche zu zerlegen.

Es ist $x^4 + a^4 = (x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)(x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)$ (§. 152.), daher

$$\frac{1}{x^4+a^4} = \frac{N}{(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)^2} + \frac{N_1}{(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)^2}, \text{ wo } Fx = 1 \text{ ist.}$$

1) Für den Nenner $(x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)^2$ wird:

$fx = x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 4a^2x^2 + 2a^3x\sqrt{2} + a^4$ und $(x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)^2 = 0$, also $x^4 = 2ax^3\sqrt{2} - 4a^2x^2 + 2a^3x\sqrt{2} - a^4$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{4ax^3\sqrt{2}+4a^3x\sqrt{2}} = \frac{x}{16a^2x^3-12a^3x^2\sqrt{2}+16a^4x-4a^5\sqrt{2}};$$

$$\frac{a}{4a^2x^3\sqrt{2}+4a^4x\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x\sqrt{2}}{4a^2x^3\sqrt{2}-6a^3x^2+4a^4x\sqrt{2}-2a^5} = \frac{a-\frac{1}{4}x\sqrt{2}}{6a^3x^2+2a^5};$$

$$\frac{3a^2}{12a^3x^3\sqrt{2}+12a^5x\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2}(a-\frac{1}{4}x\sqrt{2})}{12a^3x^3\sqrt{2}+4a^5x\sqrt{2}} = \frac{3a^2-2ax\sqrt{2}+x^2}{8a^6x\sqrt{2}};$$

$$\frac{4a^2\sqrt{2}(a-\frac{1}{4}x\sqrt{2})}{24a^5x^2\sqrt{2}+8a^7\sqrt{2}} = \frac{3x(3a^2-2ax\sqrt{2}+x^2)}{24a^6x^2\sqrt{2}} = \frac{4a^3\sqrt{2}-11a^2x+6ax^2\sqrt{2}-3x^3}{8a^7\sqrt{2}} = N.$$

2) Für den Nenner $(x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)^2$ ist:

$fx = x^4 - 2ax^3\sqrt{2} + 4a^2x^2 - 2a^3x\sqrt{2} + a^4$ und $(x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)^2 = 0$, also $x^4 = -2ax^3\sqrt{2} - 4a^2x^2 - 2a^3x\sqrt{2} - a^4$, daher

$$\frac{[Fx]}{[fx]} = \frac{1}{-4ax^3\sqrt{2}-4a^3x\sqrt{2}} = \frac{x}{16a^2x^3+12a^3x^2\sqrt{2}+16a^4x+4a^5\sqrt{2}};$$

$$\frac{a}{-4a^2x^3\sqrt{2}-4a^4x\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x\sqrt{2}}{4a^2x^3\sqrt{2}+6a^3x^2+4a^4x\sqrt{2}+2a^5} = \frac{a+\frac{1}{4}x\sqrt{2}}{6a^3x^2+2a^5};$$

$$\frac{3a^2}{-12a^3x^3\sqrt{2}-12a^5x\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2}(a+\frac{1}{4}x\sqrt{2})}{12a^3x^3\sqrt{2}+4a^5x\sqrt{2}} = \frac{3a^2+2ax\sqrt{2}+x^2}{-8a^5x\sqrt{2}};$$

$$\frac{4a^2\sqrt{2}(a+\frac{1}{4}x\sqrt{2})}{24a^6x^2\sqrt{2}+8a^7\sqrt{2}} = \frac{3x(3a^2+2ax\sqrt{2}+x^2)}{-24a^6x^2\sqrt{2}} = \frac{4a^3\sqrt{2}+11a^2x+6a^2\sqrt{2}+3x^3}{8a^7\sqrt{2}} = N_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{(x^4+a^4)^2} = \frac{4a^3\sqrt{2}-11a^2x+6ax^2\sqrt{2}-3x^3}{8a^7\sqrt{2}(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)^2} + \frac{4a^3\sqrt{2}+11a^2x+6ax^2\sqrt{2}+3x^3}{8a^7\sqrt{2}(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)^2}.$$

§. 242.

In der echten gebrochenen rationalen Funkzion $\frac{Fx}{(x^r + ax^{r-1} + \ldots + g)^n}$ setze man

$$X = x^r + ax^{r-1} + bx^{r-2} + \ldots + g, \text{ so wird}$$

$$\frac{Fx}{X^n} = \frac{N}{X^n} + \frac{N_1}{X^{n-1}} + \frac{N_2}{X^{n-2}} + \ldots + \frac{N_{n-2}}{X^2} + \frac{N_{n-1}}{X}.$$

wo die Zähler N; N_1; .... ebenfalls Funkzionen von x sind deren allgemeinste Form

$$A + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{r-1}x^{r-1} \text{ ist (§. 230.).}$$

Nun setze man zur Abkürzung:

$$F_1x = \frac{Fx - N}{X}; \; F_2x = \frac{F_1x - N_1}{X}; \; F_3x = \frac{F_2x - N_2}{X}; \ldots.$$

so erhält man aus der oben stehenden Gleichung:

$$Fx = N + N_1 X + N_2 X^2 + \ldots + N_{n-2} X^{n-2} + N_{n-1} X^{n-1};$$
$$F_1 x = N_1 + N_2 X + N_3 X^2 + \ldots + N_{n-2} X^{n-3} + N_{n-1} X^{n-2};$$
$$F_2 x = N_2 + N_3 X + N_4 X^2 + \ldots + N_{n-2} X^{n-4} + N_{n-1} X^{n-3};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{n-3} x = N_{n-3} + N_{n-2} X + N_{n-1} X^2;$$
$$F_{n-2} x = N_{n-2} + N_{n-1} X.$$

Für $x^r = -ax^{r-1} - \ldots - g$ wird $X = 0$. Bezeichnen nun $[Fx]$; $[F_1 x]$; $[F_2 x]$; .... diejenigen Werthe, welche entstehen, wenn $-ax^{r-1} - \ldots - g$ statt x^r in Fx; $F_1 x$; $F_2 x$; .... gesetzt wird, so erhält man aus den zuletzt gefundenen Gleichungen:

$$[Fx] = N;\ [F_1 x] = N_1;\ [F_2 x] = N_2;\ \ldots;\ [F_{n-1} x] = N_{n-1};$$

wobei noch zu bemerken ist, daß der Nenner X in die zugehörigen Zähler $Fx - N$; $F_1 x - N_1$; ..., ohne Rest aufgehen muß, weil die Zähler N; N_1; ... also auch die Ausdrücke $\frac{Fx - N}{X}$; $\frac{F_1 x - N_1}{X}$; .... ganze rationale Funkzionen von x seyn müssen.

§. 243.

Aufgabe. Die echte gebrochene rationale Funkzion $\frac{Fx}{(x^r + ax^{r-1} + \ldots + g)^n}$ in ihre Partialbrüche zu zerlegen.

Auflösung. Man setze $X = x^r + ax^{r-1} + bx^{r-2} + \ldots + g$, und

$$\frac{Fx}{X^n} = \frac{N}{X^n} + \frac{N_1}{X^{n-1}} + \frac{N_2}{X^{n-2}} + \ldots + \frac{N_{n-2}}{X^2} + \frac{N_{n-1}}{X}.$$

Aus $X = 0$ wird $x^r = -ax^{r-1} - bx^{r-2} - \ldots - g$, und wenn $[Fx]$; $[F_1 x]$; $[F_2 x]$; .... diejenigen Werthe bedeuten, welche entstehen, wenn $-ax^{r-1} - \ldots - g$ statt x^r in Fx; $F_1 x$; $F_2 x$ gesetzt wird, so findet man:

$$N = [Fx];\qquad F_1 x = \frac{Fx - N}{X};$$
$$N_1 = [F_1 x];\qquad F_2 x = \frac{F_1 x - N_1}{X};$$
$$N_2 = [F_2 x];\qquad F_3 x = \frac{F_2 x - N_2}{X};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_{n-1} = [F_{n-1} x].$$

Hiebei ist noch zu bemerken, daß $F_1 x$; $F_2 x$; .... dadurch bestimmt werden, wenn man mit dem Nenner X in die zugehörigen Zähler $Fx - N$; $F_1 x - N_1$; .... dividirt, weil diese Division jedesmal aufgehen muß.

1. Beispiel. Es sey

$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{(x-2)^5} = \frac{N}{(x-2)^5} + \frac{N_1}{(x-2)^4} + \frac{N_2}{(x-2)^3} + \frac{N_3}{(x-2)^2} + \frac{N_4}{x-2}$, so ist $Fx = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ und $x - 2 = 0$, also $x = 2$; $x^2 = 4$; .... daher

$$N = [Fx] = 23; \quad F_1 x = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 22}{x - 2} = x^2 + 4x + 11;$$

$$N_1 = [F_1 x] = 23; \quad F_2 x = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = x + 6;$$

$$N_2 = [F_2 x] = 8; \quad F_3 x = \frac{x - 2}{x - 2} = 1;$$

$$N_3 = [F_3 x] = 1; \quad F_4 x = \frac{0}{x - 2} = 0, \text{ also}$$

$N_4 = [F_4 x] = 0$, folglich

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{(x-2)^5} = \frac{23}{(x-2)^5} + \frac{23}{(x-2)^4} + \frac{8}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

2. **Beispiel.** Es sey

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{N}{(x^2 + ax + b)^2} + \frac{N_1}{x^2 + ax + b}, \text{ so ist}$$

$$Fx = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 \text{ und } x^2 + ax + b = 0, \text{ also}$$

$$x^2 = - ax - b; \; x^3 = (a^2 - b)x + ab; \text{ daher}$$

$$N = [Fx] = a' - bc' + abd' + (b' - ac' + a^2 d' - bd')x;$$

$$F_1 x = \frac{d'x^3 + c'x^2 - (a^2 d' - ac' - bd')x + bc' - abd'}{x^2 + ax + b} = d'x - ad' + c' = N_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{a' - bc' + abd' + (b' - ac' + a^2 d' - bd')x}{(x^2 + ax + b)^2} + \frac{c' - ad' + d'x}{x^2 + ax + b}.$$

§. 244.

Bei der Zerlegung der gebrochenen Funkzionen war es nöthig, die einzelnen Faktoren des Nenners zu kennen, um daraus die Zähler der Partialbrüche zu finden. So war nach §. 231. $\frac{Fx}{(x-a)\,\varphi x} = \frac{A}{x-a} + \frac{P}{\varphi x}$, und man fand $A = \frac{Fb}{\varphi b}$, welches voraussetzt, daß φx bekannt sey, um daraus φb zu finden. Wäre daher $\frac{Fx}{fx}$ gegeben, und bekannt, daß $x - a$ ein Faktor von fx ist, aber die rationale ganze Funkzion, welche entsteht, wenn man fx durch $x - a$ dividirt, sey unbekannt, so setze man

$$\frac{fx}{x-a} = \varphi x, \text{ alsdann wird}$$

$$\frac{Fx}{(x-a)\,\varphi x} = \frac{A}{x-a} + \frac{P}{\varphi x}.$$

Nimmt man von $fx = (x - a)\,\varphi x$ die erste Ableitung (§. 182.), so wird $f^1 x = \varphi x + (x - a)\,\varphi^1 x$, also

$$f^1 a = \varphi a. \text{ Nun ist}$$

$$Fx = A\varphi x + (x - a)\,P, \text{ daher}$$

$$Fa = A\varphi a, \text{ also}$$

$$Fa = Af^1 a, \text{ folglich } A = \frac{Fa}{f^1 a}.$$

Aus $\frac{Fx}{fx}$ findet man daher, wenn $(x - a)$ ein Faktor von fx ist

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{Fa}{(x-a)f^1 a} + \frac{P}{\varphi x} \text{ oder}$$

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{Fa}{(x-a)f^1 a} + \frac{(x-a)P}{fx}, \text{ und hieraus}$$

$$P = \frac{(x-a)f^1 a . Fx - Fa . fx}{(x-a)^2 . f^1 a}.$$

§. 245.

Aufgabe. Den Bruch $\frac{x^m}{x^n \pm a^n}$ in seine Partialbrüche zu zerlegen, wenn $m < n$ ist.

Auflösung. Nach §. 153. ist $x^2 - 2ax \cos\varphi + a^2$ einer von den Faktoren des Nenners $x^n \pm a^n$, und man erhält daher wie §. 241.

$$\frac{x^m}{x^n \pm a^n} = \frac{N}{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2} + \frac{P}{Q}, \text{ und es wird}$$

$$N = \frac{x^m(x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2)}{x^n \pm a^n} \text{ für } x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2 = 0.$$

In diesem Falle wird aber der Zähler und Nenner dieses Bruchs $= 0$, weil $x^2 - 2ax \cos\varphi + a^2$ ein Faktor von $x^n \pm a^n$ ist, daher, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2}{x^n \pm a^n}$ nach §. 244. behandelt und die ersten Ableitungen nimmt,

$$N = \frac{x^m(2x - 2a\cos\varphi)}{nx^{n-1}} = \frac{x^m(2x^2 - 2ax\cos\varphi)}{nx^n}.$$

Aus $x^2 - 2ax \cos\varphi + a^2 = 0$ folgt $x^n \pm a^n = 0$, also $x^2 = 2ax\cos\varphi - a^2$ und $x^n = \mp a^n$, daher

$$N = \frac{x^m(2ax\cos\varphi - 2a^2)}{\mp na^n} = \mp \frac{2a}{na^n} x^m(x\cos\varphi - a).$$

Damit aus diesem Ausdruck die höheren Potenzen von x, mittelst $x^2 = 2ax\cos\varphi - a^2$ weggeschafft werden können, setze man, um einfache Ausdrücke für diese Potenzen zu erhalten:
$x\sin\varphi = x\sin\varphi$, so wird
$x^2\sin\varphi = x^2\sin\varphi = (2ax\cos\varphi - a^2)\sin\varphi = 2ax\sin\varphi\cos\varphi - a^2\sin\varphi$, oder
$x^2\sin\varphi = ax\sin 2\varphi - a^2\sin\varphi$. Hieraus ferner nach §. 239. (II)
$x^3\sin\varphi = ax^2\sin 2\varphi - a^2 x\sin\varphi = a^2 x(2\sin 2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) - a^3\sin 2\varphi$.

Nun ist §. 146. [51]

$$\begin{aligned}
2\sin n\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi &= \sin(n+1)\varphi, \text{ daher} \\
2\sin 2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi &= \sin 3\varphi \\
2\sin 3\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi &= \sin 4\varphi \\
2\sin 4\varphi\cos\varphi - \sin 3\varphi &= \sin 5\varphi \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\quad \ldots
\end{aligned}$$

Werden diese Sätze nach einander angewandt, so erhält man

$$x^3 \sin\varphi = a^2 x \sin 3\varphi - a^3 \sin 2\varphi$$
$$x^4 \sin\varphi = a^3 x \sin 4\varphi - a^4 \sin 3\varphi$$
$$x^5 \sin\varphi = a^4 x \sin 5\varphi - a^5 \sin 4\varphi$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^m \sin\varphi = a^{m-1} x \sin m\varphi - a^m \sin(m-1)\varphi, \text{ also}$$
$$x^m = a^{m-1} \frac{x \sin m\varphi - a \sin(m-1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Diesen Werth in $N = \mp \frac{2a}{n a^n} x^m (x \cos\varphi - a)$ gesetzt, giebt

$$N = \mp \frac{2a^{m-n}}{n \sin\varphi} [x \sin m\varphi - a \sin(m-1)\varphi] (x \cos\varphi - a)$$
$$= \mp \frac{2a^{m-n}}{n \sin\varphi} [x^2 \sin m\varphi \cos\varphi - ax \sin(m-1)\varphi . \cos\varphi - ax \sin m\varphi + a^2 \sin(m-1)\varphi],$$

oder $2ax \cos\varphi - a^2$ statt x^2 gesetzt, giebt

$$N = \mp \frac{2a^{m+1-n}}{n \sin\varphi} \begin{Bmatrix} + 2x \sin m\varphi \cos\varphi^2 - a \sin m\varphi \cos\varphi \\ - x \sin(m-1)\varphi . \cos\varphi + a \sin(m-1)\varphi \\ - x \sin m\varphi \end{Bmatrix}$$

Man setze $A = 2 \sin m\varphi \cos\varphi^2 - \sin(m-1)\varphi \cos\varphi - \sin m\varphi$, und $B = \sin(m-1)\varphi - \sin m\varphi \cos\varphi$, so wird

$$N = \mp \frac{2a^{m+1-n}}{n \sin\varphi} (Ax + aB).$$ Es ist aber §. 146. [30]

$$\sin(m-1)\varphi = \sin m\varphi \cos\varphi - \cos m\varphi \sin\varphi, \text{ also}$$
$$A = \sin m\varphi \cos\varphi^2 + \cos m\varphi \sin\varphi \cos\varphi - \sin m\varphi, \text{ oder §. 146. [14]}$$
$$A = - \sin m\varphi \sin\varphi^2 + \cos m\varphi \sin\varphi \cos\varphi, \text{ daher}$$
$$\frac{A}{\sin\varphi} = \cos m\varphi \cos\varphi - \sin m\varphi \sin\varphi = \cos(m+1)\varphi \text{ (§. 146. [31])}.$$

Es ist ferner (§. 146. [30])

$$B = \sin m\varphi \cos\varphi - \cos m\varphi \sin\varphi - \sin m\varphi \cos\varphi = - \cos m\varphi \sin\varphi, \text{ daher}$$

$\frac{B}{\sin\varphi} = - \cos m\varphi$. Hieraus findet man

$$N = \mp \frac{2a^{m+1-n}}{n} [x \cos(m+1)\varphi - a \cos m\varphi] = \pm \frac{2a^{m+1-n}}{n} [a \cos m\varphi - x \cos(m+1)\varphi],$$

folglich

$$\frac{x^m}{x^n \pm a^n} = \pm \frac{2 [a \cos m\varphi - x \cos(m+1)\varphi]}{n a^{n-m-1} (x^2 - 2ax \cos\varphi + a^2)} + \frac{P}{Q},$$

wo nach §. 151.

$$\varphi = \frac{4r + 1 \pm 1}{2n} \pi \text{ ist},$$

und r sowohl 0 als jede ganze Zahl bedeutet, für welche der Zähler $4r + 1 \pm 1$ kleiner als der Nenner $2n$ ist, diejenigen Fälle ausgenommen, wo $x^2 - 2ax \cos\varphi + a^2$ zwei gleiche Faktoren erhält.

§. 246.

Die Zerlegung der gebrochenen Funkzionen in Partialbrüche, ist in folgenden Schriften am vollständigsten abgehandelt.

Euler; angef. Einleitung in die Analysis. 1. Buch. 12. Kap. S. 220. u. f.

Cousin; Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Paris. 1796. 4. *Première Partie.* §. 83. *p.* 45. u. f.

Lacroix; Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral. II. édit. Tome II. Paris, 1814. §. 372. *etc.*

Euler; De resolutione fractionum compositarum in simpliciores. Mém. de l'acad. de St. Petersbourg. Tome I. 1809. *p.* 3. u. f.

Neuntes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

I. Von den gewöhnlichen Kettenbrüchen.

§. 247.

Ein **Kettenbruch**, zusammenhängender oder continuirlicher Bruch (*fractio continua*) ist ein solcher, dessen Zähler aus einer ganzen Zahl, der Nenner aber aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, der Nenner dieses Bruchs, wieder aus einer ganzen Zahl und einem Bruch, u. s. w. bestehet. Sind alle Zähler dieser Brüche der Einheit gleich, so heißt ein solcher Kettenbruch ein **gemeiner oder gewöhnlicher**. Man bedient sich der Kettenbrüche mit vielem Vortheile zum Aufsuchen der Näherungswerthe für verschiedene Ausdrücke.

Wäre z. B. der Bruch $\frac{68}{157}$ gegeben, so ist, wenn man denselben umkehrt, $\frac{157}{68} = 2 + \frac{21}{68}$. Ferner $\frac{68}{21} = 3 + \frac{5}{21}$ und $\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$; daher

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2 + \frac{21}{68}};\ \frac{21}{68} = \frac{1}{3 + \frac{5}{21}};\ \frac{5}{21} = \frac{1}{4 + \frac{1}{5}};\ \text{oder auch}$$

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2} + \frac{21}{68};\ \frac{21}{68} = \frac{1}{3} + \frac{5}{21};\ \frac{5}{21} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5},\ \text{also}$$

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2} + \frac{21}{68} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{21},\ \text{folglich}$$

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

wodurch der Bruch $\frac{68}{157}$ in einen Kettenbruch verwandelt ist.

Es sey allgemein $\frac{A_1}{A}$ ein echter Bruch, also $A_1 < A$ und man erhalte durch die Division: $\frac{A}{A_1} = a + \frac{A_2}{A_1}$, wo a den Quotient und A_2 den Rest bedeutet. Ist ferner auf eine ähnliche Art: $\frac{A_1}{A_2} = a_1 + \frac{A_3}{A_2}$; $\frac{A_2}{A_3} = a_2 + \frac{A_4}{A_3}$; $\frac{A_3}{A_4} = a_3 + \frac{A_5}{A_4}$; u. s. w. so findet man hieraus den gegebenen Bruch:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{A_2}{A_1}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{A_3}{A_2}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{A_4}{A_3}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{A_5}{A_4}$$

und überhaupt:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \ldots\ldots$$

Die Glieder a; a_1; a_2; .... heißen erste, zweite, dritte, ... **Quotienten** und die Glieder A_2; A_3; A_4; .... erste, zweite, ... **Reste**; so wie die Brüche $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a_1}$; $\frac{1}{a_2}$; ... **Ergänzungsbrüche** oder **Glieder** des Kettenbruchs heißen.

Bricht der Kettenbruch ab, oder wird einer von den Resten A_2; A_3; A_4; .... $= 0$, so heißt der Kettenbruch **vollständig**; wenn aber die Quotienten wiederkehren, **periodisch**. So ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$$

ein periodischer Kettenbruch.

Derjenige Bruch $\frac{A_1}{A}$, aus welchem der Kettenbruch entstanden ist, heißt in Bezug auf diesen, der **Urbruch**, oder der vollständige Bruch. Bei den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß der Urbruch jedesmal auf die kleinste Benennung gebracht sey.

§. 248.

Zusatz. Bestehen Zähler und Nenner des Urbruchs aus ganzen Zahlen, so muß man bei fortgesetzter Division auf einen Rest $A_n = 1$ kommen, weshalb in diesem Falle der Kettenbruch abbricht oder vollständig wird.

Das angeführte Verfahren zur Bestimmung des Kettenbruchs aus dem gegebenen Urbruche, läßt sich dadurch vereinfachen, daß man beim Aufsuchen der Quotienten a; a_1; a_2; . . . eben so verfährt, als wenn man den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen sucht, weil dies Verfahren mit dem §. 247. überein kommt. Wäre z. B. der Urbruch $\frac{68}{157}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so entsteht folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r|r|l} 68 & 157 & 2 = a \\ & 136 & \\ \hline 21 & 68 & 3 = a_1 \\ & 63 & \\ \hline 5 & 21 & 4 = a_2 \\ & 20 & \\ \hline 1 & 5 & 5 = a_3 \\ & 5 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Es ist daher

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

§. 249.

Aus dem gefundenen Kettenbruche

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a} + \ldots\ldots$$

erhält man durch Zusammensetzung der aufeinander folgenden Ergänzungsbrüche:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{a_1}{a a_1 + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{a_1 a_2 + 1}{(a a_1 + 1) a_2 + a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

$$\frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{(a a_1 a_2 + a + a_2) a_3 + a a_1 + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$$

u. s. w.

Die so entstandenen Brüche heißen Näherungsbrüche (*Fractions convergentes*) und wenn man

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{a_1}{a a_1 + 1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{(a a_1 + 1) a_2 + a}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{(a a_1 a_2 + a_2 + a) a_3 + a a_1 + 1}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3)\, a_4 + a_1 a_2 + 1}{(a a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 + a a_3 + a a_1 + 1)\, a_4 + (a a_1 + 1)\, a_2 + a}$$

u. s. w. setzt, so ist $\frac{N}{M}$ der erste, $\frac{N_1}{M_1}$ der zweite, $\frac{N_2}{M_2}$ der dritte, ... Näherungsbruch.

Vergleicht man die Zähler und Nenner der vorstehenden Näherungsbrüche mit einander, so erhält man

$$N = 1;\ N_1 = a_1 = a_1 N;\ N_2 = a_1 a_2 + 1 = a_2 N_1 + N$$
$$N_3 = (a_1 a_2 + 1)\, a_3 + a_1 = a_3 N_2 + N_1$$
$$N_4 = [(a_1 a_2 + 1)\, a_3 + a_1]\, a_4 + a_1 a_2 + 1 = a_4 N_3 + N_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M = a;\ M_1 = a a_1 + 1 = a_1 M + 1$$
$$M_2 = (a a_1 + 1)\, a_2 + a = a_2 M_1 + M$$
$$M_3 = [(a a_1 + 1)\, a_2 + a]\, a_3 + a a_1 + 1 = a_3 M_2 + M_1$$
$$M_4 = a_4 M_3 + M_2 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt allgemein das Gesetz, nach welchem die aufeinander folgenden Näherungsbrüche gebildet werden

$$\frac{N}{M} = \frac{a.o + 1}{a.1 + o};$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{a_1 N + o}{a_1 M + 1};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{a_2 N_1 + N}{a_2 M_1 + M};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{a_3 N_2 + N_1}{a_3 M_2 + M_1};$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{a_4 N_3 + N_2}{a_4 M_3 + M_2};$$

$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{a_5 N_4 + N_3}{a_5 M_4 + M_3};$$

u. s. w.

wo jeder Näherungsbruch aus den beiden unmittelbar vorhergehenden auf einerlei Art entsteht.

Jeden Näherungsbruch, ohne Kenntniß der unmittelbar vorhergehenden, mittelst der Glieder des Kettenbruchs sehr leicht darzustellen s. m. §. 262.

§. 250.

Die einfache Entstehungsart der aufeinander folgenden Näherungsbrüche aus den beiden unmittelbar vorhergehenden, giebt ein leichtes Mittel, aus jedem gegebenen Urbruche die zugehörigen Näherungsbrüche zu finden, weil man nur nach §. 249. die aufeinander folgenden Quotienten a; a_1; a_2; a_3; .... und mit deren Hülfe alsdann die Näherungsbrüche bestimmt. Wäre z. B. der Urbruch $\frac{216}{1147}$ gegeben, so bestimme man zuerst die Quotienten

```
216 | 1147 | 5 = a
    | 1080 |
      ----
        67 | 216 | 3 = a₁
           | 201 |
             ---
             15 | 67 | 4 = a₂
                | 60 |
                  --
                   7 | 15 | 2 = a₃
                     | 14 |
                       --
                        1 | 7 | 7 = a₄
                          | 7 |
                            -
                            0
```

Zur Vereinfachung der Rechnung bilde man nun folgendes Schema:

Quot.	1 0 Zähler	0 1 Nenner
5		
3		
4		
2		
7		

indem man unter den wagerechten Strich der ersten Vertikalspalte, die aufeinander folgenden Quotienten schreibt. Die zweiten und dritten Vertikalspalten dienen alsdann zur Bestimmung der zusammengehörigen Zähler und Nenner der aufeinander folgenden Näherungsbrüche, wenn zuvor über die zweite Vertikalspalte die Ziffern $\frac{1}{0}$ und über die dritte $\frac{0}{1}$ gesetzt sind. Die Rechnung selbst läßt sich auf folgende Art übersehen

Quot.	1 0 Zähler	0 1 Nenner
5	5 . 0 + 1 = 1	5 . 1 + 0 = 5
3	3 . 1 + 0 = 3	3 . 5 + 1 = 16
4	4 . 3 + 1 = 13	4 . 16 + 5 = 69
2	2 . 13 + 3 = 29	2 . 69 + 16 = 154
7	7 . 29 + 13 = 216	7 . 154 + 69 = 1147

wo man jeden Zähler oder Nenner den allgemeinen Ausdrücken §. 249. gemäß erhält, wenn der nebenstehende Quotient mit der unmittelbar darüberstehenden Zahl multiplizirt und dazu die über dieser stehende Zahl addirt wird. Kürzer erhält die Rechnung folgende Stellung

	1	0
	0	1
5	1	5
3	3	16
4	13	69
2	29	154
7	216	1147

Es ist daher $\frac{1}{5}$ der erste, $\frac{3}{16}$ der zweite, $\frac{13}{69}$ der dritte und $\frac{29}{154}$ der vierte Näherungsbruch, des Urbruchs $\frac{216}{1147}$.

Wollte man aus dem Rechnungsschema

Quot.	1 0 Zähler	0 1 Nenner
a		
a_1		
a_2		
⋮		

die Näherungsbrüche nach dieser Vorschrift zusammensetzen, so findet man solche wie §. 249.

Quot.	1 0 Zähler	0 1 Nenner
a	$a \cdot o + 1$	$a \cdot 1 + o$
a_1	$a_1 1 + o$	$a_1 a + 1$
a_2	$a_2 a_1 + 1$	$a_2(a_1 a + 1) + a$
a_3	$a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1$	$a_3(a_2 a_1 a + a_2 + a) + a_1 a + 1$
. . . . .	. . . .	. . . .

§. 251.

Es ist:

$$NM_1 - N_1 M = N(a_1 M + 1) - a_1 NM \text{ (§. 249.)} = N = +1$$
$$N_1 M_2 - N_2 M_1 = N_1(a_2 M_1 + M) - (a_2 N_1 + N) M_1 = -(NM_1 - N_1 M) = -1$$
$$N_2 M_3 - N_3 M_2 = N_2(a_3 M_2 + M_1) - (a_3 N_2 + N_1) M_2 = -(N_1 M_2 - N_2 M_1) = +1$$
$$N_3 M_4 - N_4 M_3 = N_3(a_4 M_3 + M_2) - (a_4 N_3 + N_2) M_3 = -(N_2 M_3 - N_3 M_2) = -1$$

. . . .

Ferner $\frac{N}{M} - \frac{N_1}{M_1} = \frac{NM_1 - N_1 M}{MM_1}$; $\frac{N_1}{M_1} - \frac{N_2}{M_2} = \frac{N_1 M_2 - N_2 M_1}{M_1 M_2}$;
$\frac{N_2}{M_2} - \frac{N_3}{M_3} = \frac{N_2 M_3 - N_3 M_2}{M_2 M_3}$; u. s. w., daher allgemein

$$\frac{N}{M} - \frac{N_1}{M_1} = \frac{+1}{M M_1}; \qquad \frac{N_3}{M_3} - \frac{N_4}{M_4} = \frac{-1}{M_3 M_4};$$
$$\frac{N_1}{M_1} - \frac{N_2}{M_2} = \frac{-1}{M_1 M_2}; \qquad \frac{N_4}{M_4} - \frac{N_5}{N_5} = \frac{+1}{M_4 M_5};$$
$$\frac{N_2}{M_2} - \frac{N_3}{M_3} = \frac{+1}{M_2 M_3}; \qquad \text{u. s. w.}$$

Hieraus folgt, daß **der Unterschied zweier aufeinander folgenden Näherungsbrüche, jedesmal die Einheit zum Zähler und das Produkt beider Nenner, zum Nenner hat.**

In dem letzten Beispiele waren $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{13}{69}$; $\frac{29}{154}$; $\frac{216}{1147}$; die aufeinander folgenden Näherungsbrüche; man findet daher

$$\frac{1}{5} - \frac{3}{16} = \frac{+1}{5.16};$$
$$\frac{3}{16} - \frac{13}{69} = \frac{-1}{16.69};$$
$$\frac{13}{69} - \frac{29}{154} = \frac{+1}{69.154};$$
$$\frac{29}{154} - \frac{216}{1147} = \frac{-1}{154.1147};$$

§. 252.

Zusatz. Bezeichnen $\frac{N'}{M'}$ und $\frac{N''}{M''}$ irgend zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche, so ist ganz allgemein

$$N' M'' - N'' M' = \pm 1.$$

Hieraus folgt, daß N', M' oder N'', M'' keine gemeinschaftliche Faktoren haben, oder, daß die **Näherungsbrüche $\frac{N'}{M'}$ und $\frac{N''}{M''}$ auf ihre kleinste Benennung gebracht sind.** Denn wenn z. B. N', M' außer der Einheit einen gemeinschaftlichen Faktor hätten, so wäre dieser auch Faktor von $N' M'' - N'' M'$, welches aber nicht seyn kann, weil alle Glieder dieses Ausdrucks ganze Zahlen sind, und $N' M'' - N'' M' = \pm 1$ ist.

§. 253.

Aus §. 247. erhält man

$$A - a A_1 = A_2;$$
$$A_1 - a_1 A_2 = A_3;$$
$$A_2 - a_2 A_3 = A_4;$$
$$A_3 - a_3 A_4 = A_5;$$ u. s. w. Ferner ist §. 249.

$$A_1 M - AN = A_1 a - A = -(A - a A_1) = -A_2$$
$$A_1 M_1 - AN_1 = A_1(a_1 M + 1) - A a_1 N = A_1 + a_1(A_1 M - AN) = A_1 - a_1 A_2 = +A_3$$
$$A_1 M_2 - AN_2 = A_1(a_2 M_1 + M) - A(a_2 N_1 + N) = (A_1 M - AN) + a_2(A_1 M_1 - AN_1) = -A_2 + a_2 A_3 = -A_4$$
$$A_1 M_3 - AN_3 = A_1(a_3 M_2 + M_1) - A(a_3 N_2 + N_1) = (A_1 M_1 - AN_1) + a_3(A_1 M_2 - AN_2) = A_3 - a_3 A_4 = +A_5$$

u. s. w. Da nun

$$\frac{A_1}{A} - \frac{N}{M} = \frac{A_1 M - A N}{A M}; \qquad \frac{A_1}{A} - \frac{N_1}{M_1} = \frac{A_1 M_1 - A N_1}{A M_1};$$

$$\frac{A_1}{A} - \frac{N_2}{M_2} = \frac{A_1 M_2 - A N_2}{A M_2};$$ u. s. w. so ist allgemein

$$\frac{A_1}{A} - \frac{N}{M} = \frac{-A_2}{AM};$$

$$\frac{A_1}{A} - \frac{N_1}{M_1} = \frac{+A_3}{AM_1};$$

$$\frac{A_1}{A} - \frac{N_2}{M_2} = \frac{-A_4}{AM_2};$$

$$\frac{A_1}{A} - \frac{N_3}{M_3} = \frac{+A_5}{AM_3};$$ u. s. w.

Hieraus folgt, daß **die Näherungsbrüche abwechselnd bald größer bald kleiner als der Urbruch $\frac{A_1}{A}$ sind**, dergestalt, daß der erste Näherungsbruch größer, der zweite kleiner u. s. w. ist, oder daß der erste, dritte, fünfte, überhaupt jeder ungerade Näherungsbruch größer und dagegen der zweite, vierte, sechste, überhaupt jeder gerade Näherungsbruch, kleiner als der Urbruch seyn muß.

Nach §. 250. fand man für den Urbruch $\frac{216}{1147}$, die Näherungsbrüche $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{13}{69}$; $\frac{29}{154}$; es ist daher $\frac{1}{5} > \frac{216}{1147}$; $\frac{3}{16} < \frac{216}{1147}$; $\frac{13}{69} > \frac{216}{1147}$; $\frac{29}{154} < \frac{216}{1147}$.

§. 254.

Zusatz. Nach §. 247. ist $A_2 > A_3$; $A_3 > A_4$; $A_4 > A_5$; .... und nach §. 250. ist $M < M_1$; $M_1 < M_2$; $M_2 < M_3$; .... daher

$$\frac{A_2}{AM} > \frac{A_3}{AM_1}; \quad \frac{A_3}{AM_1} > \frac{A_4}{AM_2}; \quad \frac{A_4}{AM_2} > \frac{A_5}{AM_3}; \ldots$$ d. h.

der Unterschied zwischen dem Urbruch und den Näherungsbrüchen wird desto kleiner, je weiter die Rechnung zur Bestimmung der Näherungsbrüche fortgesetzt wird, oder je größer der Nenner des Näherungsbruchs ist.

Nach dem Beispiele §. 249. ist $\frac{216}{1147}$ der Urbruch, daher

$$\frac{216}{1147} - \frac{1}{5} = \frac{-67}{5.1147};$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{+15}{16.1147};$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{13}{69} = \frac{-7}{69.1147};$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{+1}{154.1147};$$

wo jeder folgende Unterschied kleiner als der vorhergehende ist.

§. 255.

Aufgabe. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang eines Kreises werde durch die Zahlen 1:3,1415926 5358979 ausgedrückt, man soll die Näherungsbrüche finden.

Auflösung. Hier ist der Urbruch $\frac{A_1}{A} = \frac{1}{3,1415\ldots}$; wird daher nach §. 250. die Division verrichtet, so erhält man

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & 3,14159265358979 & 3 = a \\
 & 3\;00000000000000 & \\
\hline
 & 14159265358979 & 100000000000000 \mid 7 = a_1 \\
 & & 99114857512853 \\
\hline
 & & 885142487147 \mid 1415926\ldots\ldots
\end{array}$$

u. s. w.

oder $a = 3$; $a_1 = 7$; $a_2 = 15$; $a_3 = 1$; $a_4 = 292$; $a_5 = 1$; .... Hieraus findet man wie §. 250. die Näherungsbrüche:

	1	0
	0	1
3	1	3
7	7	22
15	106	333
1	113	355
292	33102	103993
1	33215	104348
1	66317	208341

und es ist nach §. 253.

$$\frac{1}{3} > \frac{A_1}{A};\ \frac{7}{22} < \frac{A_1}{A};\ \frac{106}{333} > \frac{A_1}{A};\ \frac{113}{355} < \frac{A_1}{A};\ \ldots\ldots$$

Die Unterschiede der aufeinander folgenden Näherungsbrüche, findet man nach §. 251.

§. 256.

Zwischen den aufeinander folgenden Näherungsbrüchen $\frac{N'}{M'}$ und $\frac{N''}{M''}$ befinde sich irgend ein Bruch $\frac{n}{m}$, welcher, ohne Rücksicht ob die Unterschiede bejaht oder verneint sind, dem Bruch $\frac{N''}{M''}$ näher kommt als der Bruch $\frac{N'}{M'}$; so ist zu unterscheiden, ob $\frac{N''}{M''} > \frac{n}{m}$ oder $\frac{N''}{M''} < \frac{n}{m}$ ist.

Wäre $\frac{N''}{M''} > \frac{n}{m}$ und man nimmt den bejahten Unterschied der Brüche $\frac{N'}{M'}$ und $\frac{N''}{M''}$, so wird

$$\frac{N'}{M'} - \frac{N''}{M''} \text{ oder } \frac{N''}{M''} - \frac{N'}{M'} > \frac{N''}{M''} - \frac{n}{m}, \text{ also §. 251.}$$

$$\frac{1}{M'M''} > \frac{N''}{M''} - \frac{n}{m} \text{ oder } \frac{1}{M'M''} > \frac{mN'' - nM''}{mM''}, \text{ daher}$$

$\frac{m}{M'} > mN'' - nM''$. Nach der Voraussetzung war

$\frac{N''}{M''} > \frac{n}{m}$ oder $mN'' > nM''$, daher ist

$mN'' - nM'' = D$ eine positive ganze Zahl, also

$\frac{m}{M'} > D$ oder $m > DM'$, folglich um so mehr

$$m > M'.$$

Wäre hingegen $\frac{N''}{M''} < \frac{n}{m}$, so erhält man wie vorhin
$\frac{1}{M'M''} > \frac{n}{m} - \frac{N''}{M''}$ oder $\frac{1}{M'M''} > \frac{nM'' - mN''}{mM''}$, daher
$\frac{m}{M'} > nM'' - mN''$. Nach der Voraussetzung war
$\frac{N''}{M''} < \frac{n}{m}$ oder $mN'' < nM''$, daher ist
$nM'' - mN'' = D$ eine positive ganze Zahl, also
$\frac{m}{M'} > D$ oder $m > DM'$, folglich auch hier

$$m > M'.$$

Hieraus folgt, **daß jeder Bruch $\frac{n}{m}$, welcher $\frac{N''}{M''}$ näher kommt als $\frac{N'}{M'}$, einen größern Nenner als $\frac{N'}{M'}$ haben muß**, oder zwischen zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen läßt sich kein näherer Bruch angeben, dessen Nenner kleiner wäre als der Nenner des vorhergehenden Näherungsbruchs.

§. 257.

Für irgend einen Näherungsbruch $\frac{N'''}{M'''} = \frac{rN'' + N'}{rM'' + M'}$ sey der Quotient r größer als die Einheit, so lassen sich folgende Brüche bilden:

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{1.N'' + N'}{1.M'' + M'};\ \frac{n_2}{m_2} = \frac{2N'' + N'}{2M'' + M'};\ \frac{n_3}{m_3} = \frac{3N'' + N'}{3M'' + M'};\ \ldots\ \frac{n_{r-1}}{m_{r-1}} = \frac{(r-1)N'' + N'}{(r-1)M'' + M'}.$$

Die Anzahl dieser Brüche ist $r - 1$, und ihre Nenner sind kleiner als M''' und größer als der Nenner M'' des vorhergehenden Bruchs $\frac{N''}{M''}$. Setzt man nun voraus, daß
$\frac{N''}{M''} > \frac{N'''}{M'''}$ also (§. 253.) $\frac{N'}{M'} < \frac{N''}{M''}$ sey, so wird (§. 251.)
$N''M''' - N'''M'' = +1$ und $N'M'' - N''M' = -1$, daher
$\frac{n_{r-1}}{m_{r-1}} - \frac{N'''}{M'''} = \frac{(r-1)N'' + N'}{(r-1)M'' + N'} - \frac{rN'' + N'}{rM'' + N'} = \frac{N'M'' - N''M'}{[(r-1)M'' + M']M'''}$, oder
$\frac{n_{r-1}}{m_{r-1}} - \frac{N'''}{M'''} = \frac{-1}{[(r-1)M'' + M']M'''}$. Ferner ist (§. 251.)
$\frac{N''}{M''} - \frac{N'''}{M'''} = \frac{1}{M''M'''}$, daher, ohne Rücksicht auf das Zeichen vor den Unterschieden,

$$\frac{N''}{M''} - \frac{N'''}{M'''} > \frac{n_{r-1}}{m_{r-1}} - \frac{N'''}{M'''},$$

oder der Bruch $\frac{n_{r-1}}{m_{r-1}}$ nähert sich $\frac{N'''}{M'''}$ mehr als der vorhergehende Näherungsbruch $\frac{N''}{M''}$. [I]

Man erhält ferner:

$$\frac{N''}{M''} - \frac{n_1}{m_1} = \frac{N''}{M''} - \frac{N''+N'}{M''+M'} = \frac{N''M' - N'M''}{M''(M''+M')} = \frac{1}{M''(M''+M')},$$

und auf gleiche Art:

$$\frac{N''}{M''} - \frac{n_2}{m_2} = \frac{1}{M''(2M''+M')}; \quad \frac{N''}{M''} - \frac{n_3}{m_3} = \frac{1}{M''(3M''+M')}; \text{ u. s. w.},$$

folglich ist:

$$\frac{n_1}{m_1} < \frac{n_2}{m_2}; \quad \frac{n_2}{m_2} < \frac{n_3}{m_3}; \quad \frac{n_3}{m_3} < \frac{n_4}{m_4}; \ldots\ldots\ldots$$

also wachsen die Brüche $\frac{n_1}{m_1}$; $\frac{n_2}{m_2}$; .... nach ihrer Ordnung und $\frac{n_{r-1}}{m_{r-1}}$ ist der größte, aber jeder kleiner als $\frac{N''}{M''}$.

Es ist aber $\frac{N''}{M''} > \frac{N'''}{M'''}$, und da der größte Bruch $\frac{n_{r-1}}{m_{r-1}}$ näher an $\frac{N'''}{M'''}$ als $\frac{N''}{M''}$ ist [*I*], so muß auch jeder der Brüche $\frac{n_1}{m_1}$; $\frac{n_2}{m_2}$; ... näher an $\frac{N'''}{M'''}$ liegen als der Bruch $\frac{N''}{M''}$, weil sie sämmtlich kleiner als $\frac{N''}{M''}$ sind.

Eben so läßt sich beweisen, wenn $\frac{N''}{M''} < \frac{N'''}{M'''}$ ist, daß man zwischen diesen beiden Näherungsbrüchen ebenfalls $r - 1$ Brüche angeben kann, wovon jeder $\frac{N'''}{M'''}$ näher kommt als $\frac{N''}{M''}$.

Die Brüche $\frac{n_1}{m_1}$; $\frac{n_2}{m_2}$; $\frac{n_3}{m_3}$; .... heißen eingeschaltete Näherungsbrüche, oder kurz **eingeschaltete Brüche**, auch Nebenbrüche.

Sind nun die beiden auf einander folgenden Näherungsbrüche $\frac{N''}{M''}$ und $\frac{N'''}{M'''}$ gegeben, zwischen welchen $r - 1$ eingeschaltete Brüche liegen, so ist:

$$\begin{aligned} n_{r-1} &= (r-1)N'' + N' = \quad rN'' + N' - N'' = N''' - N''; \\ n_{r-2} &= (r-2)N'' + N' = (r-1)N'' + N' - N'' = n_{r-1} - N''; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{r-1} &= (r-1)M'' + M' = \quad rM'' + M' - M'' = M''' - M''; \\ m_{r-2} &= (r-2)M'' + M' = (r-1)M'' + M' - M'' = m_{r-1} - M''; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus findet man die eingeschalteten Brüche:

$$\frac{n_{r-1}}{m_{r-1}} = \frac{N''' - N''}{M''' - M''};$$

$$\frac{n_{r-2}}{m_{r-2}} = \frac{n_{r-1} - N''}{m_{r-1} - M''};$$

$$\frac{n_{r-3}}{m_{r-3}} = \frac{n_{r-2} - N''}{m_{r-2} - M''};$$

$$\frac{n_{r-4}}{m_{r-4}} = \frac{n_{r-3} - N''}{m_{r-3} - M''}; \text{ u. s. w.}$$

bis man zu einem Nenner gelangt der kleiner als M'' ist, welcher alsdann nicht gilt und die Rechnung abbricht. Die aufeinander folgenden Brüche sind alsdann:

$$\frac{N''}{M''};\ \frac{n_1}{m_1};\ \frac{n_2}{m_2};\ \frac{n_3}{m_3};\ \ldots\ldots\ \frac{n_{r-2}}{m_{r-2}};\ \frac{n_{r-1}}{m_{r-1}};\ \frac{N'''}{M'''}.$$

Uebrigens läßt sich zwischen den Brüchen $\frac{n_1}{m_1};\ \frac{n_2}{m_2};\ \frac{n_3}{m_3};\ \ldots$ kein näherer Bruch zu $\frac{N''}{M''}$ mit einem kleinern Nenner angeben. Der Beweis ist wie §. 256.

§. 258.

Aufgabe. Die zwischen den aufeinander folgenden Näherungsbrüchen $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{13}{69}$; $\frac{29}{154}$; $\frac{216}{1147}$ liegenden Nebenbrüche einzuschalten.

Auflösung. Man bilde durch fortgesetzte Subtraction zweier aufeinander folgenden Näherungsbrüche auf nachstehende Art die eingeschalteten Brüche, und ordne solche dergestalt, daß der zuletzt gefundene eingeschaltete Bruch zuerst geschrieben wird. Die Subtraction wird so lange fortgesetzt, als noch der Nenner des eingeschalteten Bruchs größer als derjenige ist, welchen man abzieht.

Für die Nebenbrüche zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{16}$ findet man

$$\frac{3-1}{16-5}=\frac{2}{11} \text{ und } \frac{2-1}{11-5}=\frac{1}{6};$$

die Folge ist daher

$$\tfrac{1}{5};\ (\tfrac{1}{6});\ (\tfrac{2}{11});\ \tfrac{3}{16};$$

wo die eingeschalteten Brüche zwischen Parenthesen enthalten sind. Für die Brüche zwischen $\frac{3}{16}$ und $\frac{13}{69}$ wird:

$$\frac{13-3}{69-16}=\frac{10}{53};\quad \frac{10-3}{53-16}=\frac{7}{37};\quad \frac{7-3}{37-16}=\frac{4}{21}.$$

Zwischen $\frac{13}{69}$ und $\frac{29}{154}$; $\frac{29-13}{154-69}=\frac{16}{85}$.

Zwischen $\frac{29}{154}$ und $\frac{216}{1147}$; $\frac{216-29}{1147-154}=\frac{187}{993}$; $\frac{187-29}{993-154}=\frac{158}{839}$; $\frac{158-29}{839-154}=\frac{129}{685}$; $\frac{129-29}{685-154}=\frac{100}{531}$;

$$\frac{100-29}{531-154}=\frac{71}{377};\ \frac{71-29}{377-154}=\frac{42}{223}.$$

Die Reihe der Näherungsbrüche und dazwischen liegenden eingeschalteten Brüche für $\frac{216}{1147}$ ist daher:

$\frac{1}{5}$; $(\frac{1}{6})$; $(\frac{2}{11})$; $\frac{3}{16}$; $(\frac{4}{21})$; $(\frac{7}{37})$; $(\frac{10}{53})$; $\frac{13}{69}$; $(\frac{16}{85})$; $\frac{29}{154}$; $(\frac{42}{223})$; $(\frac{71}{377})$; $(\frac{100}{531})$; $(\frac{129}{685})$; $(\frac{158}{839})$; $(\frac{187}{993})$; $\frac{216}{1147}$.

II. Kettenbrüche deren Zähler der Ergänzungsbrüche größer als die Einheit sind.

§. 259.

Statt den Urbruch $\frac{A_1}{A}$ in einen Kettenbruch $\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots$ zu verwandeln, wo sämmtliche Zähler der Ergänzungsbrüche $=1$ sind, könnte man auch dadurch den gegebenen Ur-

bruch in einen Kettenbruch von der Form

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_2}{a_2}+\ldots$$

verwandeln, in welchem die Zähler der Ergänzungsbrüche größer als die Einheit sind, wenn man α willkührlich, aber kleiner als A_1 annimmt und $\frac{A_1}{A}=\frac{\alpha}{R}$ setzt, wo R einen noch näher zu bestimmenden Werth bedeutet. Alsdann ist

$\frac{\alpha A}{A_1}=R$, und wenn man dividirt und die nächste ganze Zahl a als Quotient annimmt, so sey

$\frac{\alpha A}{A_1}=a+\frac{A_2}{A_1}$; alsdann erhält man

$$\frac{A_1}{A}=\frac{\alpha}{R}=\frac{\alpha}{a}+\frac{A_2}{A_1}.$$

Nimmt man ferner α_1 willkührlich, aber kleiner als A_2 an und setzt

$\frac{A_2}{A_1}=\frac{\alpha_1}{R_1}$, so wird $\frac{\alpha_1 A_1}{A_2}=R_1$, also durch die Division

$\frac{\alpha_1 A_1}{A_2}=a_1+\frac{A_3}{A_2}$, daher $\frac{A_2}{A_1}=\frac{\alpha_1}{R_1}=\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{A_3}{A_2}$, und hieraus

$$\frac{A_1}{A}=\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{A_3}{A_2}.$$

Auf ähnliche Art findet man $\frac{\alpha_2 A_2}{A_3}=a_2+\frac{A_4}{A_3}$ u. s. w., daher ganz allgemein

$$\frac{A_1}{A}=\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_2}{a_2}+\frac{\alpha_3}{a_3}+\ldots\ldots$$

wo α; α_1; α_2; .... unter der Bedingung willkührlich angenommene Größen sind, daß $\alpha<A_1$; $\alpha_1<A_2$; $\alpha_2<A_3$; ..... und a; a_1; a_2; ... die höchsten ganzen Zahlen sind, welche bei der Division als Quotienten erhalten werden. Auch ist der vorstehenden Darstellung gemäß $A_1>A_2$; $A_2>A_3$; $A_3>A_4$; ....

Wegen der Willkühr, die bei Annahme der Zähler α; α_1; α_2; .... statt findet, folgt hieraus, daß man einen gegebenen Urbruch $\frac{A_1}{A}$ auf unzählig viele Arten durch einen Kettenbruch vorstellen kann.

§. 260.

Die allgemeinste Form, unter welcher ein Kettenbruch, ohne Rücksicht auf die Entstehung desselben, vorkommen kann, ist:

$$S=\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_2}{a_2}+\frac{\alpha_3}{a_3}+\frac{\alpha_4}{a_4}+\frac{\alpha_5}{a_5}+\ldots\ldots\ldots$$

Werden hier aus den Ergänzungsbrüchen $\frac{\alpha}{a}$; $\frac{\alpha_1}{a_1}$; $\frac{\alpha_2}{a_2}$; ..... eben so wie §. 249. aus $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a_1}$; $\frac{1}{a_2}$; .... die aufeinander folgenden Brüche $\frac{N}{M}$; $\frac{N_1}{M_1}$; $\frac{N_2}{M_2}$; .... gebildet und hier

ebenfalls Näherungsbrüche genannt, so erhält man

$$\frac{N}{M} = \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{\alpha a_1}{\alpha_1 + a a_1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{\alpha \alpha_2 + \alpha a_1 a_2}{a \alpha_2 + (\alpha_1 + a a_1) a_2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{\alpha a_1 \alpha_3 + (\alpha \alpha_2 + \alpha a_1 a_2) a_3}{(\alpha_1 + a a_1) \alpha_3 + (a \alpha_2 + \alpha_1 a_2 + a a_1 a_2) a_3}$$

u. s. w. Man findet daher auf eine ähnliche Art wie §. 249. die Näherungsbrüche:

$$\frac{N}{M} = \frac{1 \cdot \alpha + 0 a}{0 \alpha + 1 a}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{0 \alpha_1 + N a_1}{1 \alpha_1 + M a_1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{N \alpha_2 + N_1 a_2}{M \alpha_2 + M_1 a_2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1 \alpha_3 + N_2 a_3}{M_1 \alpha_3 + M_2 a_3}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{N_2 \alpha_4 + N_3 a_4}{M_2 \alpha_4 + M_3 a_4}$$

$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{N_3 \alpha_5 + N_4 a_5}{M_3 \alpha_5 + M_4 a_5}$$

u. s. w., wo jeder Bruch aus den beiden unmittelbar vorhergehenden auf einerlei Art entsteht.

Auch ist

$N = \alpha$	$M = a$
$N_1 = N a_1$	$M_1 = \alpha_1 + M a_1$
$N_2 = N \alpha_2 + N_1 a_2$	$M_2 = M \alpha_2 + M_1 a_2$
$N_3 = N_1 \alpha_3 + N_2 a_3$	$M_3 = M_1 \alpha_3 + M_2 a_3$
$N_4 = N_2 \alpha_4 + N_3 a_4$	$M_4 = M_2 \alpha_4 + M_3 a_4$
. . . .	. . . .

Ganz allgemein erhält man, wenn $\frac{N_n}{M_n}$ den $(n+1)$sten Näherungsbruch bezeichnet:

$$\frac{N_n}{M_n} = \frac{N_{n-2} \cdot \alpha_n + N_{n-1} \cdot a_n}{M_{n-2} \cdot \alpha_n + M_{n-1} \cdot a_n},$$

und wenn der Kettenbruch bei dem Ergänzungsbruche $\frac{\alpha_r}{a_r}$ abbricht, so wird

$$S = \frac{N_r}{M_r} = \frac{N_{r-2} \cdot \alpha_r + N_{r-1} \cdot a_r}{M_{r-2} \cdot \alpha_r + M_{r-1} \cdot a_r},$$

oder der letzte Näherungsbruch ist der Urbruch selbst.

§. 261.

Um mit Leichtigkeit, auf den Grund der zuletzt erhaltenen Darstellung, aus einem gegebenen Kettenbruche von der angenommenen Form, die Zähler und Nenner der aufeinander folgenden Nä-

Näherungsbrüche zu finden, kann man, mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, folgende Schemas bilden.

I	II	$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ Zähler
α	a	
α_1	a_1	
α_2	a_2	
....	....	

I	II	$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ Nenner
α	a	
α_1	a_1	
α_2	a_2	
....	....	

wo in die erste Vertikalspalte I die Zähler und in II die Nenner der Ergänzungsbrüche des gegebenen Kettenbruchs kommen. Um nun die Zähler oder Nenner der aufeinander folgenden Näherungsbrüche zu finden, wird die nebenstehende Zahl der Spalte I mit der zweiten darüberstehenden multiplizirt, und dazu das Produkt der nebenstehenden Zahl aus der Spalte II in die unmittelbar darüberstehende Zahl, addirt. Hienach entstehen folgende Rechnungen

I	II	$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ Zähler
α	a	$\alpha.1 + a.0$
α_1	a_1	$\alpha_1.0 + a_1\alpha$
α_2	a_2	$\alpha_2\alpha + a_2 a_1\alpha$
α_3	a_3	$\alpha_3 a_1\alpha + a_3(\alpha_2\alpha + a_2 a_1\alpha)$
α_4	a_4	$\alpha_4(\alpha_2\alpha + a_2 a_1\alpha) + a_4(\alpha_3 a_1\alpha + a_3\alpha_2\alpha + a_3 a_2 a_1\alpha)$
....	....	....

I	II	$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ Nenner
α	a	$\alpha.0 + a.1$
α_1	a_1	$\alpha_1 1 + a_1 a$
α_2	a_2	$\alpha_2 a + a_2(\alpha_1 + a_1 a)$
α_3	a_3	$\alpha_3(\alpha_1 + a_1 a) + a_3(\alpha_2 a + a_2\alpha_1 + a_2 a_1 a)$
α_4	a_4	$\alpha_4(\alpha_2 a + a_2\alpha_1 + a_2 a_1 a) + a_4(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_3 a_1 a + a_3\alpha_2 a + a_3 a_2\alpha_1 + a_3 a_2 a_1 a)$
....	....	....

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{\alpha}{a};\ \frac{\alpha a_1}{\alpha_1 + a a_1};\ \frac{\alpha\alpha_2 + \alpha a_1 a_2}{\alpha_2 a + (\alpha_1 + a a_1) a_2};\ \text{u. s. w.}$$

Man hätte auch Zähler und Nenner der Näherungsbrüche durch einerlei Schema, wie §. 250., bestimmen können; nur ist man alsdann leichter einem Rechnungsfehler ausgesetzt.

1. **Beispiel.** Wäre der Kettenbruch $S = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9}$ gegeben, so erhält man die entsprechenden Näherungsbrüche auf folgende Weise, nach der vorstehenden Anleitung

I	*II*	1 0 Zähler
2	3	$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2$
4	5	$4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$
6	7	$6 \cdot 2 + 7 \cdot 10 = 82$
8	9	$8 \cdot 10 + 9 \cdot 82 = 818$

I	*II*	0 1 Nenner
2	3	$2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$
4	5	$4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 19$
6	7	$6 \cdot 3 + 7 \cdot 19 = 151$
8	9	$8 \cdot 19 + 9 \cdot 151 = 1511$

oder auch

I	*II*	1 0	0 1
2	3	2	3
4	5	10	19
6	7	82	151
8	9	818	1511

Die Näherungsbrüche sind $\frac{2}{3}$; $\frac{10}{19}$; $\frac{82}{151}$; $\frac{818}{1511}$.

Will man zur Vermeidung der Rechnungsfehler nur nebeneinander stehende Zahlen multipliziren, so kann man dem Schema auch folgende Gestalt geben:

2 4	3	1 0	0 1
6	5	2	3
8	7	10	19
	9	82	151
		818	1511

2. **Beispiel.** Die Näherungsbrüche zu finden, welche dem Kettenbruch $\frac{1}{1} + \frac{2x}{-1} + \frac{3x}{-1} + \frac{x}{-1} + \frac{x}{1+x}$ entsprechen.

Mittelst der angeführten Schemas erhält man

I	*II*	1 0 Zähler
1	1	1
$2x$	-1	-1
$3x$	-1	$3x+1$
x	-1	$-4x-1$
x	$1+x$	$-x^2-4x-1$

I	*II*	0 1 Nenner
1	1	1
$2x$	-1	$2x-1$
$3x$	-1	$x+1$
x	-1	$2x^2-2x-1$
x	$1+x$	$2x^3+x^2-2x-1$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind daher

$\frac{1}{1}$; $\frac{1}{1-2x}$; $\frac{3x+1}{x+1}$; $\frac{1+4x}{1+2x-2x^2}$ und $\frac{1+4x+x^2}{1+2x-x^2-2x^3}$; auch ist

$$\frac{1+4x+x^2}{1+2x-x^2-2x^3} = \frac{1}{1} + \frac{2x}{-1} + \frac{3x}{-1} + \frac{x}{-1} + \frac{x}{1+x}$$

§. 262.

Die im vorigen §. angegebenen Entwickelungen der Näherungsbrüche ist besonders schwierig, wenn die Ergänzungsbrüche aus Buchstaben bestehen, und die Arbeit wird äußerst ermüdend, wenn man die §. 261. angegebenen Näherungsbrüche nur bis zum sechsten oder siebenten fortsetzen wollte. Es verdient daher das folgende hindenburgsche Verfahren zur Entwickelung der Näherungsbrüche nach der combinatorischen Analysis (m. s. die §. 346. angeführte Abhandlung von Hindenburg) deshalb vor allen bekannten Methoden den Vorzug, weil dadurch die Näherungsbrüche in und außer der Ordnung nach einfachen Gesetzen gebildet, nicht mehr Buchstaben im Schema geschrieben werden, als im Näherungsbruch enthalten sind, und zugleich, wenn irgend ein Näherungsbruch dargestellt ist, auch alsdann die Werthe aller vorhergehenden, ohne Rechnung, gegeben sind.

Um das Schema für die Zähler der Näherungsbrüche zu bilden oder solche involutorisch darzustellen, bemerke man, daß

$$\begin{aligned} N &= \alpha \\ N_1 &= N\alpha_1 \\ N_2 &= N\alpha_2 + N_1\alpha_2 \\ N_3 &= N_1\alpha_3 + N_2\alpha_3 \\ N_4 &= N_2\alpha_4 + N_3\alpha_4 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man nun $\alpha\alpha_1$ nebeneinander, so erhält man N_1 welches durch $\begin{array}{cc|} N & N_1 \\ \hline \alpha\,. & \alpha_1 \end{array}$ bezeichnet werden kann.

Um hieraus N_2 zu erhalten, muß zuerst N_1 mit α_2 multiplizirt werden, dies giebt $\alpha.\alpha_1|\alpha_2$; dann muß aber auch noch $N=\alpha$ mit α_2 multiplizirt und zum vorstehenden Produkt addirt werden.

Dies läßt sich auf folgende Art darstellen

$$\begin{array}{l|cc|c|} & N & N_1 & N_2 \\ N_1 & \alpha\,. & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline N_2 & \alpha & & \alpha_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{aligned} \text{wo } N_1 &= \alpha\alpha_1 \text{ und} \\ N_2 &= \alpha\alpha_1\alpha_2 + \alpha\alpha_2 \text{ ist} \end{aligned}$$

Wird rechts neben jede Zeile des vorstehenden Schemas α_3 geschrieben, so erhält man $N_2\alpha_3$. Es fehlt also noch $N_1\alpha_3$ um N_3 darzustellen. Man setze daher aus dem ersten Winkelhaken $\alpha\alpha_1 = N_1$ unter das vorstehende Schema und rechts daneben α_3, so wird

$$\begin{array}{l|cc|c|c|} & N & N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1 & \alpha\,. & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \hline N_2 & \alpha & & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \hline N_3 & \alpha & \alpha_1 & & \alpha_3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{aligned} \text{wo } N_1 &= \alpha\alpha_1 \\ N_2 &= \alpha\alpha_1\alpha_2 + \alpha\alpha_2 \\ N_3 &= \alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha\alpha_2\alpha_3 + \alpha\alpha_1\alpha_3. \end{aligned}$$

Geht man auf ähnliche Art weiter indem N_3 mit α_4 multiplizirt, N_2 aber aus dem unmittelbar vorhergehenden Winkelhaken unter den letzten wagerechten Strich des vorstehenden Schemas gesetzt und mit α_4 multiplizirt wird, so findet man:

	N	N_1	N_2	N_3	N_4
N_1	$\alpha\,.$	α_1	α_2	α_3	α_4
N_2	α		α_2	α_3	α_4
N_3	α	α_1		α_3	α_4
	α	α_1	α_2		α_4
N_4	α		α_2		α_4

Wird hier wieder N_4 mit α_5 multiplizirt und N_3 aus dem unmittelbar vorhergehenden Winkelhaken unter den letzten wagerechten Strich gesetzt und mit α_4 multiplizirt, so entsteht N_5. Eben so findet man N_6; N_7; u. s. w., so daß das nachstehende Schema leicht so weit fortgeführt werden kann als man will, wenn man nur die Regel beobachtet, daß jeder folgende Werth gefunden wird, wenn man **neben den vertikalen Strich, den nächstfolgenden Nenner des Ergänzungsbruches, und unter den wagerechten Strich, sämmtliche im zweiten nächstvorhergehenden Winkelhaken enthaltene Größen, nach eben der Ordnung, hinschreibt und solchen auf der rechten Seite den nächstfolgenden Zähler des Ergänzungsbruches, als Faktor, zusetzt.**

	N	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
N_1	$\alpha\,.$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	...
N_2	α		α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	...
N_3	α	α_1		α_3	α_4	α_5	α_6	...
	α	α_1	α_2		α_4	α_5	α_6	...
N_4	α	α_1			α_4	α_5	α_6	...
	α	α_1	α_2	α_3		α_5	α_6	...
	α		α_2	α_3		α_5	α_6	...
N_5	α	α_1		α_3		α_5	α_6	...
	α	α_1	α_2	α_3	α_4		α_6	...
	α		α_2	α_3	α_4		α_6	...
	α	α_1		α_3	α_4		α_6	...
	α	α_1	α_2		α_4		α_6	...
N_6	α		α_0		α_4		α_6	...
	...	...	...	...	...	...	...	...

Indem also durch das vorstehende Schema der Werth für den Zähler N_6 gefunden ist, so hat man dadurch zugleich die vorhergehenden Zähler N_5; N_4; N_3; N_2; N_1 erhalten.

Ganz auf eine ähnliche Art lassen sich die Nenner der Näherungsbrüche bilden, wenn man erwägt, daß

$$
\begin{aligned}
M &= \alpha \\
M_1 &= \alpha_1 + M\alpha_1 \\
M_2 &= M\alpha_2 + M_1\alpha_2 \\
M_3 &= M_1\alpha_3 + M_2\alpha_3 \\
M_4 &= M_2\alpha_4 + M_3\alpha_4 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Für den ersten Nenner M erhält man alsdann $a|$; daher findet man M_1 wenn M mit a_1 multiplizirt und zu diesem Produkt α_1 addirt wird, welches sich auf folgende Art ausdrücken läßt:

	M	M_1
M	a	a_1
		α_1
M_1		

Hieraus findet man M_2, wenn M_1 mit a_2 multiplizirt und M aus dem unmittelbar vorhergehenden Winkelhaken unter den letzten wagerechten Strich gesetzt und mit α_2 multiplizirt wird. Hienach erhält man

	M	M_1	M_2
M	a	a_1	a_2
		α_1	a_2
M_1		a	α_2
M_2			

wo $M = a$

$M_1 = a a_1 + \alpha_1$, und

$M_2 = a a_1 a_2 + \alpha_1 a_2 + a \alpha_2$ ist.

Verfährt man zur Bildung der folgenden Werthe ganz nach derselben Regel, welche zur Darstellung der Zähler oben gegeben ist, so läßt sich das Schema nach Belieben erweitern. Hienach erhält man

	M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	
M	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
		α_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
M_1		a	α_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
M_2		a	a_1	α_3	a_4	a_5	a_6	...
			α_1	α_3	a_4	a_5	a_6	...
M_3		a	a_1	a_2	α_4	a_5	a_6	...
			α_1	a_2	α_4	a_5	a_6	...
			a	α_2	α_4	a_5	a_6	...
M_4	a	a_1	a_2	a_3	α_5	a_6	...	
		α_1	a_2	a_3	α_5	a_6	...	
		a	α_2	a_3	α_5	a_6	...	
		a	a_1	α_3	α_5	a_6	...	
			α_1	α_3	α_5	a_6	...	
M_5	a	a_1	a_2	a_3	a_4	α_6	...	
		α_1	a_2	a_3	a_4	α_6	...	
		a	α_2	a_3	a_4	α_6	...	
		a	a_1	α_3	a_4	α_6	...	
			α_1	α_3	a_4	α_6	...	
		a	a_1	a_2	α_4	α_6	...	
			α_1	a_2	α_4	α_6	...	
			a	α_2	α_4	α_6	...	
M_6								
	...	...	...	...	...	...	...	...

Es lassen sich nun die Näherungsbrüche in und außer der Ordnung ohne Rechnung darstellen und man findet

$$\frac{N}{M} = \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{\alpha a_1}{a a_1 + \alpha_1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{\alpha a_1 a_2 + \alpha \alpha_2}{a a_1 a_2 + \alpha_1 a_2 + a \alpha_2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{\alpha a_1 a_2 a_3 + \alpha \alpha_2 a_3 + \alpha a_1 \alpha_3}{a a_1 a_2 a_3 + \alpha_1 a_2 a_3 + a \alpha_2 a_3 + a a_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3}$$

u. s. w.

§. 263.

Die vorstehende involutorische Darstellung der Näherungsbrüche gewährt noch den besondern Vortheil, daß man dadurch in den Stand gesetzt wird, die aufzustellenden Ausdrücke in ihre Faktoren zu zerlegen. Man bemerkt nemlich leicht bei der involutorischen Darstellung des Zählers, daß

$$\left.\begin{matrix} \alpha a_1 a_2 \\ \alpha \alpha_2 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \alpha a_1 a_2 + \alpha \alpha_2$$

als gemeinschaftlicher Faktor für mehrere aufeinander folgende Glieder vorkommt. Eben dies gilt von

$$\left.\begin{matrix} a a_1 \\ \alpha_1 \end{matrix}\right\} \text{ oder } a a_1 + \alpha_1$$

im Schema des Nenners, daher lassen sich die aufeinander folgende Näherungsbrüche auch noch auf folgende Art darstellen.

$$\frac{N}{M} = \frac{\alpha}{a};$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{\alpha a_1}{a a_1 + \alpha_1};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{\alpha a_1 a_2 + \alpha \alpha_2}{(a a_1 + \alpha_1) a_2 + a \alpha_2};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(\alpha a_1 a_2 + \alpha \alpha_2) a_3 + \alpha a_1 \alpha_3}{(a a_1 + \alpha_1)(a_2 a_3 + \alpha_3) + a \alpha_2 a_3};$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(\alpha a_1 a_2 + \alpha \alpha_2)(a_3 a_4 + \alpha_4) + \alpha a_1 \alpha_3 a_4}{(a a_1 + \alpha_1)(a_2 a_3 a_4 + \alpha_3 a_4 + a_2 \alpha_4) + a \alpha_2 (a_3 a_4 + \alpha_4)};$$

. . . .

§. 264.

Für die gemeinen Kettenbrüche, bei welchen die Zähler der Ergänzungsbrüche durchgängig $= 1$ sind, wird $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = 1$, daher erhält man für diese folgende einfache involutorische Darstellungen:

N	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
1 .	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.
		1	a_3	a_4	a_5	a_6	.
			a_1	a_4	a_5	a_6	.
			a_1	a_2	a_5	a_6	.
				1	a_5	a_6	.
			a_1	a_2	a_3	a_6	.
				1	a_3	a_6	.
					a_1	a_6	.
			a_1	a_2	a_3	a_4	.
				1	a_3	a_4	.
					a_1	a_4	.
					a_1	a_2	.
						1	.
			.	.	.	.	.

M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	
a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.
	1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.
		a	a_3	a_4	a_5	a_6	.
		a	a_1	a_4	a_5	a_6	.
			1	a_4	a_5	a_6	.
		a	a_1	a_2	a_5	a_6	.
			1	a_2	a_5	a_6	.
				a	a_5	a_6	.
		a	a_1	a_2	a_3	a_6	.
			1	a_2	a_3	a_6	.
				a	a_3	a_6	.
				a	a_1	a_6	.
					1	a_6	.
		a	a_1	a_2	a_3	a_4	.
			1	a_2	a_3	a_4	.
				a	a_3	a_4	.
				a	a_1	a_4	.
					1	a_4	.
				a	a_1	a_2	.
					1	a_2	.
						a	.
		.	.	.	.	.	.

und hieraus

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{a};\ \frac{N_1}{M_1} = \frac{a_1}{a a_1 + 1};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{(a a_1 + 1) a_2 + a};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{(a a_1 + 1)(a_2 a_3 + 1) + a a_3};$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(a_1 a_2 + 1)(a_3 a_4 + 1) + a_1 a_4}{(a a_1 + 1)(a_2 a_3 a_4 + a_4 + a_2) + a(a_3 a_4 + 1)};$$

$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{(a_1 a_2 + 1)(a_3 a_4 a_5 + a_5 + a_3) + a_1 (a_4 a_5 + 1)}{(a a_1 + 1)(a_2 a_3 a_4 a_5 + a_4 a_5 + a_2 a_5 + a_2 a_3 + 1) + a(a_3 a_4 a_5 + a_5 + a_3)};\ \text{u. s. w.}$$

§. 265.

Es ist nun die wichtige Untersuchung anzustellen, unter welchen Bedingungen für jeden Kettenbruch

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \ldots.$$

die nach §. 260. gefundenen Näherungswerthe dem Urbruch S immer näher kommen; weil sich nur dann die Grenze des Fehlers bei der Anwendung eines Näherungsbruches angeben läßt.

Unter der hier durchgängig angenommenen **Voraussetzung**, daß die Zähler $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ und Nenner $a, a_1, a_2 \ldots$ der Ergänzungsbrüche **positive** Größen sind, müssen auch nach §. 260.

$$N_n = N_{n-2}\,\alpha_n + N_{n-1}\,a_n \text{ und}$$
$$M_n = M_{n-2}\,\alpha_n + M_{n-1}\,a_n, \quad [I]$$

also auch sämmtliche Näherungsbrüche positiv seyn.

Nun wird nach den §. 260. gefundenen besondern Werthen

$$NM_1 - N_1M = N(\alpha_1 + M a_1) - N a_1 M = N\alpha_1 = + \alpha\alpha_1$$
$$N_1M_2 - N_2M_1 = N_1(M\alpha_2 + M_1a_2) - (N\alpha_2 + N_1a_2)M_1 = -(NM_1 - N_1M)\alpha_2 = -\alpha\alpha_1\alpha_2$$
$$N_2M_3 - N_3M_2 = N_2(M_1\alpha_3 + M_2a_3) - (N_1\alpha_3 + N_2a_3)M_2 = -(N_1M_2 - N_2M_1)\alpha_3 = +\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

u. s. w., oder hieraus

$$\frac{N}{M} - \frac{N_1}{M_1} = + \frac{\alpha\alpha_1}{MM_1}$$
$$\frac{N_1}{M_1} - \frac{N_2}{M_2} = - \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{M_1M_2}$$
$$\frac{N_2}{M_2} - \frac{N_3}{M_3} = + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{M_2M_3}$$
$$\frac{N_3}{M_3} - \frac{N_4}{M_4} = - \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{M_3M_4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{N_{2r-1}}{M_{2r-1}} - \frac{N_{2r}}{M_{2r}} = - \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{2r}}{M_{2r-1}M_{2r}}$$
$$\frac{N_{2r}}{M_{2r}} - \frac{N_{2r+1}}{M_{2r+1}} = + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{2r+1}}{M_{2r}M_{2r+1}}.$$

Durch die vorstehenden Ausdrücke erhält man die Unterschiede der aufeinander folgenden Näherungsbrüche. Nun sind $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ und $M, M_1, M_2 \ldots$ positive Größen, also sind die vorstehenden Unterschiede ohne Rücksicht auf das Vorzeichen positiv, weshalb **die Unterschiede der aufeinander folgenden Näherungsbrüche abwechselnd positiv und negativ werden**, welches anzeigt, daß diese Näherungsbrüche abwechselnd bald größer bald kleiner ausfallen.

Zur Abkürzung setze man die Unterschiede

$$\frac{N_n}{M_n} - \frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} = R_n \text{ und } \frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} - \frac{N_{n+2}}{M_{n+2}} = R_{n+1},$$

so wird, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen,

$$R_n = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n+1}}{M_nM_{n+1}}$$
$$R_{n+1} = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n+2}}{M_{n+1}M_{n+2}}.$$

Nun ist ferner (§. 260.) der letzte Näherungsbruch der Urbruch selbst. Sollen daher die Unterschiede der aufeinander folgenden Näherungsbrüche immer kleiner werden, oder sich dem Urbruche immer mehr nähern, so muß alsdann, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, $R_n > R_{n+1}$ werden, oder es muß $R_n - R_{n+1}$ eine positive Größe seyn.

Weil

Weil nun $R_n - R_{n+1} = \frac{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}}{M_{n+1}} \left(\frac{M_{n+2} - M_n \alpha_{n+2}}{M_n M_{n+2}}\right)$ und nach [I]

$M_{n+2} = M_n a_{n+2} + M_{n+1} a_{n+2}$ ist; so findet man hienach

$$R_n - R_{n+1} = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n+2}}{M_n M_{n+2}} a_{n+2}.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar eine positive Größe, daher wird **jeder folgende Näherungsbruch dem Urbruche näher kommen, als der unmittelbar vorhergehende Näherungsbruch**, und weil die Unterschiede der aufeinander folgenden Näherungsbrüche abwechselnd bald positiv bald negativ sind, so müssen solche **bald größer bald kleiner als der Urbruch werden**, vorausgesetzt, daß $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ und $a, a_1, a_2 \ldots$ positive Größen sind.

Weil die vorstehenden Sätze nur unter der angenommenen Voraussetzung gelten, daß alle Glieder des gegebenen Kettenbruchs positiv sind, so wird der Fall, wenn einzelne Glieder negativ sind, noch besonders §. 283. auseinander gesetzt werden.

§. 266.

Dem Vorhergehenden §. gemäß ist

$$\frac{N_{2r}}{M_{2r}} > \frac{N_{2r+1}}{M_{2r+1}} \text{ und } \frac{N_{2r-1}}{M_{2r-1}} < \frac{N_{2r}}{M_{2r}}.$$

Ferner ist der Urbruch

$$S < \frac{N_{2r}}{M_{2r}} \text{ und } S > \frac{N_{2r+1}}{M_{2r+1}};$$

auch liegt der wahre Werth von S näher an $\frac{N_{2r+1}}{M_{2r+1}}$ als an $\frac{N_{2r}}{M_{2r}}$. Sind daher diese beide Näherungswerthe gegeben, und man bezeichnet den Werth welcher S am nächsten kommt durch S', so wird

$$S' = \frac{N_{2r+1}}{M_{2r+1}},$$

daher findet man nach §. 17. (*IV*) den größtmöglichen Fehler q bei dieser Voraussetzung, oder

$$q < \tfrac{1}{2} \frac{N_{2r}}{M_{2r}} - \tfrac{1}{2} \frac{N_{2r+1}}{M_{2r+1}}.$$

Wären die beiden Näherungswerthe $\frac{N_{2r-1}}{M_{2r-1}}$ und $\frac{N_{2r}}{M_{2r}}$ gegeben, so wird

$$S < \frac{N_{2r}}{M_{2r}} \text{ und } S > \frac{N_{2r-1}}{M_{2r-1}},$$

also der nächste Werth

$$S' = \frac{N_{2r}}{M_{2r}},$$

und der größtmögliche Fehler wird

$$q < \tfrac{1}{2} \frac{N_{2r}}{M_{2r}} - \tfrac{1}{2} \frac{N_{2r-1}}{M_{2r-1}}.$$

Sind hienach überhaupt die beiden Näherungsbrüche $\frac{N_m}{M_m}$ und $\frac{N_{m+1}}{M_{m+1}}$ gegeben, wo m jede gerade oder ungerade Zahl bezeichnen kann, so findet man den Näherungswerth

$$S' = \frac{N_{m+1}}{M_{m+1}}$$

und den größtmöglichen Fehler

$$q < \pm \tfrac{1}{2} \left(\frac{N_m}{M_m} - \frac{N_{m+1}}{M_{m+1}}\right),$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades m gilt.

Hiedurch entsteht ein einfaches Mittel, wenn zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche gegeben sind, aber der Urbruch selbst nicht bekannt ist, einen Werth q anzugeben, welcher größer ist als die Abweichung des Näherungsbruches vom Urbruch. Dieser Satz ist besonders zur Beurtheilung des Fehlers wichtig, welcher aus der Annahme eines Näherungsbruches entsteht.

Wären z. B. die aufeinander folgenden Näherungsbrüche $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{16}$ gegeben, so wird der Näherungswerth oder

$$S' = \tfrac{3}{16},$$

und der größtmögliche Fehler oder

$$q > \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{16} = 0{,}00625.$$

Nach §. 250. ist der hier als unbekannt vorausgesetzte Urbruch $S = \frac{216}{1147}$, daher der Unterschied $S - S'$ oder

$$\tfrac{216}{1147} - \tfrac{3}{16} = \tfrac{15}{18352} = 0{,}000\,817\ldots\ldots$$

also offenbar kleiner als 0, 00 625 wie erfordert wird.

§. 267.

Ein Kettenbruch wird mit irgend einer Zahl n multiplizirt, wenn man den Zähler seines ersten Ergänzungsbruchs mit n vervielfältigt.

Wäre $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots.$ so ist auch $nS = \frac{n\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots.$

Denn man setze $R = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a + R}$,

also $nS = \frac{n\alpha}{a + R} = \frac{n\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots..$

Wäre hingegen $S' = \alpha + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so erhält man eben so

$$nS' = n\alpha + \frac{n\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots..$$

In vorstehenden Ausdrücken werde -1 statt n gesetzt, so erhält man für

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots. \qquad -S = \frac{-\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$$

und für $S' = \alpha + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ wird $-S' = -\alpha + \frac{-\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$

§. 268.

Es sey $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ so ist auch $\frac{S}{n} = \frac{\alpha}{na} + \frac{n\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$

Denn man setze $R = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a+R}$, also

$$\frac{S}{n} = \frac{\alpha}{na + nR} = \frac{\alpha}{na} + \frac{n\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$$

Wäre hingegen $S' = \alpha + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so wird

$$\frac{S'}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{nb} + \frac{n\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$$

Denn es ist $S' - \alpha = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ also dem Vorhergehenden gemäß

$$\frac{S' - \alpha}{n} = \frac{\beta}{nb} + \frac{n\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$$

§. 269.

Es sey $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{-\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so ist auch $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$

Denn man setze $R = \frac{-\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b+R} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b-(-R)}$

Nun ist, wenn R mit -1 multiplizirt wird, (§. 267.)

$-R = \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ daher $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b-(-R)} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$

§. 270.

Es sey $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - \frac{-\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so ist auch $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$

Denn man setze $R = \frac{-\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b-R} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b+(-R)}$

Nun ist §. 267.

$-R = \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ daher $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b+(-R)} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$

Eben so findet man

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{-\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots$$

§. 271.

Findet man den Ergänzungsbruch $\frac{1}{1}$ in einem Kettenbruche, so ist man im Stande den Kettenbruch ohne Veränderung seines Werths um einen Ergänzungsbruch zu vermindern, und es ist, wenn nur die obern oder die untern Zeichen gelten:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}\pm\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{1+b}-\frac{\gamma}{\gamma\pm c}\pm\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots\ldots$$

Denn man setze $R = c+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots$ so wird

$$b+\frac{1}{1}\pm\frac{\gamma}{R} = b+\frac{1}{1\pm\frac{\gamma}{R}} = b+\frac{R}{R\pm\gamma} = b+1-\frac{\gamma}{\gamma\pm R}.$$

Aber $\pm R = \pm c \pm \frac{\delta}{d}+\ldots\ldots$ (§. 267.), daher

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}\pm\frac{\gamma}{R} = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{\gamma}{\gamma\pm c}\pm\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots\ldots$$

So ist z. B. $\frac{2}{3}+\frac{1}{1}+\frac{7}{4}+\frac{5}{6} = \frac{2}{4}-\frac{7}{11}+\frac{5}{6}$ und

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{1}-\frac{7}{4}+\frac{5}{6} = \frac{2}{4}-\frac{7}{3}-\frac{5}{6}$$

Eben so erhält man:

$$\frac{1}{1}\pm\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots\ldots = 1-\frac{\alpha}{\alpha\pm a}\pm\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots\ldots$$ und

$$1\pm\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots\ldots = \frac{1}{1}\mp\frac{\alpha}{\alpha\pm a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots\ldots$$

§. 272.

Zusatz. Durch Anwendung des vorstehenden Satzes erhält man auch:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots$$ oder auch

$$= \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{\gamma+c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots$$

So ist z. B.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{5}{6}=\frac{2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{11}$$

Eben so erhält man ferner

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{1}{3}-\frac{\gamma}{\gamma+c}+\frac{\delta}{d}+\ldots$$

Auch wird

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots.$$

§. 273.

Wird der Zähler eines Ergänzungsbruchs $=0$, so kann man in dem Kettenbruch alle folgende Ergänzungsbrüche weglassen. So ist

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\alpha}{a}+\frac{0}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots$$

Denn man setze $R=\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots$ so wird der gegebene Kettenbruch $\frac{\alpha}{a}+\frac{0}{b}+R=\frac{\alpha}{a+\frac{0}{b+R}}=\frac{\alpha}{a}$, welches auch für sich ohne Beweis einleuchtet.

§. 274.

Aus dem Kettenbruche S den Werth $\frac{1}{S}$ zu finden, bemerke man, wenn

(I) $S=A+\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots$ ist, so wird

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{A}+\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$$

Denn man setze $R=a+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots$ so wird

$$S=A+\frac{\alpha}{R}\text{ also }\frac{1}{S}=\frac{1}{A+\frac{\alpha}{R}}=\frac{1}{A}+\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots$$

wie erfordert wird.

Für

(II) $S=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$ wird $\frac{1}{S}=\frac{a}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha b}+\frac{\alpha\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$

Denn man setze $R = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \dots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a+R}$, also

$\frac{1}{S} = \frac{a+R}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \frac{R}{\alpha}$; aber §. 268. $\frac{R}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \dots$ daher

$\frac{1}{S} = \frac{a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots$ wie erfordert wird.

Für $\alpha = 1$ wird nach (II)

(III) $S = \frac{1}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots$ und $\frac{1}{S} = a + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots\dots$

und für $a = 1$ wird nach (II)

(IV) $S = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots$ und $\frac{1}{S} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots\dots$

Ferner erhält man:

(V) $S = \frac{1}{1} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots$ und $\frac{1}{S} = 1 + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots$

Soll man $\frac{1}{S}$ in S verwandeln, so setze man $\frac{1}{S} = S'$, suche $\frac{1}{S'}$ nach den vorstehenden Regeln, so erhält man S aus $\frac{1}{S}$.

§. 275.

In jedem Kettenbruche kann man den Zähler und Nenner irgend eines Ergänzungsbruches und den Zähler des darauf folgenden Ergänzungsbruches mit einer jeden Zahl multipliziren oder dividiren, ohne dadurch den Werth des Kettenbruches zu ändern.

Dieser wichtige Satz wird auf folgende Weise bewiesen. Es sey $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \dots$ der gegebene Kettenbruch, und man nehme irgend einen Ergänzungsbruch $\frac{\beta}{b}$ nebst allen nachfolgenden, so kann man setzen

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{R} \text{ wo } R = c + \frac{\delta}{d} + \dots \text{ ist.}$$

Da nun $\frac{\beta}{b + \frac{\gamma}{R}} = \frac{n\beta}{nb + \frac{n\gamma}{R}}$, wo n jede mögliche ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn kann, so ist auch

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{R} = \frac{\alpha}{a} + \frac{n\beta}{nb} + \frac{n\gamma}{R}, \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots = \frac{\alpha}{a} + \frac{n\beta}{nb} + \frac{n\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots$$

Eben so ist

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{n\gamma}{nc}+\frac{n\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots\ldots$$

Mit Hülfe dieses Satzes, kann man einzelne Glieder eines Kettenbruches auf kleinere Ausdrücke bringen, die gebrochenen Zähler oder Nenner der Ergänzungsbrüche aus den Kettenbrüchen wegschaffen, oder andere zweckmäßige Veränderungen bewirken.

So ist z. B.

$$\frac{1}{3}+\frac{6}{8}+\frac{4}{9}+\frac{3}{7} = \frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{\frac{1}{4}}+\frac{5}{9} = \frac{5}{6}+\frac{8}{1}+\frac{20}{9}$$

$$a+\frac{1}{\frac{2a}{b}}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{\frac{2a}{b}}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{\frac{2a}{b}}+\frac{1}{2a}+\ldots\ldots$$

$$= a+\frac{b}{b\,\frac{2a}{b}}+\frac{b}{2a}+\frac{b}{b\,\frac{2a}{b}}+\frac{b}{2a}+\ldots\ldots$$

$$= a+\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}+\ldots\ldots$$

$$\frac{a^{-n}}{b}+\frac{c}{R} = \frac{a^n a^{-n}}{a^n b}+\frac{a^n c}{R} = \frac{1}{a^n b}+\frac{a^n c}{R}$$

Eben so findet man für

$$S=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots\ldots$$

$$S=\frac{\alpha:a}{1}+\frac{\beta:ab}{1}+\frac{\gamma:bc}{1}+\frac{\delta:cd}{1}+\frac{\varepsilon:de}{1}+\ldots\ldots$$

$$S=\frac{1}{a:\alpha}+\frac{1}{b\alpha:\beta}+\frac{1}{c\beta:\alpha\gamma}+\frac{1}{d\alpha\gamma:\alpha\delta}+\frac{1}{e\beta\delta:\alpha\gamma\varepsilon}+\ldots\ldots$$

§. 276.

1. Zusatz. Eben so kann man in jedem Kettenbruche die positiven oder negativen Glieder der Ergänzungsbrüche umändern, wenn mit -1 multiplizirt wird.

So ist $a + \cfrac{\beta}{-b + \cfrac{\gamma}{c + \dots\dots}} = a - \cfrac{\beta}{b - \cfrac{\gamma}{c + \dots\dots}}$

und $a - \cfrac{\beta}{-b + \cfrac{\gamma}{c + \dots\dots}} = a + \cfrac{\beta}{b - \cfrac{\gamma}{c + \dots\dots}}$

Ferner $a + \cfrac{\beta}{-b + \cfrac{\gamma}{-c + \cfrac{\delta}{-d + \dots\dots}}} = a - \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \dots\dots}}}$

§. 277.

Es sey $S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{\frac{c}{k} + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}}}}$ so ist auch

$$S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta c}{bc + k\gamma + \cfrac{\gamma . \delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}}}$$

Denn man setze $R = \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}$ so wird

$$\frac{\gamma}{\frac{c}{k} + R} = \frac{k\gamma + \gamma R}{c} = \frac{k\gamma}{c} + \frac{\gamma}{c} R.$$

Nach §. 267. ist aber

$$\frac{\gamma}{c} R = \cfrac{\frac{\gamma}{c}\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}$$ daher

$$\frac{\gamma}{\frac{c}{k} + R} = \frac{k\gamma}{c} + \cfrac{\frac{\gamma}{c}\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}$$ also

$$S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \frac{k\gamma}{c} + \cfrac{\frac{\gamma}{c}\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}}}$$

daher nach §. 275.

$$S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta c}{bc + k\gamma + \cfrac{\gamma\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}}}$$

Für $k = c = 1$ wird

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{\frac{1}{1} + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}} = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \gamma + \cfrac{\gamma\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots\dots}}}}$$

wo allemal der neu entstandene Kettenbruch einen Ergänzungsbruch weniger hat, als der gegebene.

Noch

Noch ist zu bemerken, daß man statt

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{\frac{c}{k} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots\dots}$$ setzen kann:

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{0} + \frac{c}{k} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots\dots$$

§. 278.

Wäre $S = \frac{k}{\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots}$ so ist auch

$$S = \frac{ak}{\alpha} + \frac{k\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \dots$$

Denn man setze $R = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \dots$ so wird

$S = \frac{k}{\frac{\alpha}{a+R}} = \frac{k(a+R)}{\alpha} = \frac{ak}{\alpha} + \frac{k}{\alpha} R$, oder weil §. 267 und 268.

$\frac{k}{\alpha} R = \frac{k\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots$ so findet man hienach den vorstehenden Ausdruck.

Für $S = \frac{1}{\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots}$ ist daher

$$S = \frac{a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots$$

Für $S = \frac{1}{\frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots}$ wird

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots$$

Ferner für $S = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots}$ findet man

$$S = a + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots\dots$$

und für $S = \frac{k}{\frac{1}{1} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots}$ wird $S = k + \frac{k\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$

§. 279.

Soll zu einem Kettenbruche die Größe $\frac{A}{B}$ addirt werden, so erhält man für

$$(I) \quad S = \frac{A}{B} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$$

$$S = \frac{A}{B} - \frac{\alpha BB}{aA + \alpha B} + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$$

Von der Richtigkeit des letzteren Ausdrucks überzeugt man sich, wenn $R = a + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ gesetzt wird. Alsdann ist $S = \frac{A}{B} + \frac{\alpha}{R}$. Bedeutet nun T eine näher zu bestimmende Größe und man setzt

$$S = \frac{A}{B+T}, \text{ so wird } \frac{A}{B} + \frac{\alpha}{R} = \frac{A}{B+T}, \text{ also}$$

$$T = \frac{-\alpha BB}{\alpha B + AR}, \text{ daher } S = \frac{A}{B} - \frac{\alpha BB}{\alpha B + AR}.$$

Nun ist $AR = aA + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ daher

$$S = \frac{A}{B} - \frac{\alpha BB}{\alpha B + aA} + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$$

wie erfordert wird.

Wenn ferner

$$(II) \quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots \quad \text{so wird auch}$$

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\beta}{aab + a\beta} + \frac{aa\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots$$

Denn man setzt $R = b + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a + \frac{\beta}{R}}$. Bedeutet T eine näher zu bestimmende Größe, und man setzt $S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{T}$, so wird

$$\frac{\alpha}{a + \frac{\beta}{R}} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{T}, \text{ also } T = \frac{a\beta}{\alpha} + \frac{aa}{\alpha} R, \text{ daher}$$

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{T} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\frac{\alpha\beta}{\alpha} + \frac{a\alpha}{\alpha}R} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\beta}{a\beta + a\alpha R}.$$

Nun ist $a\alpha R = a\alpha b + \frac{a\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$ folglich

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\beta}{a\beta + a\alpha b} + \frac{a\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$ wie erfordert wird.

Für $B = 1$ in (I) wird

$$(III)\quad S = A + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$ und auch

$$S = \frac{A}{1} - \frac{\alpha}{aA + \alpha} + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

Hierin $-\alpha$ statt α gesetzt, giebt

$$(IV)\quad S = A - \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$ und

$$S = \frac{A}{1} + \frac{\alpha}{aA - \alpha} + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

§. 280.

In jedem Kettenbruche lassen sich die negativen Ergänzungsbrüche wegschaffen, und es wird, wenn

$$(I)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$ auch

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$

Eben so wird auch, wenn

$$(II)\quad S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} - \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$ ist,

$$S = \frac{\alpha}{a - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_1}{a_1 - \alpha_1 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_3}{a_3 - \alpha_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$

Hat der einem negativen Ergänzungsbruche vorangehende, die Einheit zum Nenner und es ist

$$(III)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{1} - \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$ so wird

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{a_3 - \alpha_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Wäre ferner

$$(IV)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{1} - \frac{\alpha_3}{1} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$ so wird

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 + \alpha_2 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{a_3 - \alpha_2\alpha_3 - 1} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Von der Richtigkeit des vorstehenden ersten Ausdrucks überzeugt man sich leicht, wenn $R = \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots$ gesetzt wird; alsdann ist

$$a_2 - \frac{\alpha_2}{a_2 + R} = a_2 - 1 + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2 + R}} = a_2 - 1 + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} + R$$

wie erfordert wird.

Aus der Richtigkeit des Ausdrucks (I) folgt auch (II) und mittelst der §. 277. erwiesenen Sätze überzeugt man sich eben so von der Richtigkeit der Ausdrücke (III) und (IV).

Für den Fall, daß $a_2 < \alpha_2$ also nach (I) $a_2 - \alpha_2$ negativ wird, erhält man auch für

$$(V)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1 a_2}{a_1 a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_3 + a_2 a_3} + \frac{a_2\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Von der Richtigkeit dieses Ausdrucks überzeugt man sich auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{A}{B + \frac{C}{R}} = \frac{A}{B} - \frac{AC}{BC + B^2R}.$$

Setzt man nun $R = a_3 + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$ so wird §. 267.

$$a_2 a_2 R = a_2 a_2 a_3 + \frac{a_2 a_2 \alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$ und

$$\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{R} = \frac{\alpha_2}{a_2 + \frac{\alpha_3}{R}} = \frac{\alpha_2}{a_2} - \frac{\alpha_2\alpha_3}{a_2\alpha_3 + a_2 a_2 R} \text{ oder } -\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{R} = -\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{a_2\alpha_3 + a_2 a_2 R}.$$

Diesen Werth in den gegebenen Kettenbruch (V) gesetzt, findet man, wie erfordert wird

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{a_2\alpha_3 + a_2 a_2 R}$$ oder

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{a_2\alpha_3 + \alpha_2 a_2 a_3} + \frac{a_2 a_2 \alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \dots\dots}$$ oder §. 275.

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{a_1 a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_3 + a_2 a_3} + \frac{a_2\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \dots\dots$$ wie oben.

In (V) werde $-\alpha_2$ statt α_2 gesetzt, so findet man

$$(VI)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha^4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \dots\dots$$ und

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1 a_2}{a_1 a_2 + \alpha_2} - \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_3 + a_2 a_3} + \frac{a_2\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \dots\dots$$

Hiedurch erhält man ein Mittel, jeden gegebenen Kettenbruch (VI) in einen andern zu verwandeln, welcher einen Ergänzungsbruch weniger hat.

1. Beispiel. Den Kettenbruche $S = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \dots\dots$ in einen andern zu verwandeln, in welchem die Zeichen vor den Gliedern der Ergänzungsbrüche positiv sind, wird hier nach (II) und §. 279.

$$S = x + \frac{x^3}{2 - x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{4 - x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{6 - x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{8 - x^2} + \dots\dots$$

2. Beispiel. In dem Kettenbruch $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ den negativen Ergänzungsbruch wegzuschaffen, erhält man nach (I)

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{5}{-3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

Es ist daher der hier gewählte Ausdruck (I) nicht anwendbar. Nach (V) erhält man aber

$$S = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{10}{8} + \frac{2}{2}$$

Eben so findet man

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{-\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots\ldots$$

§. 271.

Findet man den Ergänzungsbruch $\frac{1}{1}$ in einem Kettenbruche, so ist man im Stande den Kettenbruch ohne Veränderung seines Werths um einen Ergänzungsbruch zu vermindern, und es ist, wenn nur die obern oder die untern Zeichen gelten:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}\pm\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{1+b}-\frac{\gamma}{\gamma\pm c}\pm\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$$

Denn man setze $R = c+\frac{\delta}{d}+\ldots.$ so wird

$$b+\frac{1}{1}\pm\frac{\gamma}{R} = b+\frac{1}{1\pm\frac{\gamma}{R}} = b+\frac{R}{R\pm\gamma} = b+1-\frac{\gamma}{\gamma\pm R}.$$

Aber $\pm R = \pm c \pm \frac{\delta}{d}+\ldots.$ (§. 267.), daher

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}\pm\frac{\gamma}{R} = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{\gamma}{\gamma\pm c}\pm\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$$

So ist z. B. $\frac{2}{3}+\frac{1}{1}+\frac{7}{4}+\frac{5}{6} = \frac{2}{4}-\frac{7}{11}+\frac{5}{6}$ und

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{1}-\frac{7}{4}+\frac{5}{6} = \frac{2}{4}-\frac{7}{3}-\frac{5}{6}$$

Eben so erhält man:

$$\frac{1}{1}\pm\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots. = 1-\frac{\alpha}{\alpha\pm a}\pm\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots. \quad \text{und}$$

$$1\pm\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots. = \frac{1}{1}\mp\frac{\alpha}{\alpha\pm a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots..$$

§. 272.

Zusatz. Durch Anwendung des vorstehenden Satzes erhält man auch:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots. \quad \text{oder auch}$$

$$= \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{\gamma+c}+\frac{\delta}{d}+\ldots..$$

So ist z. B.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{5}{6}=\frac{2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{11}$$

Eben so erhält man ferner

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{1}{3}-\frac{\gamma}{\gamma+c}+\frac{\delta}{d}+\ldots$$

Auch wird

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b+1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots.$$

§. 273.

Wird der Zähler eines Ergänzungsbruchs = o, so kann man in dem Kettenbruch alle folgende Ergänzungsbrüche weglassen. So ist

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\alpha}{a}+\frac{o}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots$$

Denn man setze $R=\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\ldots$ so wird der gegebene Kettenbruch $\frac{\alpha}{a}+\frac{o}{b}+R=\frac{\alpha}{a+\frac{o}{b+R}}=\frac{\alpha}{a}$, welches auch für sich ohne Beweis einleuchtet.

§. 274.

Aus dem Kettenbruche S den Werth $\frac{1}{S}$ zu finden, bemerke man, wenn

(I) $S=A+\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots$ ist, so wird

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{A}+\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$$

Denn man setze $R=a+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots$ so wird

$$S=A+\frac{\alpha}{R}\text{ also }\frac{1}{S}=\frac{1}{A+\frac{\alpha}{R}}=\frac{1}{A}+\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots$$

wie erfordert wird.

Für

(II) $S=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$ wird $\frac{1}{S}=\frac{a}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha b}+\frac{\alpha\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\ldots.$

Denn man setze $R = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ so wird $S = \frac{\alpha}{a + R}$, also

$\frac{1}{S} = \frac{a + R}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \frac{R}{\alpha}$; aber §. 268. $\frac{R}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \ldots$ daher

$\frac{1}{S} = \frac{a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$ wie erfordert wird.

Für $\alpha = 1$ wird nach (*II*)

(*III*) $S = \frac{1}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots$ und $\frac{1}{S} = a + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots$

und für $a = 1$ wird nach (*II*)

(*IV*) $S = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots$ und $\frac{1}{S} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots$

Ferner erhält man:

(*V*) $S = \frac{1}{1} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$ und $\frac{1}{S} = 1 + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$

Soll man $\frac{1}{S}$ in S verwandeln, so setze man $\frac{1}{S} = S'$, suche $\frac{1}{S'}$ nach den vorstehenden Regeln, so erhält man S aus $\frac{1}{S}$.

§. 275.

In jedem Kettenbruche kann man den Zähler und Nenner irgend eines Ergänzungsbruches und den Zähler des darauf folgenden Ergänzungsbruches mit einer jeden Zahl multipliziren oder dividiren, ohne dadurch den Werth des Kettenbruches zu ändern.

Dieser wichtige Satz wird auf folgende Weise bewiesen. Es sey $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$ der gegebene Kettenbruch, und man nehme irgend einen Ergänzungsbruch $\frac{\beta}{b}$ nebst allen nachfolgenden, so kann man setzen

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{R} \text{ wo } R = c + \frac{\delta}{d} + \ldots \text{ ist.}$$

Da nun $\frac{\beta}{b + \frac{\gamma}{R}} = \frac{n\beta}{nb + \frac{n\gamma}{R}}$, wo n jede mögliche ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn kann, so ist auch

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{R} = \frac{\alpha}{a} + \frac{n\beta}{nb} + \frac{n\gamma}{R}\text{, oder}$$

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots = \frac{\alpha}{a} + \frac{n\beta}{nb} + \frac{n\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

Eben so ist

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{n\gamma}{nc} + \frac{n\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots$$

Mit Hülfe dieses Satzes, kann man einzelne Glieder eines Kettenbruches auf kleinere Ausdrücke bringen, die gebrochenen Zähler oder Nenner der Ergänzungsbrüche aus den Kettenbrüchen wegschaffen, oder andere zweckmäßige Veränderungen bewirken.

So ist z. B.

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{8} + \frac{4}{9} + \frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{5}{9} = \frac{5}{6} + \frac{8}{1} + \frac{20}{9}$$

$$a + \frac{1}{\frac{2a}{b}} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{\frac{2a}{b}} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{\frac{2a}{b}} + \frac{1}{2a} + \ldots\ldots$$

$$= a + \frac{b}{b\frac{2a}{b}} + \frac{b}{2a} + \frac{b}{b\frac{2a}{b}} + \frac{b}{2a} + \ldots\ldots$$

$$= a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \ldots\ldots$$

$$\frac{a^{-n}}{b} + \frac{c}{R} = \frac{a^n a^{-n}}{a^n b} + \frac{a^n c}{R} = \frac{1}{a^n b} + \frac{a^n c}{R}$$

Eben so findet man für

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{\alpha : a}{1} + \frac{\beta : ab}{1} + \frac{\gamma : bc}{1} + \frac{\delta : cd}{1} + \frac{\varepsilon : de}{1} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{1}{a : \alpha} + \frac{1}{b\alpha : \beta} + \frac{1}{c\beta : \alpha\gamma} + \frac{1}{d\alpha\gamma : \alpha\delta} + \frac{1}{e\beta\delta : \alpha\gamma\varepsilon} + \ldots\ldots$$

§. 276.

1. Zusatz. Eben so kann man in jedem Kettenbruche die positiven oder negativen Glieder der Ergänzungsbrüche umändern, wenn mit — 1 multiplizirt wird.

So ist $a + \cfrac{\beta}{-b + \cfrac{\gamma}{c + \dots}} = a - \cfrac{\beta}{b - \cfrac{\gamma}{c + \dots}}$

und $a - \cfrac{\beta}{-b + \cfrac{\gamma}{c + \dots}} = a + \cfrac{\beta}{b - \cfrac{\gamma}{c + \dots}}$

Ferner $a + \cfrac{\beta}{-b + \cfrac{\gamma}{-c + \cfrac{\delta}{-d + \dots}}} = a - \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \dots}}}$

§. 277.

Es sey $S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{\cfrac{c}{k} + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}}$ so ist auch

$$S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta c}{bc + k\gamma + \cfrac{\gamma . \delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}$$

Denn man setze $R = \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}$ so wird

$$\frac{\gamma}{\frac{c}{k} + R} = \frac{k\gamma + \gamma R}{c} = \frac{k\gamma}{c} + \frac{\gamma}{c} R.$$

Nach §. 267. ist aber

$$\frac{\gamma}{c} R = \cfrac{\frac{\gamma}{c}\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}$$ daher

$$\frac{\gamma}{\frac{c}{k} + R} = \frac{k\gamma}{c} + \cfrac{\frac{\gamma}{c}\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}$$ also

$$S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{k\gamma}{c} + \cfrac{\frac{\gamma}{c}\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}$$

daher nach §. 275.

$$S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta c}{bc + k\gamma + \cfrac{\gamma\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}$$

Für $k = c = 1$ wird

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{\cfrac{1}{1} + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}} = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \gamma + \cfrac{\gamma\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \dots}}}}$$

wo allemal der neu entstandene Kettenbruch einen Ergänzungsbruch weniger hat, als der gegebene.

Noch

Noch ist zu bemerken, daß man statt

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{\frac{c}{k} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots}$$ setzen kann:

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{0} + \frac{c}{k} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots$$

§. 278.

Wäre $S = \frac{k}{\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots}$ so ist auch

$$S = \frac{ak}{\alpha} + \frac{k\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \frac{\varepsilon}{e} + \ldots\ldots$$

Denn man setze $R = \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots\ldots$ so wird

$S = \frac{k}{\frac{\alpha}{a+R}} = \frac{k(a+R)}{\alpha} = \frac{ak}{\alpha} + \frac{k}{\alpha}R$, oder weil §. 267 und 268.

$\frac{k}{\alpha}R = \frac{k\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$ so findet man hienach den vorstehenden Ausdruck.

Für $S = \frac{1}{\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots}$ ist daher

$$S = \frac{a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

Für $S = \frac{1}{\frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots}$ wird

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha b} + \frac{\alpha\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

Ferner für $S = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots}$ findet man

$$S = a + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

und für $S = \cfrac{k}{\cfrac{1}{1 + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}}}}$ wird $S = k + \cfrac{k\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}}$

§. 279.

Soll zu einem Kettenbruche die Größe $\frac{A}{B}$ addirt werden, so erhält man für

$$(I)\quad S = \frac{A}{B} + \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}}}$$

$$S = \frac{A}{B} - \cfrac{\alpha BB}{aA + \alpha B + \cfrac{\beta A}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}}}$$

Von der Richtigkeit des letzteren Ausdrucks überzeugt man sich, wenn $R = a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \ldots}}$ gesetzt wird. Alsdann ist $S = \frac{A}{B} + \frac{\alpha}{R}$. Bedeutet nun T eine näher zu bestimmende Größe und man setzt

$$S = \frac{A}{B+T}, \text{ so wird } \frac{A}{B} + \frac{\alpha}{R} = \frac{A}{B+T}, \text{ also}$$

$$T = \frac{-\alpha BB}{\alpha B + AR}, \text{ daher } S = \frac{A}{B} - \frac{\alpha BB}{\alpha B + AR}.$$

Nun ist $AR = aA + \cfrac{\beta A}{b + \cfrac{\gamma}{c + \ldots}}$ daher

$$S = \frac{A}{B} - \cfrac{\alpha BB}{\alpha B + aA + \cfrac{\beta A}{b + \cfrac{\gamma}{c + \ldots}}}$$

wie erfordert wird.

Wenn ferner

$$(II)\quad S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \ldots}}}}} \quad \text{so wird auch}$$

$$S = \frac{\alpha}{a} - \cfrac{\alpha\beta}{aab + a\beta + \cfrac{aa\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \ldots}}}}$$

Denn man setzt $R = b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}$ so wird $S = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{R}}$. Bedeutet T eine näher zu bestimmende Größe, und man setzt $S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{T}$, so wird

$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{R}} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{T}$, also $T = \frac{a\beta}{\alpha} + \frac{aa}{\alpha} R$, daher

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{T} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\frac{a\beta}{\alpha} + \frac{a a}{\alpha} R} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\beta}{a\beta + a a R}.$$

Nun ist $a a R = a a b + \frac{a a \gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$ folglich

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\beta}{a\beta + a a b} + \frac{a a \gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$ wie erfordert wird.

Für $B = 1$ in (I) wird

$$(III)\quad S = A + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$ und auch

$$S = \frac{A}{1} - \frac{\alpha}{aA + \alpha} + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

Hierin $-\alpha$ statt α gesetzt, giebt

$$(IV)\quad S = A - \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$ und

$$S = \frac{A}{1} + \frac{\alpha}{aA - \alpha} + \frac{\beta A}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \ldots\ldots$$

§. 280.

In jedem Kettenbruche lassen sich die negativen Ergänzungsbrüche wegschaffen, und es wird, wenn

$$(I)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$ auch

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$

Eben so wird auch, wenn

$$(II)\quad S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} - \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$ ist,

$$S = \frac{\alpha}{a - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_1}{a_1 - \alpha_1 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_3}{a_3 - \alpha_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$

Hat der einem negativen Ergänzungsbruche vorangehende, die Einheit zum Nenner und es ist

$$(III)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{1} - \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots \quad \text{so wird}$$

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_3 - \alpha_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Wäre ferner

$$(IV)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{1} - \frac{\alpha_3}{1} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots \quad \text{so wird}$$

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 + \alpha_2 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_3 - \alpha_2 \alpha_3 - 1} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Von der Richtigkeit des vorstehenden ersten Ausdrucks überzeugt man sich leicht, wenn $R = \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots$ gesetzt wird; alsdann ist

$$\frac{[illegible]}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2 + R} = a_1 - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2 + R}} = a_1 - 1 + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} + R$$

wie erfordert wird.

Aus der Richtigkeit des Ausdrucks (I) folgt auch (II) und mittelst der §. 277. erwiesenen Sätze überzeugt man sich eben so von der Richtigkeit der Ausdrücke (III) und (IV).

Für den Fall, daß $a_2 < \alpha_2$ also nach (I) $a_2 - \alpha_2$ negativ wird, erhält man auch für

$$(V).\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{a_1 \alpha_2}{a_1 a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_3 + a_2 a_3} + \frac{a_2 \alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Von der Richtigkeit dieses Ausdrucks überzeugt man sich auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{A}{B + \frac{C}{R}} = \frac{A}{B} - \frac{AC}{BC + B^2 R}.$$

Setzt man nun $R = a_3 + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$ so wird §. 267.

$$a_2 a_2 R = a_2 a_2 a_3 + \frac{a_2 a_2 \alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots \quad \text{und}$$

$$\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{R} = \frac{\alpha_2}{a_2 + \frac{\alpha_3}{R}} = \frac{\alpha_2}{a_2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_2 \alpha_3 + a_2 a_2 R} \text{ oder } -\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{R} = -\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_2 \alpha_3 + a_2 a_2 R}.$$

Diesen Werth in den gegebenen Kettenbruch (V) gesetzt, findet man, wie erfordert wird

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_2 \alpha_3 + a_2 a_2 R}$$ oder

$$S = \frac{\alpha}{a} + \cfrac{\alpha_1}{a_1 - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{a_2 \alpha_3 + \alpha_2 a_2 a_3} + \frac{a_2 a_2 \alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots}$$ oder §. 275.

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_3 + a_2 a_3} + \frac{a_2 \alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$ wie oben.

In (V) werde $-\alpha_2$ statt α_2 gesetzt, so findet man

$$(VI)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$ und

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2 + \alpha_2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_3 + a_2 a_3} + \frac{\alpha_2 \alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

Hiedurch erhält man ein Mittel, jeden gegebenen Kettenbruch (VI) in einen andern zu verwandeln, welcher einen Ergänzungsbruch weniger hat.

1. Beispiel. Den Kettenbruche $S = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \ldots\ldots$ in einen andern zu verwandeln, in welchem die Zeichen vor den Gliedern der Ergänzungsbrüche positiv sind, wird hier nach (II) und §. 279.

$$S = x + \frac{x^3}{2 - x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{4 - x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{6 - x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{8 - x^2} + \ldots\ldots$$

2. Beispiel. In dem Kettenbruch $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ den negativen Ergänzungsbruch wegzuschaffen, erhält man nach (I)

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{5}{-3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

Es ist daher der hier gewählte Ausdruck (I) nicht anwendbar. Nach (V) erhält man aber

$$S = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{10}{8} + \frac{2}{2}$$

§. 281.

Jeden gegebenen Kettenbruch in einen andern zu verwandeln, welcher nur aus zwei Drittel so viel Ergänzungsbrüchen besteht als der gegebene, so sey

$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$ der gegebene Kettenbruch. Man setze

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{R_1};\quad R_1 = a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{R_4};$$

$$R_4 = a_4 + \frac{\alpha_5}{a_5} + \frac{\alpha_6}{a_6} + \frac{\alpha_7}{R_7};\quad R_7 = a_7 + \frac{\alpha_8}{a_8} + \frac{\alpha_9}{a_9} + \frac{\alpha_{10}}{R_{10}};$$ u. s. w., so wird

$$S = \frac{\alpha}{a + \frac{\alpha_1}{R_1}} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\alpha_1}{a\alpha_1 + a a R_1}$$

$$a a R_1 = a a a_1 + \frac{a a \alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{R_4}$$

$$\frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{R_4} = \frac{\alpha_3}{a_3} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{a_3\alpha_4 + a_3 a_3 R_4}$$

$$a_3 a_3 R_4 = a_3 a_3 a_4 + \frac{a_3 a_3 \alpha_5}{a_5} + \frac{\alpha_6}{a_6} + \frac{\alpha_7}{R_7}$$

$$\frac{\alpha_6}{a_6} + \frac{\alpha_7}{R_7} = \frac{\alpha_6}{a_6} - \frac{\alpha_6\alpha_7}{a_6\alpha_7 + a_6 a_6 R_7}$$

$$a_6 a_6 R_7 = a_6 a_6 a_7 + \frac{a_6 a_6 \alpha_8}{a_8} + \frac{\alpha_9}{a_9} + \frac{\alpha_{10}}{R_{10}}$$ u. s. w. Hienach findet man

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\alpha_1}{a\alpha_1 + a a a_1} + \frac{a a \alpha_2}{a_2 + \frac{\alpha_3}{a_3}} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{a_3\alpha_4 + a_3 a_3 a_4} + \frac{a_3 a_3 \alpha_5}{a_5 + \frac{\alpha_6}{a_6}} - \ldots\ldots$$

oder wenn man die Brüche in den Nennern der Ergänzungsbrüche und dann die Faktoren, welche sich aufheben, wegschafft, so findet man aus dem gegebenen Kettenbruche

$$(I)\quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \frac{\alpha_6}{a_6} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\alpha_1}{a a a_1 + a\alpha_1} + \frac{a a a_3 \alpha_2}{a_2 a_3 + \alpha_3} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{a_3 a_4 + \alpha_4} + \frac{a_3 a_6 \alpha_5}{a_5 a_6 + \alpha_6} - \frac{\alpha_6\alpha_7}{a_6 a_7 + \alpha_7} + \frac{a_6 a_9 \alpha_8}{a_8 a_9 + \alpha_9} - \frac{\alpha_9\alpha_{10}}{a_9 a_{10} + \alpha_{10}} + \ldots$$

Für $a = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$ wird

$$(II) \quad S = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{1} + \frac{\alpha_3}{1} + \frac{\alpha_4}{1} + \frac{\alpha_5}{1} + \frac{\alpha_6}{1} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha\alpha_1}{1+\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_3} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{1+\alpha_4} + \frac{\alpha_5}{1+\alpha_6} - \frac{\alpha_6\alpha_7}{1+\alpha_7} + \frac{\alpha_8}{1+\alpha_9} - \frac{\alpha_9\alpha_{10}}{1+\alpha_{10}} + \frac{\alpha_{11}}{1+\alpha_{12}} - \ldots\ldots$$

Beispiel. Es sey $S = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1} + \frac{7}{1} + \ldots\ldots$ gegeben, so findet man auch

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1.2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4.5}{6} + \frac{6}{8} - \frac{7.8}{9} + \frac{9}{11} - \frac{10.11}{12} + \frac{12}{14} - \frac{13.14}{15} + \ldots\ldots$$

§. 282.

Den gegebenen Kettenbruch

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \ldots\ldots$$

in einen andern zu verwandeln, welcher nur halb so viel Ergänzungsbrüche hat, setze man $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{R_1}$; $R_1 = a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{R_3}$; $R_3 = a_3 + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{R_5}$; u. s. w., so wird

$$S = \frac{\alpha}{a + \frac{\alpha_1}{R_1}} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha\alpha_1}{a\alpha_1 + aaR_1}$$

$$aaR_1 = aaa_1 + \frac{aa\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{R_3} = aaa_1 + \frac{aa\alpha_2}{a_2} - \frac{aa\alpha_2\alpha_3}{a_2\alpha_3 + a_2a_2R_3}.$$

$$a_2a_2R_3 = a_2a_2a_3 + \frac{a_2a_2\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{R_5} = a_2a_2a_3 + \frac{a_2a_2\alpha_4}{a_4} - \frac{a_2a_2\alpha_4\alpha_5}{a_4\alpha_5 + a_4a_4R_5}; \text{ u. s. w.}$$

daher wird

$$S = \frac{\alpha}{a} - \cfrac{\alpha\alpha_1}{a\alpha_1 + aaa_1 + \frac{aa\alpha_2}{a_2} - \cfrac{aa\alpha_2\alpha_3}{a_2\alpha_3 + a_2a_2a_3 + \frac{a_2a_2\alpha_4}{a_4} - \ldots\ldots}}$$

oder man findet für

$$(I) \quad S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \frac{\alpha_5}{a_5} + \frac{\alpha_6}{a_6} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{a_2 \alpha \alpha_1}{a(a a_1 + \alpha_1) + a a \alpha_2} - \frac{\alpha a a_4 \alpha_2 \alpha_3}{(a_2 a_3 + \alpha_3) a_4 + a_2 \alpha_4} - \frac{a_2 a_6 \alpha_4 \alpha_5}{(a_4 a_5 + \alpha_5) a_6 + a_4 \alpha_6}$$

$$- \frac{a_4 a_8 \alpha_6 \alpha_7}{(a_6 a_7 + \alpha_7) a_8 + a_6 \alpha_8} - \frac{a_6 a_{10} \alpha_8 \alpha_9}{(a_8 a_9 + \alpha_9) a_{10} + a_8 \alpha_{10}} - \ldots\ldots\ldots$$

Für $a = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$ wird

$$(II) \quad S = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{1} + \frac{\alpha_3}{1} + \frac{\alpha_4}{1} + \frac{\alpha_5}{1} + \frac{\alpha_6}{1} + \ldots$$

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha \alpha_1}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{1 + \alpha_3 + \alpha_4} - \frac{\alpha_4 \alpha_5}{1 + \alpha_5 + \alpha_6} - \frac{\alpha_6 \alpha_7}{1 + \alpha_7 + \alpha_8} - \frac{\alpha_8 \alpha_9}{1 + \alpha_9 + \alpha_{10}} - \ldots\ldots$$

1. Beispiel. Es sey $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ gegeben, so wird nach (I)

$$S = \frac{1}{2} - \frac{4.1.2}{2.8.4 + 2.2.3} - \frac{2.2.6.3.4}{24.6 + 4.5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{19} - \frac{18}{41}$$

2. Beispiel. Es sey $S = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1} + \frac{7}{1} + \ldots$ gegeben, so wird nach (II)

$$S = 1 - \frac{1.2}{1+2+3} - \frac{3.4}{1+4+5} - \frac{5.6}{1+6+7} - \ldots \quad \text{oder}$$

$$S = 1 - \frac{1.2}{2.3} - \frac{3.4}{2.5} - \frac{5.6}{2.7} - \frac{7.8}{2.9} - \frac{9.10}{2.11} - \frac{11.12}{2.13} - \ldots\ldots$$

§. 283.

Sollen die §. 265. und 266. erwiesenen Sätze von der Annäherung der Näherungsbrüche zum Urbruch, auch auf Kettenbrüche mit negativen Ergänzungsbrüchen angewandt werden, so muß man zuvörderst den gegebenen Kettenbruch nach §. 280. in einen solchen verwandeln, welcher nur aus positiven Gliedern besteht und daraus die Bedingungen entwickeln, unter welchen nur die §. 265. und 266. erwiesenen Sätze Anwendung finden.

Wäre z. B. der Kettenbruch

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} - \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots\ldots$$

gegeben, in welchem der Ergänzungsbruch $\frac{\alpha_2}{a_2}$ negativ ist, so ist nach §. 280.

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1 - 1} + \frac{1}{1} + \frac{\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots$$

daher

daher wird dieser Kettenbruch nur dann aus lauter positiven Gliedern bestehen, wenn $a_1 =$ oder > 1 und $a_2 =$ oder $> a_2$ ist, und nur unter dieser Bedingung ist alsdann für den Näherungswerth

$$S' = \frac{N_{m+1}}{M_{m+1}}$$

der größtmögliche Fehler

$$q < \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{N_m}{M_m} - \frac{N_{m+1}}{M_{m+1}}\right).$$

III. Auflösung der Reihen in Kettenbrüche.

§. 284.

Wäre allgemein der gegebene Urbruch

$$S = \frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{B + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, so setze man

$$P = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \text{ und } Q = B + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

alsdann erhält man durch ein ähnliches Verfahren wie §. 259., wenn die Division verrichtet wird,

$$\frac{Q}{P} = \frac{B}{A} + \frac{x}{A}\,\frac{(AB_1 - A_1 B) + (AB_2 - A_2 B)x + \ldots}{A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots},$$

oder wenn man setzt:

$$AB_1 - A_1 B = a_2;\ AB_2 - A_2 B = b_2;\ AB_3 - A_3 B = c_2;\ \ldots$$

und $a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \ldots = P_1$, so wird $\frac{Q}{P} = \frac{B}{A} + \frac{x}{A}\frac{P_1}{P}$. Eben so wird:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{A}{a_2} + \frac{x}{a_2}\,\frac{(A_1 a_2 - A b_2) + (A_2 a_2 - A c_2)x + \ldots}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \ldots},$$

oder wenn man setzt:

$$A_1 a_2 - A b_2 = a_3;\ A_2 a_2 - A c_2 = b_3;\ A_3 a_2 - A d_2 = c_3;\ \ldots$$

und $a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + \ldots = P_2$, so wird $\frac{P}{P_1} = \frac{A}{a_2} + \frac{x}{a_2}\frac{P_2}{P_1}$. Ferner wird eben so

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_2}{a_3} + \frac{x}{a_3}\,\frac{(a_3 b_2 - b_3 a_2) + (a_3 c_2 - c_3 a_2)x + \ldots}{a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + \ldots}.$$

oder wenn man setzt:

$$a_3 b_2 - a_2 b_3 = a_4;\ a_3 c_2 - a_2 c_3 = b_4;\ a_3 d_2 - a_2 d_3 = c_4;\ \ldots$$

und $a_4 + b_4 x + c_4 x^2 + \ldots = P_3$; so wird $\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_2}{a_3} + \frac{x}{a_3}\frac{P_3}{P_2}$. Auf gleiche Art ist

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{a_3}{a_4} + \frac{x}{a_4}\frac{P_4}{P_3};\quad \frac{P_3}{P_4} = \frac{a_4}{a_5} + \frac{x}{a_5}\frac{P_5}{P_4};\ \text{u. s. w.}$$

daher erhält man mit Hülfe dieser Werthe, wenn man $A = a_1$ und $B = a$ gesetzt wird:

$$S = \frac{P}{Q} = \frac{1}{\frac{a}{a_1} + \frac{x}{a_1}\frac{P_1}{P}}.$$ Nun ist $\frac{x}{a_1}\frac{P_1}{P} = \frac{x}{\frac{a_1 a_1}{a_2} + \frac{a_1 x}{a_2}\frac{P_2}{P_1}}$, daher

$$S = \cfrac{1}{\cfrac{a}{a_1} + \cfrac{x}{\cfrac{a_1 a_1}{a_2} + \cfrac{a_1 x}{a_2}\cfrac{P_2}{P_1}}}.$$ Ferner ist $\frac{a_1 x}{a_2}\frac{P_2}{P_1} = \frac{a_1 x}{\frac{a_2 a_2}{a_3} + \frac{a_2 x}{a_3}\frac{P_3}{P_2}}$, daher

$$S = \cfrac{1}{\cfrac{a}{a_1} + \cfrac{x}{\cfrac{a_1 a_1}{a_2} + \cfrac{a_1 x}{\cfrac{a_2 a_2}{a_3} + \cfrac{a_2 x}{a_3}\cfrac{P_3}{P_2}}}}.$$ Ferner ist $\frac{a_2 x}{a_3}\frac{P_3}{P_2} = \frac{a_2 x}{\frac{a_3 a_3}{a_4} + \frac{a_3 x}{a_4}\frac{P_4}{P_3}}$, also

$$S = \cfrac{1}{\cfrac{a}{a_1} + \cfrac{x}{\cfrac{a_1 a_1}{a_2} + \cfrac{a_1 x}{\cfrac{a_2 a_2}{a_3} + \cfrac{a_2 x}{\cfrac{a_3 a_3}{a_4} + \cfrac{a_3 x P_4}{a_4 P_3}}}}}.$$

Geht man auf diese Art weiter, so erhält man allgemein

$$S = \cfrac{1}{\cfrac{a}{a_1} + \cfrac{x}{\cfrac{a_1 a_1}{a_2} + \cfrac{a_1 x}{\cfrac{a_2 a_2}{a_3} + \cfrac{a_2 x}{\cfrac{a_3 a_3}{a_4} + \cfrac{a_3 x}{\cfrac{a_4 a_4}{a_5} + \cfrac{a_4 x}{\cfrac{a_5 a_5}{a_6} + \ldots}}}}}}$$

oder nach §. 267.

$$S = \frac{a_1}{a} + \frac{a_2 x}{a_1} + \frac{a_3 x}{a_2} + \frac{a_4 x}{a_3} + \frac{a_5 x}{a_4} + \frac{a_6 x}{a_5} + \frac{a_7 x}{a_6} + \ldots\ldots$$

Zur Bestimmung der Werthe von a; a_1; a_2; .... dienen die vorstehenden Gleichungen und es wird:

$$a = B;\ a_1 = A;$$

$a_2 = AB_1 - A_1 B$	$a_3 = A_1 a_2 - A b_2$	$a_4 = a_3 b_2 - a_2 b_3$	$a_5 = a_4 b_3 - a_3 b_4$	$a_6 = a_5 b_4 - a_4 b_5$	$a_7 = a_6 b_5 - a_5 b_6$
$b_2 = AB_2 - A_2 B$	$b_3 = A_2 a_2 - A c_2$	$b_4 = a_3 c_2 - a_2 c_3$	$b_5 = a_4 c_3 - a_3 c_4$	$b_6 = a_5 c_4 - a_4 c_5$	.....
$c_2 = AB_3 - A_3 B$	$c_3 = A_3 a_2 - A d_2$	$c_4 = a_3 d_2 - a_2 d_3$	$c_5 = a_4 d_3 - a_3 d_4$	......	u. s. w.
$d_2 = AB_4 - A_4 B$	$d_3 = A_4 a_2 - A e_2$	$d_4 = a_3 e_2 - a_2 e_3$	......		
$e_2 = AB_5 - A_5 B$	$e_3 = A_5 a_2 - A f_2$	......			
......	......				

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche werden nach §. 260. gefunden, wenn daselbst $\alpha = a_1$; $\alpha_1 = a_2 x$; $\alpha_2 = a_3 x$; $\alpha_3 = a_4 x$; .... gesetzt wird, und man erhält:

$$\frac{N}{M} = \frac{1 . a_1 + 0 . a}{0 . a_1 + 1 . a}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{0 . a_2 x + N a_1}{1 . a_2 x + M a_1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{N a_3 x + N_1 a_2}{M a_3 x + M_1 a_2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1 a_4 x + N_2 a_3}{M_1 a_4 x + M_2 a_3}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{N_2 a_5 x + N_3 a_4}{M_2 a_5 x + M_3 a_4}$$

und allgemein

$$\frac{N_n}{M_n} = \frac{N_{n-2} . a_{n+1} x + N_{n-1} . a_n}{M_{n-2} . a_{n+1} x + M_{n-1} . a_n},$$

oder auch

$$N_n = N_{n-2} . a_{n+1} x + N_{n-1} . a_n \text{ und}$$
$$M_n = M_{n-2} . a_{n+1} x + M_{n-1} . a_n.$$

Beim Berechnen der vorstehenden Näherungsbrüche ist zu bemerken, daß man solche genau so beibehalten muß, wie sie die Rechnung giebt, ohne diese Brüche durch Weglassung gleicher Faktoren im Zähler und Nenner abzukürzen.

§. 285.

Wäre ganz allgemein der Urbruch

$$S = \frac{A x^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + \ldots}{B x^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + B_3 x^{m+3h} + \ldots}$$

gegeben, so erhält man den entsprechenden Kettenbruch

$$S = \frac{a_1 x^{r-m}}{a} + \frac{a_2 x^h}{a_1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \frac{a_4 x^h}{a_3} + \frac{a_5 x^h}{a_4} + \frac{a_6 x^h}{a_5} + \ldots\ldots$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Ausdrucks ist folgender. Nach §. 284. war

$$\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots}{B + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots} = \frac{a_1}{a} + \frac{a_2 x}{a_1} + \frac{a_3 x}{a_2} + \ldots.$$

Hierin durchgängig x^h statt x gesetzt, hienächst sowohl den Urbruch als den Kettenbruch mit x^r multiplizirt und durch x^m dividirt, wird wegen §. 267. und 268.

$$\frac{A x^r + A_1 x^{r+h} + \ldots}{B x^m + B_1 x^{m+h} + \ldots} = \frac{a_1 x^r}{a x^m} + \frac{a_2 x^{m+h}}{a_1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \ldots$$

oder nach §. 276.

$$= \frac{a_1 x^{r-m}}{a} + \frac{a_2 x^h}{a_1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \ldots\ldots$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind für $A = a_1$ und $B = a$

$$\frac{N}{M} = \frac{1 \,.\, a_1 x^{r-m} + 0 \,.\, a}{0 \,.\, a_1 x^{r-m} + 1 \,.\, a}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{0 \,.\, a_2 x^h + N a_1}{1 \,.\, a_2 x^h + M a_1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{N a_3 x^h + N_1 a_2}{M a_3 x^h + M_1 a_2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1 a_4 x^h + N_2 a_3}{M_1 a_4 x^h + M_2 a_3}$$

u. s. w.

§. 286.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$tg\, x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 284. wird

$$\begin{array}{l|l|l|l}
A = +1 & B = +1 & a_2 = \frac{-1.2}{3!} & a_3 = \frac{+1.2.8}{3!\,5!} \\
A_1 = \frac{-1}{3!} & B_1 = \frac{-1}{2!} & b_2 = \frac{+2.2}{5!} & b_3 = \frac{-2.3.8}{3!\,7!} \\
A_2 = \frac{+1}{5!} & B_2 = \frac{+1}{4!} & c_2 = \frac{-3.2}{7!} & c_3 = \frac{+3.4.8}{3!\,9!} \\
A_3 = \frac{-1}{7!} & B_3 = \frac{-1}{6!} & d_2 = \frac{+4.2}{9!} & d_3 = \frac{-4.5.8}{3!\,11!} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
a_4 = \frac{+1.2.3.128}{3!\,5!\,7!} & a_5 = \frac{-1.2.3.4.4096}{3!\,5!\,7!\,9!} & \\
b_4 = \frac{-2.3.4.128}{3!\,5!\,9!} & b_5 = \frac{+2.3.4.5.4096}{3!\,5!\,7!\,11!} & \text{u. s. w.} \\
c_4 = \frac{+3.4.5.128}{3!\,5!\,11!} & \ldots & \\
\ldots & &
\end{array}$$

Nun ist $a = B = 1$ und $a_1 = A = 1$ und nach §. 285. $r = 1$; $m = 0$ und $h = 2$, daher

$$tg\, x = \frac{x}{1} + \cfrac{\frac{-1.2}{3!} x^2}{1 + \cfrac{\frac{1.2.8}{3!\,5!} x^2}{\frac{-1.2}{3!} + \cfrac{\frac{1.2.3.128}{3!\,5!\,7!} x^2}{\frac{1.2.8}{3!\,5!} + \ldots}}}$$

oder §. 275.

$$(I)\quad tg\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{11} - \frac{x^2}{13} - \frac{x^2}{15} - \ldots\ldots$$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1};$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{3x}{3-x^2};$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(15-x^2)x}{15-6x^2};$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{5(21-2x^2)x}{105-45x^2+x^4};$$
$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(945-105x^2+x^4)x}{15(63-28x^2+x^4)};$$
u. s. w.

Den vorstehenden Kettenbruch findet **Lambert** in den Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik, 2. Theil, 1. Abschn., S. 162.

Weil der gefundene Kettenbruch negative Glieder hat, so fehlt bei Anwendung der gefundenen Näherungsbrüche die Ueberzeugung, daß solche abwechselnd größer und kleiner werden als der Urbruch, und man ist hienach nicht im Stande die Grenzen des Fehlers anzugeben. Verwandelt man aber diesen Kettenbruch in einen andern mit positiven Ergänzungsbrüchen, so erhält man nach §. 280.

$$tg\,x = \cfrac{x}{\cfrac{1}{1} + \frac{x^2}{2-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{4-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{6-x^2} + \ldots}$$ oder nach §. 278.

$$(II)\quad tg\,x = x + \frac{x^3}{2-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{4-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{6-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{8-x^2} + \ldots.$$

Sucht man für den Kettenbruch $\frac{x^3}{2-x^2} + \frac{1}{1} + \ldots.$ nach §. 260. die entsprechenden Näherungsbrüche, und setzt zu denselben das Glied x, so findet man

$$\frac{N}{M} = \frac{x^3}{2-x^2} + x = \frac{2x}{2-x^2}$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{x^3}{3-x^2} + x = \frac{3x}{3-x^2}$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{4x^3}{12-5x^2} + x = \frac{(12-x^2)x}{12-5x^2}$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{5x^3}{15-6x^2} + x = \frac{(15-x^2)x}{15-6x^2}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{30x^3 - x^5}{90 - 39x^2 + x^4} + x = \frac{9(10 - x^2)x}{90 - 39x^2 + x^4}$$
$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{35x^3 - x^5}{105 - 45x^2 + x^4} + x = \frac{5(21 - 2x^2)x}{105 - 45x^2 + x^4}$$
$$\frac{N_6}{M_6} = \frac{280x^3 - 13x^5}{840 - 375x^2 + 14x^4} + x = \frac{(840 - 95x^2 + x^4)x}{840 - 375x^2 + 14x^4}$$
$$\frac{N_7}{M_7} = \frac{315x^3 - 14x^5}{945 - 420x^2 + 15x^4} + x = \frac{(945 - 105x^2 + x^4)x}{15(63 - 28x^2 + x^4)}$$

u. s. w.

Vergleicht man diese Brüche mit den nach (I) gefundenen, so bemerkt man leicht, daß hier der zweite, vierte, sechste und achte mit den dortigen übereinstimmen, daß aber die übrigen hier gefundenen Bruche als Einschaltungen anzusehen sind.

Die Bedingungen, unter welchen mit Sicherheit angenommen werden kann, daß die zuletzt gefundenen Näherungsbrüche bald größer und bald kleiner als der Urbruch werden und sich demselben immer mehr nähern, erfordern daß

$$x^2 = \text{oder} < 2, \text{ also } x = \text{oder} < \sqrt{2} \text{ sey.}$$

Nun ist $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$, daher darf x nicht größer als $1{,}4142\ldots$ werden.

Zur Uebersicht der verschiedenen Näherungswerthe, welche für die Kettenbrüche (I) und (II) entstehen, dient folgende Zusammenstellung.

	$x = \frac{1}{3}$ nach I.	$x = \frac{1}{3}$ nach II.	$x = \frac{1}{2}$ nach I.	$x = \frac{1}{2}$ nach II.
Näherungswerthe	0, 333 3333	0, 352 9411	0, 500 0000	0, 571 4285
	0, 346 1538	0, 346 1538	0, 545 4545	0, 545 4545
		0, 346 2783		0, 546 5116
	0, 346 2532	0, 346 2532	0, 546 2963	0, 546 2963
		0, 346 2536		0, 546 3035
	0, 346 2535	0, 346 2535	0, 546 3025	0, 546 3025
$tg\,x$	0, 346 2535	0, 346 2535	0, 546 3025	0, 546 3025

	$x = 1$ nach I.	$x = 1$ nach II.	$x = 1{,}4$ nach I.	$x = 1{,}4$ nach II.
Näherungswerthe	1, 000 0000	2, 000 0000	1, 400 0000	70, 000 0000
	1, 500 0000	1, 500 0000	4, 038 4615	4, 038 4615
		1, 571 4285		6, 389 0909
	1, 555 5555	1, 555 5555	5, 634 5679	5, 634 5679
		1, 557 6923		5, 821 5337
	1, 557 3770	1, 557 3770	5, 792 9026	5, 792 9026
		1, 557 4112		5, 798 4864
	1, 557 4074	1, 557 4074	5, 797 7528	5, 797 7528
$tg\,x$	1, 557 4074	1, 557 4074	5, 797 9026	5, 797 9026

	$x=\sqrt{2}$ nach *I.*	$x=\sqrt{2}$ nach *II.*	$x=1,5$ nach *I.*	$x=1,5$ nach *II.*
Näherungswerthe	1, 414 2136	∞	1, 500 000	— 12, 000 000
	4, 242 6408	4, 242 6408	6, 000 000	6, 000 000
		7, 071 0680		19, 500 000
	6, 128 2589	6, 128 2589	12, 750 000	12, 750 000
		6, 363 9612		14, 307 692
	6, 327 4505	6, 327 4505	14, 042 543	14, 042 543
		6, 334 5020		14, 107 542
	6, 333 9654	6, 333 9654	14, 100 000	14, 100 000
$tg\,x$	6, 334 2260	6, 334 2260	14, 101 274	14, 101 274

Hieraus übersieht man leicht, daß, so lange $x < \sqrt{2}$ ist, auch die Näherungswerthe nach *II* den Bedingungen entsprechen, und bald größer bald kleiner als der Urbruch werden, daß aber diese Bedingungen nicht mehr für $x > \sqrt{2}$ gelten.

§. 287.

Zusatz. Es ist $cot\,x = \frac{1}{tg\,x}$, daher §. 274.

$$\frac{1}{tg\,x} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{3x} - \frac{xx^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \ldots\ldots$$

oder §. 275.

$$cot\,x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{11} - \frac{x^2}{13} - \ldots\ldots$$

Durch Umkehrung der im vorhergehenden §. gefundenen Näherungsbrüche, erhält man die hieher gehörigen.

Auch findet man für positive Ergänzungsbrüche

$$cot\,x = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{4-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{6-x^2} + \frac{1}{1} + \frac{x^2}{8-x^2} + \ldots\ldots$$

§. 288.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$S = \frac{r + (r+1)x + (r+2)x^2 + (r+3)x^3 + (r+4)x^4 + \ldots}{m + (m+1)x + (m+2)x^2 + (m+3)x^3 + (m+4)x^4 + \ldots}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 284. wird hier

$$a = m;\ a_1 = r$$

$a_2 = r - m$	$a_3 = -(r-1)(r-m)$	$a_4 = 0$
$b_2 = 2(r-m)$	$b_3 = -2(r-1)(r-m)$	$a_5 = 0$
$c_2 = 3(r-m)$	$c_3 = -3(r-1)(r-m)$	$a_6 = 0$
. . . .	. . . .	u. s. w., daher

$$S = \frac{r}{m} + \frac{(r-m)x}{r} + \frac{(1-r)(r-m)x}{r-m}.$$

Weil der Kettenbruch abbricht, so erhält man auch, wenn man die Glieder dieses Kettenbruchs unter einerlei Nenner bringt, den Werth der oben stehenden gebrochenen Funkzion, oder

$$S = \frac{r-(r-1)x}{m-(m-1)x}.$$

Man setze $r = \frac{\alpha}{\beta}$ und $m = \frac{a}{b}$, so erhält man auch

$$\frac{\alpha-(\alpha-\beta)x}{a-(a-b)x} = \frac{\alpha+(\alpha+\beta)x+(\alpha+2\beta)x^2+(\alpha+3\beta)x^3+\ldots}{a+(a+b)x+(a+2b)x^2+(a+3b)x^3+\ldots}$$

§. 289.

Aufgabe. Die gebrochene Funkzion

$$S = \frac{\frac{x}{r}+\frac{x^2}{2!(r+1)_2}+\frac{x^3}{2!3!(r+2)_3}+\frac{x^4}{3!4!(r+3)_4}+\frac{x^5}{4!5!(r+4)_5}+\ldots\ldots}{1+\frac{x}{r}+\frac{x^2}{2!2!(r+1)_2}+\frac{x^3}{3!3!(r+2)_3}+\frac{x^4}{4!4!(r+3)_4}+\ldots\ldots}$$

wo $(r+1)_2\ (r+2)_3\ (r+3)_4 \ldots\ldots$ Binomialkoeffizienten sind, in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 285. wird hier $a = 1;\ a_1 = \frac{1}{r}$

$a_2 = \frac{1}{2!\,r\,(r+1)_2}$	$a_3 = \frac{1}{3!\,r^2\,(r+1)\,(r+2)_3}$
$b_2 = \frac{1}{1!\,3!\,r\,(r+2)_3}$	$b_3 = \frac{1}{1!\,4!\,r^2\,(r+1)\,(r+3)_4}$
$c_2 = \frac{1}{2!\,4!\,r\,(r+3)_4}$	$c_3 = \frac{1}{2!\,5!\,r^2\,(r+1)\,(r+4)_5}$
$d_2 = \frac{1}{3!\,5!\,r\,(r+4)_5}$	$d_3 = \frac{1}{3!\,6!\,r^2\,(r+1)\,(r+5)_6}$
. . . .	. . . .

$a_4 = \frac{1}{3!\,4!\,r^3\,(r+1)\,(r+2)_3\,(r+3)_4}$	$a_5 = \frac{1}{3!\,4!\,5!\,r^6\,(r+1)^2\,(r+2)_3\,(r+3)_4\,(r+4)_5}$
$b_4 = \frac{1}{1!\,3!\,5!\,r^3\,(r+1)\,(r+2)_3\,(r+4)_5}$	$b_5 = \frac{1}{3!\,4!\,6!\,r^6\,(r+1)^2\,(r+2)_3\,(r+3)_4\,(r+5)_6}$
$c_4 = \frac{1}{2!\,3!\,6!\,r^3\,(r+1)\,(r+2)_3\,(r+5)_6}$	. . . .
. . . .	

$$a_6 = \frac{1}{3!\,3!\,4!\,5!\,6!\,r^8\,(r+1)^3\,(r+2)_3\,(r+2)_3\,(r+3)_4\,(r+4)_5\,(r+5)_6}$$

u. s. w.

Hier=

Hieraus findet man nach erfolgter Aufhebung der Ergänzungsbrüche

$$S = \frac{x}{r} + \frac{x}{r+1} + \frac{x}{r+2} + \frac{x}{r+3} + \frac{x}{r+4} + \frac{x}{r+5} + \frac{x}{r+6} + \frac{x}{r+7} + \ldots\ldots$$

Für die aufeinander folgenden Näherungsbrüche findet man

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{(r+1)x}{r(r+1)+x}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(r+1)(r+2)x + x^2}{r(r+1)(r+2) + 2(r+1)x}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)x + 2(r+2)x^2}{r(r+1)(r+2)(r+3) + r(r+1)x + r(r+3)x + (r+2)(r+3)x + x^2}$$

u. s. w.

§. 290.

Zusatz. Den zuletzt gefundenen Kettenbruch mit β multiplizirt, giebt (§. 267.)

$$\beta S = \frac{\beta x}{r} + \frac{x}{r+1} + \ldots\ldots \quad \text{also auch §. 275.}$$

$$\beta S = \frac{\beta^2 x}{\beta r} + \frac{\beta^2 x}{\beta r + \beta} + \frac{\beta^2 x}{\beta r + 2\beta} + \frac{\beta^2 x}{\beta r + 3\beta} + \ldots\ldots$$

Hierin $x = \frac{\gamma}{\beta^2}$ und $r = \frac{\alpha}{\beta}$ gesetzt, verwandle sich alsdann S in S' und man findet

$$\beta S' = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\gamma}{\alpha+2\beta} + \frac{\gamma}{\alpha+3\beta} + \frac{\gamma}{\alpha+4\beta} + \ldots\ldots$$

Auch erhält man, wenn die vorstehende Vertauschung in S bewirkt wird:

$$\beta S' = \beta \cdot \frac{\frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha+\beta)\beta^2} + \frac{\gamma^3}{2!\,\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\beta^3} + \frac{\gamma^4}{3!\,\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)\beta^4} + \ldots\ldots}{1 + \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} + \frac{\gamma^2}{2!\,\alpha(\alpha+\beta)\beta^2} + \frac{\gamma^3}{3!\,\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\beta^3} + \ldots\ldots}$$

§. 291.

Wäre der Urbruch

$$S = \frac{1}{Bx^m + B_1 x^{m+h} + B_2 x^{m+2h} + B_3 x^{m+3h} + B_4 x^{m+4h} + \ldots\ldots}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, so erhält man aus der Vergleichung mit §. 285. hier $r = 0$; $A = a_1 = 1$; $A_1 = 0$; $A_2 = 0$; u. s. w., daher

$$S = \frac{1}{ax^m} + \frac{a_2 x^{m+h}}{1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \frac{a_4 x^h}{a_3} + \frac{a_5 x^h}{a_4} + \frac{a_6 x^h}{a_6} + \frac{a_7 x^h}{a_6} + \ldots\ldots$$

Ferner wird nach §. 284.

$$a = B;\ a_2 = B_1;\ a_3 = -B_2$$

$a_4 = B_1 B_3 - B_2 B_2$	$a_5 = B_1 (B_2 B_4 - B_3 B_3)$	$a_6 = a_5 b_4 - a_4 b_5$	$a_7 = a_6 b_5 - a_5 b_6$	$a_8 = a_7 b_6 - a_6 b_7$
$b_4 = B_1 B_4 - B_2 B_3$	$b_5 = B_1 (B_2 B_5 - B_3 B_4)$	$b_6 = a_5 c_4 - a_4 c_5$	$b_7 = a_6 c_5 - a_5 c_6$	. . . .
$c_4 = B_1 B_5 - B_2 B_4$	$c_5 = B_1 (B_2 B_6 - B_3 B_5)$	$c_6 = a_5 d_4 - a_4 d_5$	. . . .	
$d_4 = B_1 B_6 - B_2 B_5$	$d_5 = B_1 (B_2 B_7 - B_3 B_6)$	. . . .		
. . . .	. . . .			

u. s. w.

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{1 \cdot x^{-m} + 0 \cdot a}{0 \cdot x^{-m} + 1 \cdot a};$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{0 \cdot a_2 x^h + N \cdot 1}{1 \cdot a_2 x^h + M \cdot 1};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{N a_3 x^h + N_1 a_2}{M a_3 x^h + M_1 a_2};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1 a_4 x^h + N_2 a_3}{M_1 a_4 x^h + M_2 a_3};$$

u. s. w.

§. 292.

Aufgabe. Den Urbruch $e^{-x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 291. ist hier

$$a = B = 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{-1}{2!};\ a_4 = \frac{-1}{2!3!};$$

$a_5 = \frac{-1}{3!4!}$	$a_6 = \frac{1}{3!4!5!}$	$a_7 = \frac{3}{3!4!6!6!}$	$a_8 = \frac{9}{3!3!4!4!6!6!7!}$
$b_5 = \frac{-2}{3!5!}$	$b_6 = \frac{3}{3!4!6!}$	$b_7 = \frac{9}{3!4!6!7!}$	. . . .
$c_5 = \frac{-3}{3!6!}$	$c_6 = \frac{6}{3!4!7!}$	. . . .	u. s. w.
. . . . .	. . . .		

Ferner ist $m = 0$ und $h = 1$, daher

$$e^{-x} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \cfrac{\frac{-1}{2}x}{1 + \cfrac{\frac{-1}{2!3!}x}{\frac{-1}{2!} + \cfrac{\frac{-1}{3!4!}x}{\frac{-1}{2,3!} + \cfrac{\frac{1}{3!4!5!}x}{\frac{-1}{3!4!} + \ldots}}}}$$

oder §. 275. und

$$(I)\ e^{-x} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{7} - \frac{x}{2} + \frac{x}{9} - \ldots$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind nach §. 291.

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{1};$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{1+x};$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{2-x}{2+x};$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6-2x}{6+4x+x^2};$$
$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{12-6x+x^2}{12+6x+x^2};$$
$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{60-24x+3x^2}{60+36x+9x^2+x^3};$$

u. s. w.

Wird der gefundene Kettenbruch nach §. 280. in einen andern mit positiven Gliedern verwandelt, so findet man

$$(II)\ e^{-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{x^2}{2-x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{1} + \frac{x}{2-x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{1} + \frac{x}{2-x} + \ldots$$

Nach §. 291. gehören hiezu folgende Näherungsbrüche:

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{1+x};$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{2-x}{2+x};$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{4-x}{4+3x+x^2};$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6-2x}{6+4x+x^2};$$
$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{12-6x+x^2}{12+6x+x^2};$$
$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{48-18x+2x^2}{48+30x+8x^2+x^3};$$
$$\frac{N_6}{M_6} = \frac{60-24x+3x^2}{60+36x+9x^2+x^3};$$

u. s. w.

§. 293.

Zusatz. Aus $e^{-x} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} - \ldots$ findet man nach §. 274. $\frac{1}{e^{-x}}$, oder

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{7} - \frac{x}{2} + \frac{x}{9} - \ldots\ldots$$

oder

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2-x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{1} + \frac{x}{2-x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{1} + \frac{x}{2-x} + \frac{x}{6} + \frac{1}{1} + \ldots$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche erhält man, wenn die vorhin gefundenen umgekehrt werden.

§. 294.

Aufgabe. Den Urbruch $S = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln

Auflösung. Nach §. 291. ist hier

$a = B = 1$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{-1}{5}$; $a_4 = \frac{1.4}{3.5.5.7}$; $b_4 = \frac{2.4}{3.5.7.9}$; $c_4 = \frac{3.4}{3.5.9.11}$;
$d_4 = \frac{4.4}{3.5.11.13}$; . . . . .

$a_5 = \frac{1.4}{3.5.7.7.9}$	$a_6 = \frac{-1.2.4.4.8}{5^3.7^2.9^2.7.9.11}$	$a_7 = \frac{-1.2.8^3}{3.5^3.7^6.9^4.11.13}$;
$b_5 = \frac{2.4}{3.5.7.9.11}$	$b_6 = \frac{-2.3.4.4.8}{5^3.7^2.9^2.9.11.13}$	. . . .
$c_5 = \frac{3.4}{3.5.7.11.13}$	. . . .	u. s. w.
. . . . . .		

Ferner ist $m = 1$; $h = 2$, daher

$$S = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{3}x^2}{1} + \frac{\frac{-1}{5}x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3.5.5.7}x^2}{\frac{-1}{5}} + \frac{\frac{4}{3.5.7.7.9}x^2}{\frac{1.4}{3.5.5.7}} + \ldots\ldots$$

oder nach §. 275.

$$S = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} - \frac{3.3x^2}{5} - \frac{2.2x^2}{7} - \frac{5.5x^2}{9} - \frac{4.4x^2}{11} - \frac{7.7x^2}{13} - \frac{6.6x^2}{15} - \frac{9.9x^2}{17} - \ldots\ldots$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{x};$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{3}{3x + x^3};$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{15 - 9x^2}{15x - 4x^3};$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{105 - 75x^2}{105x - 40x^3 - 4x^5};$$

u. s. w.

Für positive Ergänzungsbrüche erhält man nach §. 280.

$$S = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{3.3x^2}{4 - 3.3x} + \frac{1}{1} + \frac{2.2x^2}{6 - 2.2x^2} + \frac{1}{1} + \frac{5.5x^2}{8 - 5.5x^2} + \frac{1}{1} + \ldots.$$

Die entsprechenden Ergänzungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{x};$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{2}{2x + x^3};$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{3}{3x + x^3};$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{12 - 9x^2}{12x - 5x^3};$$
$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{15 - 9x^2}{15x - 4x^3};$$

u. s. w.

§. 295.

Zusatz. Aus $S = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} - \ldots.$ erhält man nach §. 274. $\frac{1}{S} = x + \frac{x^3}{3} - \ldots$ daher ist für

$$\frac{1}{S} = S' = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

$$S' = x + \frac{x^3}{3} - \frac{3.3x^2}{5} - \frac{2.2x^2}{7} - \frac{5.5x^2}{9} - \frac{4.4x^2}{11} - \frac{7.7x^2}{13} - \ldots.$$ oder auch

$$S' = x + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{1} + \frac{3.3x^2}{4 - 3.3x^2} + \frac{1}{1} + \frac{2.2x^2}{6 - 2.2x^2} + \frac{1}{1} + \frac{5.5x^2}{8 - 5.5x^2} + \frac{1}{1} + \ldots.$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche findet man durch Umkehrung der vorhergehenden.

§. 296.

Aufgabe. Den Urbruch $S = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, wo $S = \frac{-1}{lg(1-x)}$ ist (§. 164.)

Auflösung. Nach §. 291. wird hier $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = -\frac{1}{3}$;

$a_4 = \frac{1}{2.3.3.4}$	$a_5 = \frac{1}{4!4.5}$	$a_6 = -\frac{2.2}{4!5!3.4.5.6}$	$a_7 = \frac{1}{3.5.6.6!7!}$	$a_8 = \frac{4}{5!5!6!7!8!}$
$b_4 = \frac{2}{2.3.4.5}$	$b_5 = \frac{2}{4!5.6}$	$b_6 = -\frac{3.4}{4!5!3.5.6.7}$	$b_7 = \frac{3}{3.6.8.6!7!}$	. . . . . .
$c_4 = \frac{3}{2.3.5.6}$	$c_5 = \frac{3}{4!6.7}$	$c_6 = -\frac{4.6}{4!5!3.6.7.8}$	. . . .	
. . . . . .	. . . . . .	. . . .		

u. s. w.

Ferner wird $m = 0$ und $h = 1$, daher findet man, wenn die Faktoren der Ergänzungsbrüche welche sich aufheben weggelassen werden:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{x}{2} - \frac{2.2x}{3} - \frac{1.1x}{4} - \frac{3.3x}{5} - \frac{2.2x}{6} - \frac{4.4x}{7} - \frac{3.3x}{8} - \frac{5.5x}{9} - \frac{4.4x}{10} - \ldots .$$

§. 297.

Zusatz. Verlangt man für den Urbruch $S' = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \ldots}$ den entsprechenden Kettenbruch, so setze man §. 296. $-x$ statt x; alsdann wird

$$S' = \frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{2.2x}{3} + \frac{1.1x}{4} + \frac{3.3x}{5} + \frac{2.2x}{6} + \frac{4.4x}{7} + \frac{3.3x}{8} + \frac{5.5x}{9} + \ldots .$$

§. 298.

Will man die Reihe

$$S = Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + A_4 x^{r+4h} + \ldots .$$

in einen Kettenbruch verwandeln, so giebt die Vergleichung mit §. 285.
$m = 0$; $B = 1$; $B_1 = 0$; $B_2 = 0$; u. s. w., daher wegen $B = a = 1$,

$$S = \frac{a_1 x^r}{1} + \frac{a_2 x^h}{a_1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \frac{a_4 x^h}{a_3} + \frac{a_5 x^h}{a_4} + \frac{a_6 x^h}{a_5} + \ldots .$$

Ferner wird nach §. 284.

$$a_1 = A;\ a_2 = -A_1$$

$$\begin{array}{l|l|l}
a_3 = AA_2 - A_1A_1 & a_4 = A(A_1A_3 - A_2A_2) & a_5 = a_4b_3 - a_3b_4 \\
b_3 = AA_3 - A_1A_2 & b_4 = A(A_1A_4 - A_2A_3) & b_5 = a_4c_3 - a_3c_4 \\
c_3 = AA_4 - A_1A_3 & c_4 = A(A_1A_5 - A_2A_4) & c_5 = a_4d_3 - a_3d_4 \\
d_3 = AA_5 - A_1A_4 & d_4 = A(A_1A_6 - A_2A_5) & d_5 = a_4e_3 - a_3e_4 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
a_6 = a_5b_4 - a_4b_5 & a_7 = a_6b_5 - a_5b_6 & a_8 = a_7b_6 - a_6b_7 \\
b_6 = a_5c_4 - a_4c_5 & b_7 = a_6c_5 - a_5c_6 & \ldots\ldots \\
c_6 = a_5d_4 - a_4d_5 & \ldots\ldots & \text{u. s. w.} \\
\ldots\ldots & &
\end{array}$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{1.a_1x^r + 0.1}{0.a_1x^r + 1.1}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{0.a_2x^h + Na_1}{1.a_2x^h + Ma_1}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{Na_3x^h + N_1a_2}{Ma_3x^h + M_1a_2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1a_4x^h + N_2a_3}{M_1a_4x^h + M_2a_3}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{N_2a_5x^h + N_3a_4}{M_2a_5x^h + M_3a_4}$$

u. s. w.

§. 299.

Zusatz. Man setze $-r$ statt r und $-h$ statt h, so wird

$$S = \frac{A}{x^r} + \frac{A_1}{x^{r+h}} + \frac{A_2}{x^{r+2h}} + \frac{A_3}{x^{r+3h}} + \frac{A_4}{x^{r+4h}} + \ldots\ldots$$

$$S = \cfrac{a_1}{x^r + \cfrac{a_2x^{r-h}}{a_1 + \cfrac{a_3}{a_2x^h + \cfrac{a_4}{a_3 + \cfrac{a_5}{a_4x^h + \cfrac{a_6}{a_5 + \cfrac{a_7}{a_6x^h + \cfrac{a_8}{a_7 + \cfrac{a_9}{a_8x^h + \ldots\ldots}}}}}}}}}$$

$$\frac{N}{M} = \frac{a_1}{x^r}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{Na_1x^h}{a_2 + Ma_1x^h}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{Na_3 + N_1a_2x^h}{Ma_3 + M_1a_2x^h}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1a_4 + N_2a_3x^h}{M_1a_4 + M_2a_3x^h}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{N_2a_5 + N_3a_4x^h}{M_2a_5 + M_3a_4x^h}$$

u. s. w.

§. 300.

Aufgabe. Den Ausdruck

$$lg\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots .$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 298. ist hier $r = 1$; $h = 1$; $a_1 = A = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3.4}$; ferner

$a_4 = \frac{1}{2.3.3.4}$	$a_5 = \frac{1.2}{2.8.9.3.4.5}$	$a_6 = \frac{1.2}{5.6.8.8.9.4.5.6}$
$b_4 = \frac{-2}{2.3.4.5}$	$b_5 = \frac{-2.3}{2.8.9.4.5.6}$	$b_6 = \frac{-2.3}{5.6.8.8.9.5.6.7}$
$c_4 = \frac{3}{2.3.5.6}$	$c_5 = \frac{3.4}{2.8.9.5.6.7}$	$c_6 = \frac{3.4}{5.6.8.8.9.6.7.8}$
$d_4 = \frac{-4}{2.3.6.7}$	$d_5 = \frac{-4.5}{2.8.9.6.7.8}$	$d_6 = \frac{-4.5}{5.6.8.8.9.7.8.9}$
. . . . .	. . . .	. . . .

u. s. w.

Hienach findet man, wenn nach §. 275. abgekürzt wird:

$$lg\,(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{1x}{2} + \frac{1x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{7} + \frac{4x}{2} + \frac{4x}{9} + \frac{5x}{2} + \ldots .$$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{2x}{2+x}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(6+x)\,x}{6+4x}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{3\,(2+x)\,x}{6+6x+x^2}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(30+21x+x^2)\,x}{30+36x+9x^2}$$

$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{(60+60x+11x^2)\,x}{60+90x+36x^2+3x^3}$$

u. s. w.

Um eine Uebersicht zu erhalten, wie schnell diese Näherungswerthe dem wahren Werthe der Reihe nahe kommen, setze man in dem vorstehenden Ausdrucke zuerst den Werth von $x = \frac{1}{10}$, so wird wegen §. 275.

$$lg\,(1+\tfrac{1}{10}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{30} + \frac{2}{2} + \frac{2}{50} + \frac{3}{2} + \frac{3}{70} + \frac{4}{2} + \frac{4}{90} + \ldots \text{ oder}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{30} + \frac{1}{1} + \frac{1}{50} + \frac{3}{2} + \frac{3}{70} + \frac{2}{1} + \frac{2}{90} + \ldots$$ daher §. 261.

I	II	1 0	0 1
1	10	1	10
1	2	2	21
1	30	61	640
1	1	63	661
1	50	..3211	..33690
3	2	..6611	..69363
3	70	472403	4956480
2	1	473625	5095206
..	...	......	....

dies giebt

$\frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{2}{21} = 0{,}0952$ .. ..

$\frac{61}{640} = 0{,}095312$ ....

$\frac{63}{661} = 0{,}095310\ 13$..........

$\frac{3211}{33690} = 0{,}095310\ 181$........

$\frac{6611}{69363} = 0{,}095310\ 1797$........

$\frac{472403}{4956480} = 0{,}095310\ 179805$......

Nun ist $lgn\ (1 + \frac{1}{10}) = 0{,}095310\ 17980433$..... woraus folgt, daß schon der siebente Näherungsbruch den Werth der Reihe bis auf elf Dezimalstellen genau angiebt. Wegen der schnellen Abnahme der Reihe

$$lg\,(1 + \tfrac{1}{10}) = \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} + \ldots\ldots$$

könnte man auch unmittelbar aus derselben ihren wahren Werth nahe genug erhalten.

Wenn dagegen die Glieder der Reihe nur langsam abnehmen, so wird die Berechnung des Werths der Reihe mittelst der Reihenglieder sehr beschwerlich.

Wäre $x = 1$, so erhält man

$$lg\,2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3}{7} + \frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \ldots$$ daher

I	II	1 0	0 1
1	1	. . . 1	 1
1	2	. . . 2	 3
1	3	. . . 7	. . . 10
1	1	. . . 9	. . . 13
1	5	. . 52	. . . 75
3	2	. . 131	. . 189
3	7	. 1073	. 1548
2	1	. 1335	. 1926
2	9	14161	20430
. .	. .	. . . . .	. . . . .

dies giebt

$$\tfrac{2}{3} = 0{,}66$$
$$\tfrac{7}{10} = 0{,}700$$
$$\tfrac{9}{13} = 0{,}6923\,..$$
$$\tfrac{52}{75} = 0{,}6933\,..$$
$$\tfrac{131}{189} = 0{,}69312\,.$$
$$\tfrac{1073}{1548} = 0{,}693152\,....$$
$$\tfrac{1335}{1926} = 0{,}6931464\,...$$
$$\tfrac{14161}{20430} = 0{,}6931473\,...$$

Nun ist $lgn.\,2 = 0{,}69314718\,.....$

also der zuletzt gefundene Näherungsbruch bis auf sechs Dezimalstellen genau. Wollte man aus der Reihe

$$lg\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots$$

durch Summirung der einzelnen Reihenglieder den Werth von $lg\,2$ suchen, so giebt die Summe der zwanzig ersten Glieder dieser Reihe 0,698771.... also den wahren Werth nur auf zwei Dezimalstellen genau.

Für $x = 2$ giebt

$$lgn\,3 = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^6}{6} + \ldots\ldots$$

eine wachsende Reihe, von welcher es unmöglich ist, den wahren Werth durch Summirung der einzelnen Glieder zu finden, weil, je weiter man die Rechnung fortsetzt, sich die Summe der Glieder vom wahren Werth der Reihe desto mehr entfernt.

Für den entsprechenden Kettenbruch erhält man

$$lg\,3 = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{1} + \frac{2}{5} + \frac{3}{1} + \frac{3}{7} + \frac{4}{1} + \frac{4}{9} + \frac{5}{1} + \frac{5}{11} + \ldots.$$

daher

I	II	1	0
		0	1
2	1	2	1
1	1	2	2
1	3	8	7
2	1	12	11
2	5	76	69
3	1	112	102
3	7	1012	921
4	1	1460	1329
4	9	17188	15645
5	1	24488	22290
5	11	355308	323415
6	1	502236	457155
..	...	......	......

Nun ist $lgn\ 3 = 1{,}098612288 \ldots.$; man findet aber

$$\frac{502236}{457155} = 1{,}09861206 \ldots..$$

also giebt dieser Näherungsbruch den wahren Werth schon auf sechs Dezimalstellen genau an, wenn es gleich unmöglich ist, die Summe der Reihe durch Zusammenzählung ihrer Glieder zu berechnen.

§. 301.

Aufgabe. Die Reihe:

$$S = 1 - \alpha x + \alpha(\alpha+\beta)x^2 - \alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)x^3 + \alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)x^4 - \ldots.$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Zur Abkürzung setze man

$\alpha(\alpha+\beta) = [\alpha+\beta]!$; $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta) = [\alpha+2\beta]!$; $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta) = [\alpha+3\beta]! \ldots.$
so wird nach §. 298. $r = 0$; $h = 1$; $a_1 = A = 1$; $a_2 = \alpha$; $a_3 = \alpha\beta$ und ferner

$a_4 = 1 . \alpha\beta[\alpha+\beta]!$	$a_5 = 1 . 2\alpha_2\beta^3[\alpha+\beta]!$	$a_6 = 1 . 2\alpha^3\beta^4[\alpha+\beta]![\alpha+2\beta]!$
$b_4 = -2 . \alpha\beta[\alpha+2\beta]!$	$b_5 = -2 . 3\alpha^2\beta^3[\alpha+2\beta]!$	$b_6 = -2 . 3\alpha^3\beta^4[\alpha+\beta]![\alpha+3\beta]!$
$c_4 = +3\alpha\beta[\alpha+3\beta]!$	$c_5 = 3 . 4\alpha^2\beta^3[\alpha+3\beta]!$	. . . .
$d_4 = -4\alpha\beta[\alpha+4\beta]!$	. . . .	
. . . .		

$$a_7 = 2 . 1 . 2 . 3\,\alpha^5\beta^8[\alpha+\beta]![\alpha+\beta]![\alpha+2\beta]! \quad \text{u. s. w.}$$

. . . .

Hienach wird

$$S = \frac{1}{1} + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha\beta x}{\alpha} + \frac{\alpha\beta[\alpha+\beta]!x}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha^2\beta^3[\alpha+2\beta]!x}{\alpha\beta[\alpha+\beta]!} + \ldots..$$

oder nach §. 275.

$$S = \frac{1}{1} + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\beta x}{1} + \frac{(\alpha+\beta)x}{1} + \frac{2\beta x}{1} + \frac{(\alpha+2\beta)x}{1} + \frac{3\beta x}{1} + \frac{(\alpha+3\beta)x}{1} + \frac{4\beta x}{1} + \ldots.$$

Eben diesen Bruch findet Euler aus einer andern Betrachtung (*De transformatione seriei divergentis. Nova Acta acad. Petropolit. ad Ann.* 1784. *p.* 36. *etc.*).

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind nach §. 298.

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{1+\alpha x}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{1+\beta x}{1+(\alpha+\beta)x}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{1+(\alpha+2\beta)x}{1+2(\alpha+\beta)x+\alpha(\alpha+\beta)x^2}$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{1+(\alpha+4\beta)x+2\beta^2x^2}{1+2(\alpha+2\beta)x+(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)x^2}$$

u. s. w.

Für $\alpha = \beta = x = 1$ erhält man

$$S = 1 - 1 + 2! - 3! + 4! - 5! + 6! - 7! + \ldots. \text{ und}$$

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6}{1} + \ldots.$$

Nach §. 261. findet man die aufeinander folgenden Näherungsbrüche

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{300}{501} = 0,598\,802$
$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{920}{1564} = 0,588\,294$
$\frac{2}{3} = 0,666\,666$	$\frac{2420}{4051} = 0,597\,383$
$\frac{4}{7} = 0,571\,428$	$\frac{7940}{13327} = 0,595\,783$
$\frac{8}{13} = 0,615\,384$	$\frac{22460}{37633} = 0,596\,816$
$\frac{20}{34} = 0,588\,235$	$\frac{78040}{130921} = 0,596\,080$
$\frac{44}{73} = 0,602\,739$	$\frac{235360}{394533} = 0,596\,562$
$\frac{124}{209} = 0,593\,301$	$\frac{859580}{1441725} = 0,596\,229$

u. s. w.

Hieraus geht hervor, daß im vorliegenden Fall die Näherungsbrüche sich dem wahren Werthe des Kettenbruches sehr langsam nähern, und daß aus der Berechnung von 16 Näherungsbrüchen nur erst die drei ersten Dezimalstellen mit Sicherheit gefunden sind.

Wird der vorstehende Kettenbruch nach §. 282. verwandelt, so erhält man schneller annähernde Näherungsbrüche.

§. 302.

Aufgabe. Die Reihe $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots\ldots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Hier ist $r = 1$; $h = 2$; $a_1 = A = 1$; $a_2 = -\frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{4}{3.3.5}$; .... daher findet man nach §. 298.

$$S = \frac{x}{1} - \frac{1.1x^2}{3} - \frac{2.2x^2}{5} - \frac{3.3x^2}{7} - \frac{4.4x^2}{9} - \frac{5.5x^2}{11} - \frac{6.6x^2}{13} - \frac{7.7x^2}{15} - \ldots.$$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1}$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{3x}{3 - x^2}$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(15 - 4x^2)x}{15 - 9x^2}$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(105 - 55x^2)x}{105 - 90x^2 + 9x^4}$$
$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(945 - 735x^2 + 64x^4)x}{945 - 1050x^2 + 2225x^4}$$

u. s. w.

Nach §. 274. erhält man ferner

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{2.2x^2}{5} - \frac{3.3x^2}{7} - \frac{4.4x^2}{9} - \frac{5.5x^2}{11} - \frac{6.6x^2}{13} - \ldots.$$

Mit den beiden hier gefundenen Kettenbrüchen vergleiche man die §. 294 und 295. durch ein anderes Verfahren gefundenen, so überzeugt man sich leicht, daß hier der Kettenbruch §. 295. erhalten wird, wenn man für die Reihe $S - x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots$ den entsprechenden Kettenbruch sucht. Aus diesem findet man alsdann den Ausdruck §. 294.

§. 303.

Aufgabe. Die Reihe für

$$Arc\ tg\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots\ldots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 298. wird hier $r = 1$; $h = 2$; $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{4}{3.3.5}$; u. s. w. und man findet hieraus

$$Arc\ tg\ x = \frac{x}{1} + \frac{1.1x}{3} + \frac{2.2x^2}{5} + \frac{3.3x^2}{7} + \frac{4.4x^2}{9} + \frac{5.5x^2}{11} + \frac{6.6x^2}{13} + \frac{7.7x^2}{15} + \ldots.$$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{3x}{3 + x^2}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(15 + 4x^2)x}{15 + 9x^2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(105 + 55x^2)x}{105 + 90x^2 + 9x^4}$$

u. s. w.

§. 304.

Aufgabe. Die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots.$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 298. wird hier

$$r = 1;\; h = 2;\; a_1 = 1;\; a_2 = \frac{1}{3!};\; a_3 = \frac{-2.7}{3!5!};\; \text{u. s. w.}$$

und man findet

$$\sin x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2.3} - \frac{7x^2}{2.5} + \frac{11x^2}{2.7.7} - \frac{19.29x^2}{2.9.11} + \frac{7.11^2x^2}{2.19.29} - \frac{41.11689x^2}{2.11^2.13} + \ldots.$$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1}$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{6x}{6 + x^2}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(60 - 7x^2)x}{60 + 3x^2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(5880 - 620x^2)x}{5880 + 360x^2 + 11x^4}$$

u. s. w.

Wird dieser Kettenbruch in einen andern mit positiven Ergänzungsbrüchen nach §. 280. verwandelt, so erhält man

$$\sin x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{1} + \frac{7x^2}{10 - 7x^2} + \frac{11x^2}{97} + \frac{1}{1} + \frac{551x^2}{198 - 551x^2} + \ldots.$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1}$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{5x}{5+x^2}$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{6x}{6+x^2}$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(60-7x^2)x}{60+3x^2}$$
$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(5820-613x^2)x}{5820+357x^2+11x^4}$$
$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{(5880-620x^2)x}{5880+360x^2+11x^4}$$
u. s. w.

§. 305.

Zusatz. Es ist $cosec\ x = \frac{1}{\sin x}$ daher §. 274.

$$cosec\ x = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2.3x - \frac{7.xx^2}{2.5 + \frac{11.x^2}{2.7.7 - \dots}}}$$ oder

$$cosec\ x = \frac{1}{x} + \frac{x}{2.3 - \frac{7x^2}{2.5 + \frac{11x^2}{2.7.7 - \frac{19.29x^2}{2.9.11 + \frac{7.11^2.x^2}{2.19.29 - \dots}}}}}$$

§. 306.

Aufgabe. Die Reihe

$$Arc\ \sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3^2x^5}{5!} + \frac{3^2.5^2x^7}{7!} + \frac{3^2.5^2.7^2x^9}{9!} + \dots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 298. wird hier

$$r = 1;\ h = 2;\ a_1 = 1;\ a_2 = -\frac{1}{3!};\ a_3 = \frac{2.17}{3!5!};$$ u. s. w.

daher findet man

$$Arc\ \sin x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2.3 - \frac{17x^2}{2.5 - \frac{9.61x^2}{2.7.17 - \frac{29.2381x^2}{2.9.61 - \frac{17.25.93109x^2}{2.11.29.2381 - \dots}}}}}}$$

Die entsprechenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{x}{1}$$
$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{6x}{6-x^2}$$
$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{(60-17x^2)x}{60-27x^2}$$
$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{(14280-7340x^2)x}{14280-9720x^2+549x^4}$$
u. s. w.

§. 307.

Aufgabe. Die Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots,$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 298. findet man

$$\cos x = \frac{1}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^2}{2.3} + \frac{3x^2}{2.25} - \frac{313x^2}{2.3.7} + \frac{5.59x^2}{2.313} - \frac{25.1753x^2}{2.3.11.59} + \ldots\ldots$$

und die Näherungsbrüche

$$\frac{N}{M} = 1$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{2}{2+x^2}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{12-5x^2}{12+x^2}$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{600-244x^2}{600+56x^2+3x^4}$$

u. s. w.

§. 308.

Zusatz. Es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, daher §. 274.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^2}{2.3} + \frac{3x^2}{2.25} - \frac{313x^2}{2.3.7} + \frac{5.59x^2}{2.313} - \ldots\ldots$$

§. 309.

Aufgabe. Die Reihe

$$Arc\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - x - \frac{x^3}{3!} - \frac{3^2x^5}{5!} - \frac{3^2.5^2x^7}{7!} - \frac{3^2.5^2.7^2x^9}{9!} - \ldots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Es ist $\tfrac{1}{2}\pi - Arc\cos x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3^2x^5}{5!} + \frac{3^2.5^2x^7}{7!} + \ldots$

und weil nach §. 306. der Kettenbruch für diese Reihe bekannt ist, so erhält man

$$Arc\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2.3} - \frac{17x^2}{2.5} - \frac{9.61x^2}{2.7.17} - \frac{29.2381x^2}{2.9.61} - \ldots$$

und hieraus die Näherungsbrüche

$$\frac{N}{M} = \tfrac{1}{2}\pi - x$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{6x}{6-x^2}$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{60x-17x^3}{60-27x^2}$$

u. s. w.

§. 310.

§. 310.

Aufgabe. Die Reihe

$$S = \frac{1}{r} + \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+2} + \frac{x^3}{r+3} + \frac{x^4}{r+4} + \frac{x^5}{r+5} + \ldots\ldots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach §. 298. wird hier

$$a_1 = \frac{1}{r};\ a_2 = \frac{-1}{r+1};\ a_2' = \frac{1}{r(r+1)^2(r+2)};\ a_4 = \frac{1}{r(r+1)(r+2)^2(r+3)};$$

$$a_5 = \frac{-2.2}{r^2(r+1)^3(r+2)^3(r+3)^2(r+4)};\ a_6 = \frac{2.2}{r^3(r+1)^4(r+2)^3(r+3)^3(r+4)^2(r+5)};$$

$$a_7 = \frac{3.3.4.4}{r^6(r+1)^7(r+2)^6(r+3)^6(r+4)^3(r+5)^2(r+6)};\ \text{u. s. w.}$$

Hienach findet man

$$S = \cfrac{1}{r - \cfrac{r^2 x}{r+1 - \cfrac{x}{r+2 - \cfrac{(r+1)^2 x}{r+3 - \cfrac{2.2x}{r+4 - \cfrac{(r+2)^2 x}{r+5 - \cfrac{3.3x}{r+6 - \cfrac{(r+3)^2 x}{r+7 - \cfrac{4.4x}{r+8 - \ldots\ldots}}}}}}}}}$$

§. 311.

Zusatz. Durchgängig $\frac{\alpha}{\beta}$ statt r gesetzt, giebt nach gehöriger Abkürzung

$$S = \beta\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{x^2}{\alpha+2\beta} + \frac{x^3}{\alpha+3\beta} + \frac{x^4}{\alpha+4\beta} + \frac{x^5}{\alpha+5\beta} + \ldots\right)$$

$$S = \cfrac{\beta}{\alpha - \cfrac{\alpha^2 x}{\alpha+\beta - \cfrac{\beta^2 x}{\alpha+2\beta - \cfrac{(\alpha+\beta)^2 x}{\alpha+3\beta - \cfrac{2.2\beta^2 x}{\alpha+4\beta - \cfrac{(\alpha+2\beta) x}{\alpha+5\beta - \cfrac{3.3\beta^2 x}{\alpha+6\beta - \ldots}}}}}}}$$

oder, wenn man diese Ausdrücke durch β dividirt, so findet man für

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{x^2}{\alpha+2\beta} + \frac{x^3}{\alpha+3\beta} + \frac{x^4}{\alpha+4\beta} + \frac{x^5}{\alpha+5\beta} + \ldots$$

$$S = \cfrac{1}{\alpha - \cfrac{\alpha^2 x}{\alpha+\beta - \cfrac{\beta^2 x}{\alpha+2\beta - \cfrac{(\alpha+\beta)^2 x}{\alpha+3\beta - \cfrac{2.2\beta^2 x}{\alpha+4\beta - \cfrac{(\alpha+2\beta)^2 x}{\alpha+5\beta - \cfrac{3.3\beta^2 x}{\alpha+6\beta - \ldots}}}}}}}$$

oder durchgängig $-x$ statt x gesetzt, giebt für

$$S = \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{x^2}{\alpha+2\beta} - \frac{x^3}{\alpha+3\beta} + \frac{x^4}{\alpha+4\beta} - \frac{x^5}{\alpha+5\beta} + \ldots$$

$$S = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{\alpha^2 x}{\alpha+\beta + \cfrac{\beta^2 x}{\alpha+2\beta + \cfrac{(\alpha+\beta)^2 x}{\alpha+3\beta + \cfrac{2.2\beta^2 x}{\alpha+4\beta + \cfrac{(\alpha+2\beta)^2 x}{\alpha+5\beta + \ldots\ldots}}}}}}$$

§. 312.

Aufgabe. Die Reihe

$$S = \frac{1}{r} + \frac{x}{r.r+1} + \frac{x^2}{r.r+1.r+2} + \frac{x^3}{r.r+1.r+2.r+3} + \frac{x^4}{r.r+1\ldots r+4} + \ldots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Zur Abkürzung setze man
$r(r+1)=[r+1]!$; $r(r+1)(r+2)=[r+2]!$; $r(r+1)(r+2)(r+3)=[r+3]!$; u. s. w.,
so wird hier, nach §. 298.

$$a_1=\frac{1}{r};\ a_2=\frac{-1}{[r+1]!};\ a_3=\frac{-1}{[r+1]!\,[r+2]!};\ a_4=\frac{-1}{[r+2]!\,[r+3]!};$$

$$a_5=\frac{1.2}{r[r+1]!\,[r+2]!\,[r+3]!\,[r+4]!};\ a_6=\frac{1.2}{rr[r+1]!\,[r+1]!\,[r+2]!\,[r+3]!\,[r+4]!\,[r+5]!};$$

$$a_7=\frac{1.2.2.3}{r^3[r+1]!^3\,[r+2]!^3\,[r+3]!\,[r+4]!\,[r+5]!\,[r+6]!};$$

$$a_8=\frac{-2.2.2.3}{r^6[r+1]!^5[r+2]!^4[r+3]!^2\,[r+4]!^2\,[r+5]!\,[r+6]!\,[r+7]!};\ \text{u. s. w.}$$

Hieraus findet man nach erfolgter Abkürzung:

$$S=\frac{1}{r}-\frac{rx}{r+1}+\frac{1.x}{r+2}-\frac{(r+1)x}{r+3}+\frac{2x}{r+4}-\frac{(r+2)x}{r+5}+\frac{3x}{r+6}-\frac{(r+3)x}{r+7}+\frac{4x}{r+8}-\frac{(r+4)x}{r+9}+\dots$$

§. 313.

Zusatz. Durchgängig $r=\frac{\alpha}{\beta}$ gesetzt und dann x mit $\frac{x}{\beta}$ vertauscht, giebt nach gehöriger Abkürzung:

$$S=\beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{x}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}+\frac{x^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)}+\dots\right)$$

$$S=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha x}{\alpha+\beta}+\frac{1.\beta^2 x}{\alpha+2\beta}-\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha+3\beta}+\frac{2\beta^2 x}{\alpha+4\beta}-\frac{(\alpha+2\beta)x}{\alpha+5\beta}+\frac{3\beta^2 x}{\alpha+6\beta}-\dots$$

Durch β dividirt und $-x$ statt x gesetzt, giebt für

$$S=\frac{1}{\alpha}-\frac{x}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}-\frac{x^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)}+\dots$$

$$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha x}{\alpha+\beta}-\frac{1.\beta^2 x}{\alpha+2\beta}+\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha+3\beta}-\frac{2\beta^2 x}{\alpha+4\beta}+\frac{(\alpha+2\beta)x}{\alpha+5\beta}-\frac{3\beta^2 x}{\alpha+6\beta}+\dots$$

§. 314.

Aufgabe. Die Reihe

$$S=\frac{1}{r}+\frac{2!\,x}{r(r+1)}+\frac{3!\,x^2}{r(r+1)(r+2)}+\frac{4!\,x^3}{r(r+1)(r+2)(r+3)}+\frac{5!\,x^4}{r(r+1)\dots(r+4)}+\dots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Mit Beibehaltung der §. 312. angenommenen Bezeichnung wird nach §. 298.

$$a_1=\frac{1}{r};\ a_2=\frac{-2}{[r+1]!};\ a_3=\frac{2(r-1)}{[r+1]!\,[r+2]!};\ a_4=\frac{2.3!\,(r-1)}{r[r+2]!\,[r+3]!};$$

$$a_5 = \frac{-2.4.3!(r-1)^2}{[r+1]![r+2]![r+3]![r+4]!};\quad a_6 = \frac{4.4!4!(r-1)^3}{r[r+1]!^2[r+2]![r+3]![r+4]![r+5]!};$$

$$a_7 = \frac{4!4!4!4!(r-1)^3}{r^2[r+1]!^2[r+2]!^2[r+3]!^2[r+4]![r+5]![r+6]!};$$

$$a_8 = \frac{-4.4!4!4!4!4!5!(r-1)^4}{r^3[r+1]!^4[r+2]!^4[r+3]!^2[r+4]!^2[r+5]![r+6]![r+7]!};$$ u. s. w.

Hieraus findet man nach erfolgter Abkürzung

$$S = \frac{1}{r} - \frac{2rx}{r+1} + \frac{1(r-1)x}{r+2} - \frac{3(r+1)x}{r+3} + \frac{2rx}{r+4} - \frac{4(r+2)x}{r+5} + \frac{3(r+1)x}{r+6} - \frac{5(r+3)x}{r+7} + \frac{4(r+2)x}{r+8} - \text{u. s. w.}$$

§. 315.

Zusatz. Durchgängig $\frac{\alpha}{\beta}$ statt r und dann $\frac{x}{\beta}$ statt x gesetzt, so findet man nach erfolgter Abkürzung

$$S = \beta\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2!x}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{3!x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} + \frac{4!x^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)} + \ldots\right)$$

$$S = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{2\alpha x}{\alpha+\beta} + \frac{1(\alpha-\beta)x}{\alpha+2\beta} - \frac{3(\alpha+\beta)x}{\alpha+3\beta} + \frac{2\alpha x}{\alpha+4\beta} - \frac{4(\alpha+2\beta)x}{\alpha+5\beta} + \ldots$$

Die folgenden Ergänzungsbrüche sind:

$$\frac{3(\alpha+\beta)x}{\alpha+6\beta} - \frac{5(\alpha+3\beta)x}{\alpha+7\beta} + \frac{4(\alpha+2\beta)x}{\alpha+8\beta} - \frac{6(\alpha+4\beta)x}{\alpha+9\beta} + \ldots$$

Durch β dividirt und $-x$ statt x gesetzt, giebt für

$$S = \frac{1}{\alpha} - \frac{2!x}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{3!x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} - \frac{4!x^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)} + \ldots$$

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha x}{\alpha+\beta} - \frac{1(\alpha-\beta)x}{\alpha+2\beta} + \frac{3(\alpha+\beta)x}{\alpha+3\beta} - \frac{2\alpha x}{\alpha+4\beta} + \frac{4(\alpha+2\beta)x}{\alpha+5\beta} - \frac{3(\alpha+\beta)x}{\alpha+6\beta} + \ldots$$

§. 316.

Aufgabe. Das Binomium $(1+x)^n$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Es ist §. 25., wenn n_1; n_2; n_3; .... Binomialkoeffizienten bedeuten: $(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \ldots$ und wenn man diese Reihe mit §. 298. vergleicht, so wird:

$$(1+x)^n = \frac{1}{1} - \frac{nx}{1} + \frac{(n+1)x}{2} - \frac{(n-1)x}{3} + \frac{(n+2)x}{2} - \frac{(n-2)x}{5} + \frac{(n+3)x}{2} - \frac{(n-3)x}{7} + \frac{(n+4)x}{2} - \ldots$$

Für die aufeinander folgenden Näherungsbrüche erhält man

$$\frac{N}{M} = 1;$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{1-nx};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{2+(n+1)x}{2-(n-1)x};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6+2(n+2)x}{6-4(n-1)x+n(n-1)x^2};$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{12+6(n+2)x+(n+1)(n+2)x^2}{12-6(n-2)x+(n-1)(n-2)x^2};$$

$$\frac{N_5}{M_5} = \frac{60+24(n+3)x+3(n+2)(n+3)x^2}{60+36(n+3)x+9(n-1)(n-2)x^2-n(n-1)(n-2)x^3};$$

u. s. w.

Verwandelt man den vorstehenden Kettenbruch, nach §. 280., in einen solchen, welcher nur positive Glieder hat, so findet man

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1-nx} + \frac{(n+1)x}{1} + \frac{1}{1} + \frac{(n-1)x}{3-(n-1)x} + \frac{(n+2)x}{1} + \frac{1}{1} + \frac{(n-2)x}{5-(n-2)x} + \frac{(n+3)x}{1} + \frac{1}{1} + \ldots$$

Die zugehörigen Näherungsbrüche sind

$$\frac{1}{1-nx};\quad \frac{1+x+nx}{1+x};\quad \frac{2+(n+1)x}{2-(n-1)x};\quad \text{u. s. w.}$$

§. 317.

Zusatz. Soll $(a \pm x)^n$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so setze man $\pm \frac{x}{a}$ statt x (§. 298.), so ist alsdann $\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n = \frac{(a \pm x)^n}{a^n}$, daher

$$\frac{(a \pm x)^n}{a^n} = \frac{1}{1} \mp \frac{n\frac{x}{a}}{1} \pm \frac{(n+1)\frac{x}{a}}{2} \mp \frac{(n-1)\frac{x}{a}}{3} \pm \frac{(n+2)\frac{x}{a}}{2} \mp \ldots.$$

oder nach §. 267. und 275.

$$(a \pm x)^n = \frac{a^n}{1} \mp \frac{nx}{a} \pm \frac{(n+1)x}{2} \mp \frac{(n-1)x}{3a} \pm \frac{(n+2)x}{2} \mp \frac{(n-2)x}{5a} \pm \frac{(n+3)x}{2} \mp \frac{(n-3)x}{7a} \pm \ldots.$$

Die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind

$$\frac{N}{M} = a^n;$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{a^{n+1}}{a \mp nx};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{2a \pm (n+1)x}{2a \mp (n-1)x}\, a^n;$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6a \pm 2(n+2)x}{6a^2 \mp 4(n-1)ax + n(n-1)x^2}\,a^{n+1};$$

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{12a^2 \pm 6(n+2)ax + (n+1)(n+2)x^2}{12a^2 \mp 6(n-2)ax + (n-1)(n-2)x^2}\,a^n;$$

wo durchgängig, entweder nur die obern, oder nur die untern Zeichen gelten.

§. 318.

2. **Zusatz.** Wird $-n$, statt n (§. 317.) gesetzt, so erhält man $(a \pm x)^{-n}$, oder

$$\frac{1}{(a \pm x)^n} = \frac{a^{-n}}{1} \pm \frac{nx}{a} \mp \frac{(n-1)x}{2} \pm \frac{(n+1)x}{3a} \mp \frac{(n-2)x}{2} \pm \frac{(n+2)x}{5a} \mp \frac{(n-3)x}{2} \pm \ldots$$

oder §. 275.

$$\frac{1}{(a \pm x)^n} = \frac{1}{a^n} \pm \frac{na^n x}{a} \mp \frac{(n-1)x}{2} \pm \frac{(n+1)x}{3a} \mp \frac{(n-2)x}{2} \pm \frac{(n+2)x}{5a} \mp \ldots$$

und die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{a^n};$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{a^{n-1}[a \pm nx]};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{2a \mp (n-1)x}{a^n[2a \pm (n+1)x]};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6a \mp 2(n-2)x}{a^{n-1}[6a^2 \pm 4(n+1)ax - n(n+1)x^2]};$$

Setzt man 1, 2, 3 statt n, so wird

$$\frac{1}{a \pm x} = \frac{1}{a} \pm x$$

$$\frac{1}{(a \pm x)^2} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{2a^2 x}{a} \mp \frac{x}{2} \pm \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{(a \pm x)^3} = \frac{1}{a^3} \pm \frac{3a^3 x}{a} \mp \frac{2x}{2} \pm \frac{4x}{3a} \mp \frac{x}{2} \pm \frac{x}{a}.$$

§. 319.

3. **Zusatz.** Setzt man $\frac{1}{n}$ statt n in §. 317., so findet man $(a \pm x)^{\frac{1}{n}}$, oder

$$\sqrt[n]{(a \pm x)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{1} \mp \frac{x}{na} \pm \frac{(n+1)x}{2} \pm \frac{(n-1)x}{3na} \pm \frac{(2n+1)x}{2} \pm \frac{(2n-1)x}{5na} \pm \ldots$$

und die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \sqrt[n]{a};$$

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{na\sqrt[n]{a}}{na \mp x};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{2na \pm (n+1)x}{2na \pm (n-1)x}\sqrt[n]{a};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6n^2a \pm 2n(2n+1)x}{6n^2a^2 \pm n(n-1)ax - (n-1)x^2}\, a\sqrt[n]{a};$$

Wird 2, 3, statt n gesetzt, so erhält man

$$\sqrt{(a \pm x)} = \frac{\sqrt{a}}{1} \mp \frac{x}{2a} \pm \frac{3x}{2} \pm \frac{x}{6a} \pm \frac{5x}{2} \pm \frac{3x}{10a} \pm \frac{7x}{2} \pm \frac{5x}{14a} \pm \ldots\ldots$$

$$\sqrt[3]{(a \pm x)} = \frac{\sqrt[3]{a}}{1} \mp \frac{x}{3a} \pm \frac{4x}{2} \pm \frac{2x}{3.3a} \pm \frac{7x}{2} \pm \frac{5x}{3.5a} \pm \frac{10x}{2} \pm \frac{8x}{3.7a} \pm \ldots\ldots$$

§. 320.

4. Zusatz. Wenn hingegen $\frac{1}{n}$ statt n in §. 318. gesetzt wird, so erhält man $\frac{1}{(a \pm x)^{\frac{1}{n}}}$

oder

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(a \pm x)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \pm \frac{x\sqrt[n]{a}}{na} \pm \frac{(n-1)x}{2} \pm \frac{(n+1)x}{3na} \pm \frac{(2n-1)x}{2} \pm \frac{(2n+1)x}{5na} \pm \frac{(3n-1)x}{2} \pm \frac{(3n+1)x}{7na} \pm \ldots$$

oder auch

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(a \pm x)}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a} \pm \frac{ax}{na} \pm \frac{(n-1)x}{2} \pm \frac{(n+1)x}{3na} \pm \frac{(2n-1)x}{2} \pm \frac{(2n+1)x}{5na} \pm \frac{(3n-1)x}{2} \pm \frac{(3n+1)x}{7na} \pm \ldots\ldots$$

Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}; \qquad \frac{N_1}{M_1} = \frac{na}{(na \pm x)\sqrt[n]{a}};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{2na \pm (n-1)x}{[2na \pm (n+1)x]\sqrt[n]{a}};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{6n^2a^2 \pm 2n(n-1)ax}{[6n^2a^2 \pm 4n(n+1)ax - (n+1)x^2]\sqrt[n]{a}}.$$

Setzt man 2, 3 statt n, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{(a \pm x)}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \pm \frac{ax}{2a} \pm \frac{x}{2} \pm \frac{3x}{2.3a} \pm \frac{3x}{2} \pm \frac{5x}{2.5a} \pm \frac{5x}{2} \pm \frac{7x}{2.7a} \pm \frac{7x}{2} \pm \ldots.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a \pm x)}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} \pm \frac{ax}{3a} \pm \frac{2x}{2} \pm \frac{4x}{3.3a} \pm \frac{5x}{2} \pm \frac{7x}{3.5a} \pm \frac{8x}{2} \pm \frac{10x}{3.7a} \pm \frac{11x}{2} \pm \ldots.$$

§. 321.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1 + hx)^{\frac{a}{h}} = 1 + \frac{a}{h}\, hx + \left(\frac{a}{h}\right)_2 h^2 x^2 + \ldots. + \left(\frac{a}{h}\right)_n h^n x^n + \ldots.$$

oder, nach §. 38. (*LXXIII.*)

$$(1 + hx)^{\frac{a}{h}} = 1 + \frac{a}{1}\, x + \frac{a.a-h}{1.2}\, x^2 + \frac{a.a-h.a-2h}{1\,.\,2\,.\,3}\, x^3 + \ldots.$$

Nun setze man §. 317., $a = 1$; $x = hx$ und $n = \frac{a}{h}$, so findet man für die Reihe

$$(I)\ \ 1 + \frac{a}{1}\, x + \frac{a.a-h}{1.2}\, x^2 + \frac{a.a-h.a-2h}{1.2.3}\, x^3 + \frac{a.a-h.a-2h.a-3h}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\, x^4 + \ldots$$

$= S$, den entsprechenden Kettenbruch

$$S = \frac{1}{1} - \frac{ax}{1} + \frac{(a+h)x}{2} - \frac{(a-h)x}{3} + \frac{(a+2h)x}{2} - \frac{(a-2h)x}{5} + \frac{(a+3h)x}{2} - \frac{(a-3h)x}{7} + \ldots.$$

In vorstehenden Ausdrücken durchgängig $-h$, statt h gesetzt, giebt für die Reihe

$$(II)\ \ 1 + \frac{a}{1}\, x + \frac{a.a+h}{1.2}\, x^2 + \frac{a.a+h.a+2h}{1.2.3}\, x^3 + \frac{a.a+h.a+2h.a+3h}{1.2.3.4}\, x^4 + \ldots.$$

$= S'$, den entsprechenden Kettenbruch

$$S' = \frac{1}{1} - \frac{ax}{1} + \frac{(a-h)x}{2} - \frac{(a+h)x}{3} + \frac{(a-2h)x}{2} - \frac{(a+2h)x}{5} + \frac{(a-3h)x}{2} - \frac{(a+3h)x}{7} + \ldots..$$

Es lassen sich daher alle Reihen, welche unter die vorstehenden Formen gebracht werden können, leicht in Kettenbrüche verwandeln. Wird z. B. $a = 1$ und $h = 0$ gesetzt, so findet man für die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

den entsprechenden Kettenbruch

$$= \frac{1}{1} - \frac{x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{5} + \frac{x}{2} - \frac{x}{7} + \frac{x}{2} - \frac{x}{9} + \frac{x}{2} - \ldots.$$

Die Kettenbrüche welche unter der vorstehenden Form vorkommen, lassen sich auch leicht mit einander multipliziren. Denn man setze in (II) $a = b$, so wird für die Reihe

$$S'' = 1 + \frac{b}{1}x + \frac{b \cdot b+h}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{b \cdot b+h \cdot b+2h}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots\ldots$$

$$S'' = \frac{1}{1} - \frac{bx}{1} + \frac{(b-h)x}{2} - \frac{(b+h)x}{3} + \frac{(b-2h)x}{2} - \frac{(b+2h)x}{5} + \ldots.$$

Nun war $S' = (1 - hx)^{-\frac{a}{h}}$, also $S'' = (1 - hx)^{-\frac{b}{h}}$, daher $S' \cdot S'' = (1 - hx)^{-\frac{a+b}{h}}$. Wird nun in (II) $(a + b)$ statt a gesetzt, so findet man das Produkt der beiden Kettenbrüche S' und S'', oder

$$S' \cdot S'' = \frac{1}{1} - \frac{(a+b)x}{1} + \frac{(a+b-h)x}{2} - \frac{(a+b+h)x}{3} + \frac{(a+b-2h)x}{2} - \frac{(a+b+2h)x}{5} + \ldots.$$

§. 322.

Verwandelt man eine gegebene Reihe mit Ausnahme eines oder einiger ihrer ersten Glieder in einen Kettenbruch, so nähern sich besonders dann die entstehenden Näherungsbrüche dem wahren Werthe der Reihe desto mehr, je größer das erste Glied derselben gegen die folgenden ist.

Wäre die Reihe

$$S = Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + A_4 x^{r+4h} + \ldots.$$

gegeben, und man will solche mit Ausnahme des ersten Gliedes in einen Kettenbruch verwandeln, so setze man

$$S - Ax^r = A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + \ldots.$$

alsdann wird nach §. 298.

$$S - Ax^r = \frac{a_1 x^{r+h}}{1} + \frac{a_2 x^h}{a_1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \ldots\ldots \quad \text{oder}$$

$$S = Ax^r + \frac{a_1 x^{r+h}}{1} + \frac{a_2 x^h}{a_1} + \frac{a_3 x^h}{a_2} + \frac{a_4 x^h}{a_3} + \frac{a_5 x^h}{a_4} + \ldots.$$

und es ist alsdann:

$$a_1 = A_1; \quad a_2 = -A_2; \quad \text{ferner}$$

$a_3 = A_1A_3 - A_2A_2$	$a_4 = A_1(A_2A_4 - A_3A_3)$	$a_5 = a_4b_3 - a_3b_4$	$a_6 = a_5b_4 - a_4b_5$	$a_7 = a_6b_5 - a_5b_6$ u. s. w.
$b_3 = A_1A_4 - A_2A_3$	$b_4 = A_1(A_2A_5 - A_3A_4)$	$b_5 = a_4c_3 - a_3c_4$	$b_6 = a_5c_4 - a_4c_5$	. . . . .
$c_3 = A_1A_5 - A_2A_4$	$c_4 = A_1(A_2A_6 - A_3A_5)$	$c_5 = a_4d_3 - a_3d_4$	. . . . .	
$d_3 = A_1A_6 - A_2A_5$	$d_4 = A_1(A_2A_7 - A_3A_6)$	. . . . .		
. . . .	. . . .			

Die Näherungsbrüche werden für den Kettenbruch ohne das Glied Ax^r nach §. 298 oder 260. bestimmt. Die entsprechenden aufeinander folgenden Näherungswerthe sind alsdann:

$$Ax^r + \frac{N}{M};\ Ax^r + \frac{N_1}{M_1};\ Ax^r + \frac{N_2}{M_2};\ \text{u. s. w.}$$

§. 323.

Zusatz. Die vorstehenden Ausdrücke für den Kettenbruch, welcher der Reihe S entspricht, hätte man auch nach §. 291. finden können, wenn man dort $\frac{1}{Ax^r + A_1x^{r+h} + \ldots} = S'$ setzte, den entsprechenden Kettenbruch entwickelte und daraus nach §. 274. den Werth von $\frac{1}{S'} = Ax^r + A_1x^{r+h} + \ldots.$ bestimmte.

§. 324.

Aufgabe. Den Ausdruck

$$lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots.$$

nach §. 322. in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Der dortigen Bezeichnung gemäß, wird hier $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = -\frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{2.3.3.4}$; u. s. w. $r = h = 1$, daher erhält man:

$$lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2 + \frac{2.2x}{3 + \frac{1.1x}{4 + \frac{3.3x}{5 + \frac{2.2x}{6 + \frac{4.4x}{7 + \frac{3.3x}{8 + \frac{5.5x}{9 + \frac{4.4x}{10 + \ldots}}}}}}}}}$$

Die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind:

$$x - \tfrac{1}{2}x^2;$$

$$x - \frac{3x^2}{6 + 4x};$$

$$x - \frac{12x^2 + x^3}{24 + 8x};$$

$$x - \frac{15x^2 + 8x^3}{30 + 36x + 9x^2};\ \text{u. s. w.}$$

§. 325.

Aufgabe. Den Ausdruck

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots.$$

nach §. 322. in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Der dortigen Bezeichnung gemäß erhält man: $a_1 = -\frac{1}{3!}$; $a_2 = -\frac{1}{5!}$; $a_3 = \frac{-2.11}{5!7!}$; u. s. w.

Ferner ist $r = 1$ und $h = 2$, daher

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^2}{2.5} - \frac{3.11x^2}{2.7.9} + \frac{5x^2}{2.11} - \frac{11^2x^2}{2.3^2.5^2} + \frac{3.5.7.43.61x^2}{2.11^2.13} - \ldots\ldots$$

Die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind:

$$x - \tfrac{1}{6}x^3$$

$$x - \frac{10x^3}{60+3x^2} = \frac{60x - 7x^3}{60+3x^2};$$

$$x - \frac{420x^3 - 11x^5}{2520+60x^2} = \frac{2520x - 360x^3 + 11x^5}{2520+60x^2};$$

$$x - \frac{27720x^3 - 676x^5}{166320 + 4260x^2 + 15x^4};\ \text{u. s. w.}$$

§. 326.

Zusatz. Es ist $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, daher §. 274.

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^2}{2.5} - \frac{3.11x^2}{2.7.9} + \frac{5x^2}{2.11} - \frac{11^2x^2}{2.3^2.5^2} + \ldots\ldots$$

§. 327.

Aufgabe. Die Reihe

$$Arc\ \sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3^2.x^5}{5!} + \frac{3^2.5^2x^7}{7!} + \frac{3^2.5^2.7^2x^9}{9!} + \ldots.$$

nach §. 322. in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Der dortigen Bezeichnung gemäß erhält man: $a_1 = \frac{1}{3!}$; $a_2 = \frac{-3^2}{5!}$; $a_3 = \frac{2.3^2.61}{5!7!}$; u. s. w.

Ferner ist $r = 1$ und $h = 2$, daher

$$Arc\ \sin x = x + \frac{x^3}{2.3} - \frac{3.9x^2}{2.5} - \frac{3.61x^2}{2.7.9} - \frac{5^2.43x^2}{2.61} - \frac{939109x^2}{2.5.9.11.43} - \ldots\ldots$$

Die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind

$$x + \tfrac{1}{6}x^3;$$

$$x + \frac{10x^3}{60 - 27x^2};$$

$$x + \frac{420x^3 - 61x^5}{2520 - 1500x^2};\ \text{u. s. w.}$$

§. 328.

Zusatz. Weil $Arc\cos x = \frac{1}{2}\pi - Arc\sin x$, so erhält man auch (§. 267.)

$$Arc\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{3.9x^2}{2.5} - \frac{3.61x^2}{2.7.9} - \frac{5^2.43x^2}{2.61} - \ldots$$

§. 329.

Aufgabe. Das Binomium $(1+x)^n$ nach §. 322. in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Nach dem binomischen Lehrsatze ist:

$(1+x)^n = 1 + nx + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \ldots$ daher wird hier $a_1 = n$; $a_2 = -n_2$; $a_3 = -\frac{n(n+1)_2}{2}$; $a_4 = -\frac{n.n_2(n+1)_2}{4}$; u. s. w., folglich

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} - \frac{(n-1)x}{2} + \frac{(n+1)x}{3} - \frac{(n-2)x}{2} + \frac{(n+2)x}{5} - \frac{(n-3)x}{2} + \frac{(n+3)x}{7} - \ldots\ldots$$

welches der von Lagrange (*Mém. de l'ac. de Berlin*, 1776.) gefundene Ausdruck ist.

Für die aufeinander folgenden Näherungswerthe erhält man

$1 + nx$

$1 + \frac{2nx}{2-(n-1)x} = \frac{2+(n+1)x}{2-(n-1)x}$

$1 + \frac{(6+x+nx)nx}{2(3+2x-nx)} = \frac{6+4(n+1)x+n(n+1)x^2}{2(3+2x-nx)}$

$1 + \frac{6(2+x)nx}{12-6(n-2)x+(n-1)(n-2)x^2} = \frac{12+6(n+2)x+(n+1)(n+2)x^2}{12-6(n-2)x+(n-1)(n-2)x^2}$

$1 + \frac{60nx+6(n+7)nx^2+n(n+1)(n+2)x^3}{60-24(n-3)x+3(n-2)(n-3)x^2}$

u. s. w.

wo der zweite und vierte Ausdruck genau mit dem §. 316. gefundenen dritten und fünften Ausdruck übereinstimmt.

§. 330.

1. **Zusatz.** Setzt man $\pm\frac{x}{a}$ anstatt x, so erhält man

$$\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n = 1 \pm \frac{n\frac{x}{a}}{1} \mp \frac{(n-1)\frac{x}{a}}{2} \pm \frac{(n+1)\frac{x}{a}}{3} \mp \ldots$$ oder

$$\frac{(a\pm x)^n}{a^n} = 1 \pm \frac{nx}{a} \mp \frac{(n-1)x}{2} \pm \frac{(n+1)x}{3a} \mp \ldots$$ folglich

$$(a\pm x)^n = a^n \pm \frac{na^n x}{a} \mp \frac{(n-1)x}{2} \pm \frac{(n+1)x}{3a} \mp \frac{(n-2)x}{2} \pm \frac{(n+2)x}{5a} \mp \frac{(n-3)x}{2} \pm \frac{(n+3)x}{7a} \mp \ldots\ldots$$

Die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind:

$$\left[1 \pm \frac{nx}{a}\right] a^n$$

$$\left[1 \pm \frac{2nx}{2a \mp (n-1)x}\right] a^n$$

$$\left[1 \pm \frac{(6a \pm x \pm nx)\,nx}{2a\,(3a \pm 2x \mp nx)}\right] a^n$$

$$\left[1 \pm \frac{6\,(2a \pm x)\,nx}{12a^2 \mp 6\,(n-2)\,ax + (n-1)\,(n-2)\,x^2}\right] a^n$$

$$\left[1 \pm \frac{60\,n\,a^2\,x \pm 6\,(n+7)\,n\,a\,x^2 + n\,(n+1)\,(n+2)\,x^3}{60\,a^3 \mp 24\,(n-3)\,a^2\,x + 3\,(n-2)\,(n-3)\,a\,x^2}\right] a^n$$

wo entweder nur die obern oder nur die untern Zeichen gelten.

§. 331.

2. **Zusatz.** Man setze $-n$ statt n in §. 330., so erhält man $(a \pm x)^{-n}$ oder

$$\frac{1}{(a \pm x)^n} = \frac{1}{a^n} \mp \cfrac{nx}{a^{n+1} \pm \cfrac{(n+1)a^n x}{2 \mp \cfrac{(n-1)x}{3a \pm \cfrac{(n+2)x}{2 \mp \cfrac{(n-2)x}{5a \pm \cfrac{(n+3)x}{2 \mp \cfrac{(n-3)x}{7a \pm \ldots\ldots}}}}}}}$$

und die aufeinander folgenden Näherungswerthe

$$\left[1 \mp \frac{nx}{a}\right] \frac{1}{a^n}$$

$$\left[1 \mp \frac{2nx}{2a \pm (n+1)x}\right] \frac{1}{a^n}$$

$$\left[1 \mp \frac{(6a \pm x \mp nx)\,nx}{2a\,(3a \pm 2x \pm nx)}\right] \frac{1}{a^n}$$

$$\left[1 \mp \frac{6\,(2a \pm x)\,nx}{12a^2 \pm 6\,(n+2)\,ax + (n+1)\,(n+2)\,x^2}\right] \frac{1}{a^n}$$

Setzt man 1, 2, 3, statt n, so wird

$$\frac{1}{a \pm x} = \frac{1}{a} \mp \cfrac{x}{a^2 \pm ax}$$

$$\frac{1}{(a \pm x)^2} = \frac{1}{a^2} \mp \cfrac{2x}{a^3 \pm \cfrac{3a^2 x}{2 \mp \cfrac{x}{3a \pm 2x}}}$$

$$\frac{1}{(a \pm x)^3} = \frac{1}{a^3} \mp \cfrac{3x}{a^4 \pm \cfrac{4a^3 x}{2 \mp \cfrac{2x}{3a \pm \cfrac{5x}{2 \mp \cfrac{x}{5a \pm 3x}}}}}$$

§. 332.

3. **Zusatz.** Wird $\frac{1}{n}$ statt n in §. 330. gesetzt, so erhält man $(a \pm x)^{\frac{1}{n}}$ oder

$$\sqrt[n]{(a \pm x)} = \sqrt[n]{a} \pm \cfrac{x\sqrt[n]{a}}{na \pm \cfrac{(n-1)x}{2 \pm \cfrac{(n+1)x}{3na \pm \cfrac{(2n-1)x}{2 \pm \cfrac{(2n+1)x}{5na \pm \cfrac{(3n-1)x}{2 \pm \ldots\ldots}}}}}}$$

und die aufeinander folgenden Näherungswerthe sind

$$\left[1 \pm \frac{x}{na}\right] \sqrt[n]{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{2x}{2na \pm (n-1)x}\right] \sqrt[n]{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{(6na \pm x \pm nx)x}{2na(3na \mp x \pm 2nx)}\right] \sqrt[n]{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{6(2a \pm x)nx}{12n^2a^2 \pm 6n(2n-1)ax + (n-1)(2n-1)x^2}\right] \sqrt[n]{a}$$

Für $n = 2$ erhält man

$$\sqrt{(a \pm x)} = \sqrt{a} \pm \cfrac{x\sqrt{a}}{2a \pm \cfrac{x}{2 \pm \cfrac{3x}{2.3a \pm \cfrac{3x}{2 \pm \cfrac{5x}{2.5a \pm \cfrac{5x}{2 \pm \cfrac{7x}{2.7a \pm \cfrac{7x}{2 \pm \ldots\ldots}}}}}}}}$$

oder nach §. 275.

$$\sqrt{(a \pm x)} = \sqrt{a} \pm \cfrac{x\sqrt{a}}{2a \pm \cfrac{x}{2 \pm \cfrac{x}{2a \pm \cfrac{x}{2 \pm \cfrac{x}{2a \pm \cfrac{x}{2 \pm \cfrac{x}{2a \pm \ldots}}}}}}}$$

und die Näherungswerthe:

$$\left[1 \pm \frac{x}{2a}\right] \sqrt{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{2x}{4a \pm x}\right] \sqrt{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{(4a \pm x)x}{4a(2a \pm x)}\right] \sqrt{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{4(2d + x)x}{16a^2 \pm 12ax + x^2}\right] \sqrt{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{16a^2x \pm 12ax^2 + x^3}{2a(16a^2 \pm 16ax + 3x^2)}\right] \sqrt{a}$$

Für $n = 3$ wird

$$\sqrt[3]{(a \pm x)} = \sqrt[3]{a} \pm \cfrac{x\sqrt[3]{a}}{3a \pm \cfrac{2x}{2 \pm \cfrac{4x}{3.3a \pm \cfrac{5x}{2 \pm \cfrac{7x}{3.5a \pm \cfrac{8x}{2 \pm \cfrac{10x}{3.7a \pm \cfrac{11x}{2 \pm \ldots\ldots}}}}}}}}$$

und die Näherungswerthe sind;

$$\left[1 \pm \frac{x}{3a}\right] \sqrt[3]{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{x}{3a \pm x}\right] \sqrt[3]{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{2(3a \pm x)x}{3a(9a \pm 5x)}\right] \sqrt[3]{a}$$

$$\left[1 \pm \frac{9(2a \pm x)x}{54a^2 \pm 45ax + 5x^2}\right] \sqrt[3]{a}$$

Beispiel. Sucht man die Quadratwurzel aus 62, so ist $62 = 8^2 - 2$; man setze daher $a = 64$ und $x = 2$, so erhält man

$$\sqrt{62} = 8 - \frac{2.8}{2.64} - \frac{2}{2} - \frac{2}{2.64} - \frac{2}{2} - \frac{2}{2.64} - \frac{2}{2} - \ldots$$

oder auch

$$\sqrt{62} = 8 - \frac{8}{64} - \frac{1}{2} - \frac{1}{64} - \frac{1}{2} - \frac{1}{64} - \frac{1}{2} - \frac{1}{64} - \frac{1}{2} - \ldots\ldots$$

Die Näherungswerthe sind
$8\,(1-\frac{1}{64})$; $8\,(1-\frac{2}{127})$; $8\,(1-\frac{127}{8064})$; $8\,(1-\frac{252}{16001})$; $8\,(1-\frac{16001}{1016000})$; $8\,(1-\frac{31750}{2015999})$; u. s. w.

Für $8\,(1-\frac{16001}{1016000})$ erhält man
$7,87400\ 78740\ 15748 \ldots$ anstatt daß
$\sqrt{62} = 7,87400\ 78740\ 11811 \ldots$ ist.

§. 333.

Der §. 329. gefundene Kettenbruch kann in einen schneller abnehmenden verwandelt werden, wenn zuvor sämmtliche Nenner der Ergänzungsbrüche mit Hülfe §. 275. auf die Einheit gebracht und alsdann der Kettenbruch nach §. 282. verändert wird. Es ist daher

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} - \frac{\frac{n-1}{2}x}{1} + \frac{\frac{n+1}{2.3}x}{1} - \frac{\frac{n-2}{2.3}x}{1} + \frac{\frac{n+2}{2.5}x}{1} - \frac{\frac{n-3}{2.5}x}{1} + \frac{\frac{n+3}{2.7}x}{1} - \ldots\ldots$$

also hier nach §. 282.

$\alpha = +nx$	$1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \frac{n-2}{3}x$
$\alpha_1 = -\frac{n-1}{1.2}x$	$1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 - \frac{n-8}{3.5}x$
$\alpha_2 = +\frac{n+1}{2.3}x$	$1 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1 - \frac{n-18}{5.7}x$
$\alpha_3 = -\frac{n-2}{2.3}x$	$1 + \alpha_7 + \alpha_8 = 1 - \frac{n-32}{7.9}x$
. . . .	. . . . folglich

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,x^2}{1-\frac{n-2}{3}x} + \frac{\frac{n+1}{4}\,\frac{n-2}{9}\,x^2}{1-\frac{n-8}{3.5}x} + \frac{\frac{n+2}{4}\,\frac{n-3}{25}\,x^2}{1-\frac{n-18}{5.7}x} + \frac{\frac{n+3}{4}\,\frac{n-4}{49}\,x^2}{1-\frac{n-32}{7.9}x} + \ldots\ldots$$

§. 334.

Das bisherige Verfahren zur Bestimmung der Glieder des Kettenbruches aus den Koeffizienten A; A_1; A_2; . . . der gegebenen Reihe

$$S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots .$$

dient zwar zur Erleichterung der Berechnung, allein es läßt nicht den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten dieser Reihe und den aufeinander folgenden Ergänzungsbrüchen des Kettenbruches übersehen.

Zur bessern Uebersicht setze man:

$$\begin{array}{llll} b_3 = {}^1a_3; & b_4 = {}^1a_4; & b_5 = {}^1a_5; & \ldots . \\ c_3 = {}^2a_3; & c_4 = {}^2a_4; & c_5 = {}^2a_5; & \ldots . \\ d_3 = {}^3a_3; & d_4 = {}^3a_4; & d_5 = {}^3a_5; & \ldots . \end{array}$$
u. s. w.

Es ist aber §. 284. $a_1 = A$; $a_2 = -A_1$; ${}^1a_2 = -A_2$; ${}^2a_2 = -A_3$; ${}^3a_2 = -A_4$; . . . . . daher wird, der vorstehenden Bezeichnung gemäß, wenn r jede mögliche ganze Zahl oder o bedeutet:

$${}^ra_1 = A_r \text{ und } {}^ra_2 = -A_{r+1}.$$

Nach §. 284. und 298. erhält man ferner:

$$\left.\begin{array}{l} {}^ra_3 = a_2 \,.\, {}^{r+1}a_1 - a_1 \,.\, {}^{r+1}a_2 \\ {}^ra_4 = a_3 \,.\, {}^{r+1}a_2 - a_2 \,.\, {}^{r+1}a_3 \\ {}^ra_5 = a_4 \,.\, {}^{r+1}a_3 - a_3 \,.\, {}^{r+1}a_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^ra^n = a_{n-1} \,.\, {}^{r+1}a_{n-2} - a_{n-2} \,.\, {}^{r+1}a_{n-1} \end{array}\right\} [I]$$

Nun ist §. 298.

$$S = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 x}{a_1} + \frac{a_3 x}{a_2} + \frac{a_4 x}{a_3} + \ldots . \quad \text{oder nach §. 275.}$$

$$S = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 x : a_1}{1} + \frac{a_3 x : a_1 a_2}{1} + \frac{a_4 x : a_2 a_3}{1} + \ldots .$$

oder wenn man setzt

$$S = \frac{\beta}{1} + \frac{\beta_1 x}{1} + \frac{\beta_2 x}{1} + \frac{\beta_3 x}{1} + \frac{\beta_4 x}{1} + \ldots . .$$

so wird

$$\beta = a_1; \; \beta_1 = \frac{a_2}{a_1}; \; \beta_2 = \frac{a_3}{a_1 a_2}; \; \beta_3 = \frac{a_4}{a_2 a_3}; \ldots . \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \beta \\ a_2 = \beta\,\beta_1 \\ a_3 = \beta^2\,\beta_1\,\beta_2 \\ a_4 = \beta^3\,\beta_1^2\,\beta_2\,\beta_3 \\ a_5 = \beta^5\,\beta_1^3\,\beta_2^2\,\beta_3\,\beta_4 \\ a_6 = \beta^8\,\beta_1^5\,\beta_2^3\,\beta_3^2\,\beta_4\,\beta_5 \\ a_7 = \beta^{13}\beta_1^8\,\beta_2^5\,\beta_3^3\,\beta_4^2\,\beta_5\,\beta_6 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}[II]$$

Nun ist ferner ${}^r a_1 = A_r$ und ${}^r a_2 = -A_{r+1}$, also ${}^{r+1}a_1 = A_{r+1}$ und ${}^{r+1}a_2 = -A_{r+2}$. Eben so wird

$${}^{r+1}a_3 = a_2\,.\,{}^{r+2}a_1 - a_1\,.\,{}^{r+2}a_2$$
$${}^{r+1}a_4 = a_3\,.\,{}^{r+2}a_1 - a_2\,.\,{}^{r+2}a_2$$

u. s. w. Diese Werthe nach einander in die Gleichungen [I] eingeführt, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\begin{array}{l} \sigma_1 = \beta_1 \\ \sigma_2 = \beta_1 + \beta_2 \\ \sigma_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \sigma_4 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \end{array}$$

u. s. w. gesetzt wird,

$$\begin{array}{l} +\,{}^r a_1 = A_r \\ -\,{}^r a_2 = A_{r+1} \\ +\,\dfrac{{}^r a_3}{\beta} = A_{r+2} + \sigma_1 A_{r+1} \\ -\,\dfrac{{}^r a_4}{\beta^2\beta_1} = A_{r+3} + \sigma_2 A_{r+2} \\ +\,\dfrac{{}^r a_5}{\beta^4\beta_1^2\beta_2} = A_{r+4} + \sigma_3 A_{r+3} + \beta_1\beta_3\,A_{r+2} \\ -\,\dfrac{{}^r a_6}{\beta^7\beta_1^4\beta_2^2\beta_3} = A_{r+5} + \sigma_4 A_{r+4} + \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3 \\ +\,\sigma_2\beta_4\end{array}\right| A_{r+3} \\ +\,\dfrac{{}^r a_7}{\beta^{12}\,\beta_1^7\,\beta_2^4\,\beta_3^2\,\beta_4} = A_{r+6} + \sigma_5 A_{r+5} + \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3 \\ +\,\sigma_2\beta_4 \\ +\,\sigma_3\beta_5\end{array}\right| A_{r+4} + \beta_1\beta_3\beta_5\,A_{r+3} \end{array}$$

u. s. w., oder durchgängig $r = 0$ gesetzt, und alsdann die Werthe für $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aus [II] eingeführt, giebt

$$\begin{array}{r} \beta = A \\ -\,\beta\,\beta_1 = A_1 \\ \beta\,\beta_1\,\beta_2 = A_2 + \sigma_1 A_1 \\ -\,\beta\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3 = A_3 + \sigma_2 A_2 \\ \beta\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4 = A_4 + \sigma_3 A_3 + \sigma_1\beta_3\,A_2 \\ -\,\beta\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5 = A_5 + \sigma_4 A_4 + \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3 \\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right| A_3 \end{array}$$

$$\beta\beta_1\ldots\beta_5\beta_6 = A_6+\sigma_5 A_5+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\end{array}\right| A_4+\sigma_1\beta_3\,\beta_5\,A_3$$

$$-\beta\beta_1\ldots\beta_6\beta_7 = A_7+\sigma_6 A_6+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\\ \sigma_4\beta_6\end{array}\right| A_5+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\end{array}\right| A_4$$

$$\beta\beta_1\ldots\beta_7\beta_8 = A_8+\sigma_7 A_7+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\\ \sigma_4\beta_6\\ \sigma_5\beta_7\end{array}\right| A_6+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\end{array}\right|\beta_7\end{array}\right| A_5+\sigma_1\beta_3\,\beta_5\,\beta_7\,A_4$$

$$-\beta\beta_1\ldots\beta_8\beta_9 = A_9+\sigma_8 A_8+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\\ \sigma_4\beta_6\\ \sigma_5\beta_7\\ \sigma_6\beta_8\end{array}\right| A_7+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\end{array}\right|\beta_7\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \ldots\ldots\\ \sigma_4\beta_6\end{array}\right|\beta_8\end{array}\right| A_6+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\,\beta_7\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\end{array}\right|\beta_8\end{array}\right| A_5$$

$$\beta\beta_1\ldots\beta_9\beta_{10} = A_{10}+\sigma_9 A_9+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\\ \sigma_4\beta_6\\ \sigma_5\beta_7\\ \sigma_6\beta_8\\ \sigma_7\beta_9\end{array}\right| A_8+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\end{array}\right|\beta_7\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \ldots\\ \sigma_4\beta_6\end{array}\right|\beta_8\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \ldots\ldots\\ \sigma_5\beta_7\end{array}\right|\beta_9\end{array}\right| A_7+\left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\,\beta_7\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\end{array}\right|\beta_8\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\,\beta_5\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{array}\right|\beta_6\\ \left.\begin{array}{l}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_2\beta_5\end{array}\right|\beta_7\end{array}\right|\beta_9\end{array}\right| A_6+\sigma_1\beta_3\beta_5\beta_7\beta_9 A_5$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem die Koeffizienten von A_2, A_3, A_4, A_5 ..... fortschreiten, allgemein auszudrücken, setze man:

$$+\beta\beta_1\ldots\ldots\beta_{2r} = A_{2r} + {}^{2r}K_1\,A_{2r-1} + {}^{2r}K_2\,A_{2r-2} + \ldots + {}^{2r}K_r\,A_r$$

$$-\beta\beta_1\ldots\ldots\beta_{2r+1} = A_{2r+1} + {}^{2r+1}K_1\,A_{2r} + {}^{2r+1}K_2\,A_{2r-1} + \ldots + {}^{2r+1}K_r\,A_{r+1}$$

Nun ist

$$\begin{array}{lll} {}^2K_1 = \beta_1 & {}^3K_1 = \beta_1 + \beta_2 & {}^4K_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3; \; \ldots\ldots \\ {}^4K_2 = {}^2K_1\,\beta_3; & {}^5K_2 = {}^2K_1\,\beta_3 + {}^3K_1\,\beta_4; & {}^6K_2 = {}^2K_1\,\beta_3 + {}^3K_1\,\beta_4 + {}^4K_1\,\beta_5; \; \ldots\ldots \\ {}^6K_3 = {}^4K_2\,\beta_5; & {}^7K_3 = {}^4K_2\,\beta_5 + {}^5K_2\,\beta_6; & {}^8K_3 = {}^4K_2\,\beta_5 + {}^5K_2\,\beta_6 + {}^6K_2\,\beta_7; \; \ldots\ldots \\ {}^8K_4 = {}^6K_3\,\beta_7; & {}^9K_4 = {}^6K_3\,\beta_7 + {}^7K_3\,\beta_8; & {}^{10}K_4 = {}^6K_3\,\beta_7 + {}^7K_3\,\beta_8 + {}^8K_3\,\beta_9; \; \ldots\ldots \\ {}^{10}K_5 = {}^8K_4\,\beta_9; & {}^{11}K_5 = {}^8K_4\,\beta_9 + {}^9K_4\,\beta_{10}; & {}^{12}K_5 = {}^8K_4\,\beta_9 + {}^9K_4\,\beta_{10} + {}^{10}K_4\,\beta_{11}; \; \ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w., daher findet man

$$\begin{aligned} {}^mK_1 &= \sigma_{m-1} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \ldots\ldots + \beta_{m-1} \\ {}^mK_2 &= {}^2K_1\,\beta_3 + {}^3K_1\,\beta_4 + {}^4K_1\,\beta_5 + \ldots\ldots + {}^{m-2}K_1\,\beta_{m-1} \\ {}^mK_3 &= {}^4K_2\,\beta_5 + {}^5K_2\,\beta_6 + {}^6K_2\,\beta_7 + \ldots\ldots + {}^{m-2}K_2\,\beta_{m-1} \\ {}^mK_4 &= {}^6K_3\,\beta_7 + {}^7K_3\,\beta_8 + {}^8K_3\,\beta_9 + \ldots\ldots + {}^{m-2}K_3\,\beta_{m-1} \\ {}^mK_5 &= {}^8K_4\,\beta_9 + {}^9K_4\,\beta_{10} + {}^{10}K_4\,\beta_{11} + \ldots\ldots + {}^{m-2}K_4\,\beta_{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^mK_n &= {}^{2n-2}K_{n-1}\beta_{2n-1} + {}^{2n-1}K_{n-1}\beta_{2n} + {}^{2n}K_{n-1}\beta_{2n+1} + \ldots + {}^{m-2}K_{n-1}\beta_{m-1} \end{aligned}$$

Hienach ist man im Stande die Vergleichung zwischen den Koeffizienten der gegebenen Reihe und den entsprechenden Ergänzungsbrüchen, so weit man will, fortzusetzen, um daraus die Werthe $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots.$ also den zugehörigen Kettenbruch zu finden.

§. 335.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Glieder eines Kettenbruchs aus den Koeffizienten gegebener Reihen, dessen man sich zur Vermeidung der öfters ermüdenden Rechnungen, anstatt des §. 284. angeführten bedienen kann, ist folgendes. Es sey

$$(I)\quad S = \frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots}{B + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n + \ldots}$$

die gegebene Reihe, und

$$S = \frac{a_1}{a} + \frac{a_2 x}{a_1} + \frac{a_3 x}{a_2} + \frac{a_4 x}{a_3} + \frac{a_5 x}{a_4} + \ldots.$$

der gesuchte Kettenbruch.

Nun setze man nach §. 284. mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 334.

$$\begin{aligned} {}^na &= B_n; \quad {}^na_1 = A_n \\ {}^na_2 &= A.B_{n+1} - B A_{n+1} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^na_3 &= a_2\,{}^{n+1}a_1 - a_1\,{}^{n+1}a_2 \\ {}^na_4 &= a_3\,{}^{n+1}a_2 - a_2\,{}^{n+1}a_3 \\ {}^na_5 &= a_4\,{}^{n+1}a_3 - a_3\,{}^{n+1}a_4 \\ {}^na_6 &= a_5\,{}^{n+1}a_4 - a_4\,{}^{n+1}a_5 \\ {}^na_7 &= a_6\,{}^{n+1}a_5 - a_5\,{}^{n+1}a_6 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ [I]$$

Sind hienach die Werthe von ${}^n a$, ${}^n a_1$, ${}^n a_2$, ${}^n a_3$ .... bestimmt, und man setzt in denselben $n = 0$, so erhält man dadurch die Glieder α, a_1, a_2, a_3, a_4, ... des gesuchten Kettenbruches.

Hienach wird ferner für

$$(II)\quad S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 x}{a_1} + \frac{a_3 x}{a_2} + \frac{a_4 x}{a_3} + \frac{a_5 x}{a_4} + \ldots\ldots$$

$${}^n a_1 = A_n;\quad {}^n a_2 = -A_{n+1}$$

und die übrigen Werthe wie bei [I].

Für

$$(III)\quad S = \frac{1}{B + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n + \ldots\ldots}\ \text{wird}$$

$$S = \frac{1}{a} + \frac{a_2 x}{1} + \frac{a_3 x}{a_2} + \frac{a_4 x}{a_3} + \frac{a_5 x}{a_4} + \ldots\ldots$$

$${}^n a = B_n;\ {}^n a_2 = B_{n+1};\ {}^n a_3 = -B_{n+2}$$

und die übrigen Werthe wie bei [I].

1. **Beispiel.** Es ist die Reihe

$$S = \frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \ldots\ldots$$

gegeben, so wird hier nach (II) $A_n = \frac{1}{n+1}$, also

${}^n a_1 = \frac{1}{n+1}$ daher $a_1 = 1$

${}^n a_2 = \frac{-1}{n+2}$ daher $a_2 = -\frac{1}{2}$

${}^n a_3 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{n+1}{2(n+2)(n+3)}$ daher $a_3 = \frac{1}{2.2.3}$

${}^n a_4 = \frac{-1}{2.2.3(n+3)} + \frac{n+2}{2.2(n+3)(n+4)} = \frac{n+1}{2.3(n+3)(n+4)}$ daher $a_4 = \frac{1}{2.3.3.4}$

${}^n a_5 = \frac{n+2}{2.3.3.4.2(n+3)(n+4)} - \frac{n+2}{2.2.3.2.3(n+4)(n+5)} = \frac{-(n+1)(n+2)}{3.3.4.4(n+3)(n+4)(n+5)}$ daher $a_5 = \frac{-1.2}{3.3.3.4.4.4.5}$

${}^n a_6 = \frac{(n+1)(n+2)}{2.3.3.3.4.4.4.5(n+4)(n+5)(n+6)}$ daher $a_6 = \frac{1}{3.3.3.4.4.4.4.5.5.6}$ u. s. w.

Hienach findet man

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1x}{2} - \frac{1x}{3} - \frac{2x}{2} - \frac{2x}{5} - \frac{3x}{2} - \frac{3x}{7} - \frac{4x}{2} - \frac{4x}{9} - \frac{5x}{2} - \ldots\ldots$$

2. **Beispiel.** Für die Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

wird $A_n = \frac{1}{n!}$ und $A = 1$; daher nach (II)

$$^n a_1 = \frac{1}{n!} \text{ also } a_1 = 1$$

$$^n a_2 = \frac{-1}{(n+1)!} \text{ also } a_2 = -1$$

$$^n a_3 = \frac{-(n+1)}{(n+2)!} \text{ also } a_3 = -\tfrac{1}{2}$$

$$^n a_4 = \frac{-(n+1)}{2(n+3)!} \text{ also } a_4 = \frac{-1}{2.3!}$$

$$^n a_5 = \frac{(n+1)(n+2)}{2.3!(n+4)!} \text{ also } a_5 = \frac{1}{3!4!}$$

$$^n a_6 = \frac{(n+1)(n+2)}{2.3!4!(n+5)!} \text{ also } a_6 = \frac{1}{3!4!5!}$$

$$^n a_7 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3!3!4!5!(n+6)!} \text{ also } a_7 = \frac{1}{2.3!4!5!6!}$$

u. s. w. Hienach wird

$$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{5} + \frac{x}{2} - \frac{x}{7} + \ldots\ldots$$

und nach §. 274.

$$\frac{1}{e^x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{5} + \frac{x}{2} - \frac{x}{7} + \ldots\ldots$$

3. **Beispiel.** Für die gebrochene Funkzion

$$S = \frac{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots}{\frac{1}{1} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \ldots\ldots}$$

wird nach (I) $A_n = \frac{1}{n!}$ $B_n = \frac{1}{(n+1)!}$, also

$$^n a = \frac{1}{(n+1)!} \text{ daher } a = 1$$

$$^n a_1 = \frac{1}{n!} \text{ daher } a_1 = 1$$

$$^n a_2 = \frac{-(n+1)}{(n+2)!} \text{ daher } a_2 = \frac{-1}{2}$$

$$^n a_3 = \frac{-(n+1)(n+2)}{2(n+3)!} \text{ daher } a_3 = \frac{-1}{3!}$$

$$^n a_4 = \frac{-(n+1)(n+2)}{2.3!(n+4)!} \text{ daher } a_4 = \frac{-1}{3!4!}$$

$${}^n a_5 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3!4!(n+5)!} \text{ daher } a_5 = \frac{1}{2.4!5!}$$

$${}^n a_6 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!3!4!5!(n+6)!} \text{ daher } a_6 = \frac{1}{3!4!5!6!}$$

$${}^n a_7 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3!3!4!4!5!6!(n+7)!} \text{ daher } a_7 = \frac{1}{2.3!3!4!5!6!7!}$$

u. s. w., folglich

$$S = \frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{3x}{5} - \frac{x}{6} + \frac{4x}{7} - \frac{x}{8} + \frac{5x}{9} - \ldots.$$

4. Beispiel. Die gebrochene Funkzion

$$S = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+2} + \frac{x^3}{r+3} + \ldots + \frac{x^n}{r+n} + \ldots.}$$

giebt nach (*III*) $B_n = \frac{1}{r+n}$, also

$${}^n a = \frac{1}{r+n} \text{ daher } a = \frac{1}{r}$$

$${}^n a_2 = \frac{1}{r+n+1} \text{ daher } a_2 = \frac{1}{r+1}$$

$${}^n a_3 = \frac{-1}{r+n+2} \text{ daher } a_3 = \frac{-1}{r+2}$$

$${}^n a_4 = \frac{n+1}{(r+1)(r+2)(r+n+2)(r+n+3)} \text{ daher } a_4 = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+2).(r+3)}$$

$${}^n a_5 = \frac{n+1}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+n+3)(r+n+4)} \text{ daher } a_5 = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)^2(r+4)}$$

$${}^n a_6 = \frac{-2(n+1)(n+2)}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2(r+4)(r+n+3)(r+n+4)(r+n+5)} \text{ daher } a_6 = \frac{-2.2}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^3(r+4)^2(r+5)}$$

$${}^n a_7 = \frac{2(n+1)(n+2)}{(r+1)^5(r+2)^4(r+3)^3(r+4)^2(r+5)(r+n+4)(r+n+5)(r+n+6)}$$

$${}^n a_8 = \frac{3.8(n+1)(n+2)(n+3)}{(r+1)^6(r+2)^7(r+3)^6(r+4)^4(r+5)^2(r+6)(r+n+4)(r+n+5)(r+n+6)(r+n+7)}$$

u. s. w. Hienach findet man nach gehöriger Abkürzung

$$S = \frac{r}{1} + \frac{rx}{r+1} - \frac{(r+1)^2 x}{r+2} - \frac{1.1.x}{r+3} - \frac{(r+2)^2 x}{r+4} - \frac{2.2x}{r+5} - \frac{(r+3)^2 x}{r+6} - \frac{3.3x}{r+7} - \ldots..$$

Auch wird nach §. 274.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{r} + \frac{x}{r+1} - \frac{(r+1)^2 x}{r+2} - \frac{1.1x}{r+3} - \frac{(r+2)^2 x}{r+4} - \frac{2.2x}{r+5} - \frac{(r+3)^2 x}{r+6} - \frac{3.3x}{r+7} - \ldots..$$

Hierin durchgängig $\frac{\alpha}{\beta}$ statt r gesetzt, so findet man auch

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{x^2}{\alpha+2\beta} + \frac{x^3}{\alpha+3\beta} + \frac{x^4}{\alpha+4\beta} + \frac{x^5}{\alpha+5\beta} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha+\beta} - \frac{(\alpha+\beta)^2 x}{\alpha+2\beta} - \frac{1.1\beta^2 x}{\alpha+3\beta} - \frac{(\alpha+2\beta)^2 x}{\alpha+4\beta} - \frac{2.2\beta^2 x}{\alpha+5\beta} - \frac{(\alpha+3\beta)^2 x}{\alpha+6\beta} - \ldots$$

§. 336.

Die bisherige Verwandelung gegebener Reihen in Kettenbrüche setzte voraus, daß nur im Zähler der Ergänzungsbrüche die Werthe von x vorkommen sollten. Läßt man diese Bedingung fahren, so kann man alsdann zu sehr allgemeinen Ausdrücken gelangen, wodurch die Verwandlung der Reihen in solche Kettenbrüche sehr vereinfacht wird.

Nach §. 260. wird für den Kettenbruch

$$S = \frac{\beta}{1} + \frac{\beta_1 x}{1} + \frac{\beta_2 x}{1} + \frac{\beta_3 x}{1} + \frac{\beta_4 x}{1} + \ldots$$

wo β, β_1, β_2, ... auch gebrochene Funkzionen von x seyn können,

$$\begin{aligned} N &= \beta;\quad M = 1 \\ M_1 &= M + \beta_1 x \\ M_2 &= M_1 + M\beta_2 x \qquad [I] \\ M_3 &= M_2 + M_1\beta_3 x \\ M_4 &= M_3 + M_2\beta_4 x \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und nach §. 265.

$$\begin{aligned} \frac{N}{M} - \frac{N_1}{M_1} &= + \frac{\beta\beta_1 x}{M M_1} \\ \frac{N_1}{M_1} - \frac{N_2}{M_2} &= - \frac{\beta\beta_1\beta_2 x^2}{M_1 M_2} \\ \frac{N_2}{M_2} - \frac{N_3}{M_3} &= + \frac{\beta\beta_1\beta_2\beta_3 x^3}{M_2 M_3} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

die über einander stehenden Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens addirt, geben:

$$\frac{N}{M} - \frac{N_r}{M_r} = \frac{\beta\beta_1 x}{M M_1} - \frac{\beta\beta_1\beta_2 x^2}{M_1 M_2} + \ldots\ldots$$

oder wegen $\frac{N}{M} = \frac{\beta}{M}$;

$$\frac{N_r}{M_r} = \frac{\beta}{M} - \frac{\beta\beta_1 x}{M M_1} + \frac{\beta\beta_1\beta_2 x^2}{M_1 M_2} - \ldots\ldots$$

$\frac{N_r}{M_r}$ kommt S immer näher, je größer r wird; setzt man daher die vorstehende Reihe ohne Ende

fort, so erhält man:

$$S = \frac{\beta}{M} - \frac{\beta\beta_1 x}{M M_1} + \frac{\beta\beta_1\beta_2 x^2}{M_1 M_2} - \frac{\beta\beta_1\beta_2\beta_3 x^3}{M_2 M_3} + \dots$$

Man setze $A = \frac{\beta}{M}$; $A_1 = -\frac{\beta\beta_1}{M M_1}$; $A_2 = \frac{\beta\beta_1\beta_2}{M_1 M_2}$; $A_3' = -\frac{\beta\beta_1\beta_2\beta_3}{M_2 M_3}$; .... so wird auch

$$S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots \quad [II]$$

Ferner findet man hienach

$$\beta = AM$$
$$\beta_1 = -\frac{A_1 M M_1}{\beta} = -\frac{A_1 M_1}{A}$$
$$\beta_2 = +\frac{A_2 M_1 M_2}{\beta\beta_1} = -\frac{A_2 M_2}{A_1 M} \quad [III]$$
$$\beta_3 = -\frac{A_3 M_2 M_3}{\beta\beta_1\beta_2} = -\frac{A_3 M_3}{A_2 M_1}$$

Hienach und nach [I] wird daher

$M = 1$

$M_1 = 1 - \frac{A_1 M_1}{A} x$ also $M_1 = \frac{A}{A + A_1 x}$

$M_2 = \frac{A}{A + A_1 x} - \frac{A_2 M_2}{A_1} x$ also $M_2 = \frac{A A_1}{(A + A_1 x)(A_1 + A_2 x)}$

$M_3 = \frac{A A_1}{(A + A_1 x)(A_1 + A_2 x)} - \frac{A_3 M_3}{A_2} x$ also $M_3 = \frac{A A_1 A_2}{(A + A_1 x)(A_1 + A_2 x)(A_2 + A_3 x)}$

u. s. w. Ferner wird hieraus

$$M = 1;\ M_1 = \frac{A}{A + A_1 x}$$
$$\frac{M_2}{M} = \frac{A A_1}{(A + A_1 x)(A_1 + A_2 x)}$$
$$\frac{M_3}{M_1} = \frac{A_1 A_2}{(A_1 + A_2 x)(A_2 + A_3 x)}$$
$$\frac{M_4}{M_2} = \frac{A_2 A_3}{(A_2 + A_3 x)(A_3 + A_4 x)}$$

u. s. w. Diese Werthe in [III] gesetzt, giebt

$\beta = A$; $\beta_1 = \frac{-A_1}{A + A_1 x}$; $\beta_2 = \frac{-A A_2}{(A + A_1 x)(A_1 + A_2 x)}$; $\beta_3 = \frac{-A_1 A_3}{(A_1 + A_2 x)(A_2 + A_3 x)}$;

$\beta_4 = \frac{-A_2 A_4}{(A_2 + A_3 x)(A_3 + A_4 x)}$; u. s. w.

Diese Ausdrücke in den oben stehenden Kettenbruch gesetzt, so findet man nach erfolgter Abkürzung

$$S = \frac{A}{1} - \frac{A_1 x}{A + A_1 x} - \frac{A A_2 x}{A_1 + A_2 x} - \dots$$

Hieraus folgt, daß, wenn die Reihe

$$(I)\ S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \dots$$

gegeben ist, so wird auch:

$$S = \frac{A}{1} - \frac{A_1 x}{A + A_1 x} - \frac{A A_2 x}{A_1 + A_2 x} - \frac{A_1 A_3 x}{A_2 + A_3 x} - \frac{A_2 A_4 x}{A_3 + A_4 x} - \ldots\ldots$$

oder $-x$ statt x gesetzt, giebt für

$$(II)\quad S = A - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + A_4 x^4 - A_5 x^5 + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{A}{1} + \frac{A_1 x}{A - A_1 x} + \frac{A A_2 x}{A_1 - A_2 x} + \frac{A_1 A_3 x}{A_2 - A_3 x} + \frac{A_2 A_4 x}{A_3 - A_4 x} + \ldots\ldots$$

Diesen Ausdruck findet **Euler**, Einleitung in die Analys. d. Unendl. 1. Buch, §. 371.

Man setze durchgängig $A_1 = \frac{A_1}{B_1}$; $A_2 = \frac{A_2}{B_2}$; $A_3 = \frac{A_3}{B_3}$; .... so findet man, wenn die entstehenden Kettenbrüche abgekürzt werden:

$$(III)\quad S = \frac{A}{B} + \frac{A_1}{B_1} x + \frac{A_2}{B_2} x^2 + \frac{A_3}{B_3} x^3 + \frac{A_4}{B_4} x^4 + \frac{A_5}{B_5} x_5 + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{A}{B} - \frac{A_1 B B x}{A B_1 + A_1 B x} - \frac{A A_2 B_1 B_1 x}{A_1 B_2 + A_2 B_1 x} - \frac{A_1 A_3 B_2 B_2 x}{A_2 B_3 + A_3 B_2 x} - \frac{A_2 A_4 B_3 B_3 x}{A_3 B_4 + A_4 B_3 x} - \ldots\ldots$$

$$(IV)\quad S = \frac{A}{B} - \frac{A_1}{B_1} x + \frac{A_2}{B_2} x^2 - \frac{A_3}{B_3} x^3 + \frac{A_4}{B_4} x^4 - \frac{A_5}{B_5} x^5 + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{A}{B} + \frac{A_1 B B x}{A B_1 - A_1 B x} + \frac{A A_2 B_1 B_1 x}{A_1 B_2 - A_2 B_1 x} + \frac{A_1 A_3 B_2 B_1 x}{A_2 B_3 - A_3 B_2 x} + \frac{A_2 A_4 B_3 B_3 x}{A_3 B_4 - A_4 B_3 x} + \ldots\ldots$$

Hierin $A = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 1$ gesetzt, giebt:

$$(V)\quad S = \frac{1}{B} + \frac{x}{B_1} + \frac{x^2}{B_2} + \frac{x^3}{B_3} + \frac{x^4}{B_4} + \frac{x^5}{B_5} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{1}{B} - \frac{B B x}{B_1 + B x} - \frac{B_1 B_1 x}{B_2 + B_1 x} - \frac{B_2 B_2 x}{B_3 + B_2 x} - \frac{B_3 B_3 x}{B_4 + B_3 x} - \frac{B_4 B_4 x}{B_5 + B_4 x} - \ldots\ldots$$

$$(VI)\quad S = \frac{1}{B} - \frac{x}{B_1} + \frac{x^2}{B_2} - \frac{x^3}{B_3} + \frac{x^4}{B_4} - \frac{x^5}{B_5} + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{1}{B} + \frac{B B x}{B_1 - B x} + \frac{B_1 B_1 x}{B_2 - B_1 x} + \frac{B_2 B_2 x}{B_3 - B_2 x} + \frac{B_3 B_3 x}{B_4 - B_3 x} + \frac{B_4 B_4 x}{B_5 - B_4 x} + \ldots\ldots$$

In (III) werde $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A A_1}{B B_1}$; $\frac{A_2}{B_2} = \frac{A A_1 A_2}{B B_1 B_2}$; $\frac{A_3}{B_3} = \frac{A A_1 A_2 A_3}{B B_1 B_2 B_3}$; u. s. w. gesetzt, so findet man

$$(VII)\quad S = \frac{A}{B} + \frac{A A_1}{B B_1} x + \frac{A A_1 A_2}{B B_1 B_2} x^2 + \frac{A A_1 A_2 A_3}{B B_1 B_2 B_3} x^3 + \frac{A A_1 A_2 A_3 A_4}{B B_1 B_2 B_3 B_4} x^4 + \ldots\ldots$$

$$S = \frac{A}{B} - \frac{A_1 B x}{B_1 + A_1 x} - \frac{A_2 B_1 x}{B_2 + A_2 x} - \frac{A_3 B_2 x}{B_3 + A_3 x} - \frac{A_4 B_3 x}{B_4 + A_4 x} - \frac{A_5 B_4 x}{B_5 + A_5 x} - \ldots\ldots$$

Für

Für $B = B_1 = B_2 = B_3 = \ldots = 1$ wird:

$$(VIII)\quad S = A + AA_1x + AA_1A_2x^2 + AA_1A_2A_3x^3 + AA_1A_2A_3A_4x^4 + \ldots$$

$$S = \frac{A}{1} - \frac{A_1x}{1+A_1x} - \frac{A_2x}{1+A_2x} - \frac{A_3x}{1+A_3x} - \frac{A_4x}{1+A_4x} - \frac{A_5x}{1+A_5x} - \ldots$$

und für $A = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 1$

$$(IX)\quad S = \frac{1}{B} + \frac{x}{BB_1} + \frac{x^2}{BB_1B_2} + \frac{x^3}{BB_1B_2B_3} + \frac{x^4}{BB_1B_2B_3B_4} + \ldots$$

$$S = \frac{1}{B} - \frac{Bx}{B_1+x} - \frac{B_1x}{B_2+x} - \frac{B_2x}{B_3+x} - \frac{B_3x}{B_4+x} - \frac{B_4x}{B_5+x} - \frac{B_5x}{B_6+x} - \ldots$$

Bei dem Gebrauche dieser Ausdrücke ist zu bemerken, daß die gefundenen Kettenbrüche sich nur dann dem wahren Werthe von S immer mehr nähern, wenn die Glieder der Reihe S abnehmend sind, und in Absicht des Kettenbruches, daß die §. 265. aufgestellten Bedingungen erfüllt werden.

IV. Von den periodischen Kettenbrüchen.

§. 337.

Eben die Sätze, welche ganz allgemein von jedem Kettenbruch erwiesen sind, lassen sich auch leicht auf den besondern Fall anwenden, wenn der Kettenbruch periodisch ist (§. 247.). Wenn nun gleich ein solcher periodischer Kettenbruch ohne Ende fortläuft, so läßt sich doch jedesmal sein Werth oder Urbruch, als die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grade angeben.

Es sey daher x der unbekannte Werth eines gegebenen periodischen Kettenbruches, oder

$x = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \ldots$ so erhält man auch $x = \frac{\alpha}{a} + x$ also $ax + x^2 = \alpha$,

und hieraus, wenn die quadratische Gleichung aufgelöst wird,

$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \alpha)}$, folglich

$$-\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \alpha)} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \ldots \quad \text{oder auch}$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \alpha)} = \frac{1}{2}a + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \ldots$$

Für $\alpha = 1$ wird

$$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \ldots$$

Hätte man:

$$x = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \ldots \quad \text{so ist auch}$$

$$x = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + x \quad \text{oder} \quad x = \frac{\alpha(b+x)}{a(b+x)+\beta} \quad \text{und hieraus}$$

$$ax^2 + (ab + \beta - \alpha)x - \alpha b = 0$$

wo x ebenfalls durch eine Gleichung vom zweiten Grade bestimmt wird; auch bleibt das Verfahren unverändert, wenn die Periode aus drei oder noch mehreren Ergänzungsbrüchen besteht.

Bilden die ersten Glieder eines Kettenbruches keine Perioden, z. B.

$$x = q + \frac{\varrho}{r} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \ldots.$$

so läßt sich auch dann noch der Werth von x durch die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grade finden. Denn man setze

$$y = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \ldots. \quad \text{so wird}$$

$$y = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + y \quad \text{und} \quad x = q + \frac{\varrho}{r} + y \quad \text{also}$$

$$y = \frac{\alpha(b+y)}{a(b+y)+\beta} \quad \text{und} \quad x = q + \frac{\varrho}{r+y}, \quad \text{oder}$$

$$ay^2 + (ab + \beta - \alpha)y - \alpha b = 0 \quad \text{und}$$

$$y = \frac{qr + \varrho - rx}{x - q}.$$

Den letzten Werth von y in die darüber stehende Gleichung gesetzt, giebt für x eine Gleichung vom zweiten Grade, so daß ganz allgemein **der Werth eines periodischen Kettenbruches durch die Auflösung einer Gleichung vom zweiten Grade bestimmt werden kann.**

§. 338.

Wäre umgekehrt die Quadratische Gleichung $x^2 + ax + \alpha = 0$ gegeben, und man sollte die eine Wurzel derselben $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \alpha)}$ durch einen periodischen Kettenbruch ausdrücken, so darf man nur im vorigen §. $-\alpha$ mit $+\alpha$ vertauschen und es wird alsdann

$$-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \alpha)} = -\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a} - \ldots. \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \alpha)} = \tfrac{1}{2}a - \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a} - \ldots.$$

§. 339.

Mittelst des Ausdrucks $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \alpha)} = \frac{1}{2}a + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \ldots.$ läßt sich die Quadratwurzel jeder zweitheiligen Größe, von welcher ein Theil ein vollständiges Quadrat ist, in einen Kettenbruch verwandeln. Denn man setze $\frac{1}{4}a^2 = m^2$ und $\alpha = \pm n$, so wird $a = 2m$ also

$$\sqrt{(m^2 \pm n)} = m \pm \frac{n}{2m} \pm \frac{n}{2m} \pm \frac{n}{2m} \pm \frac{n}{2m} \pm \ldots\ldots.$$

Die entsprechenden Näherungswerthe sind:

$$m \pm \frac{n}{2m}$$

$$m \pm \frac{2nm}{4m^2 \pm n}$$

$$m + \frac{n^2 \pm 4nm^2}{8m^3 \pm 4nm}$$

$$m + \frac{4n^2m \pm 8nm^3}{16m^4 + n^2 \pm 12nm^2}$$

u. s. w.

Bei einer nähern Vergleichung findet man leicht, daß die vorstehenden Ausdrücke genau mit den §. 332., für die Quadratwurzel eines Binomiums gefundenen, übereinstimmen.

Beispiel. Sucht man die Quadratwurzel von 57, so ist $57 = 7^2 + 8$ also $m = 7$; $n = 8$, daher

$$\sqrt{57} = 7 + \frac{8}{14} + \frac{8}{14} + \frac{8}{14} + \ldots$$ oder nach §. 275.

$$\sqrt{57} = 7 + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \ldots\ldots$$

Oder weil $57 = 8^2 - 7$, so ist $m = 8$ und $n = 7$ daher auch

$$\sqrt{57} = 8 - \frac{7}{16} - \frac{7}{16} - \frac{7}{16} - \frac{7}{16} - \ldots\ldots$$

Für den ersten Kettenbruch erhält man die Näherungsausdrücke

$$7 + \tfrac{4}{7} = 7{,}5714285 \ldots\ldots$$

$$7 + \tfrac{28}{51} = 7{,}5490196 \ldots\ldots$$

$$7 + \tfrac{204}{371} = 7{,}5498652 \ldots\ldots$$

. . . .

Für den zuletzt gefundenen Kettenbruch erhält man

$$8 - \tfrac{7}{16} = 7{,}5625$$

$$8 - \tfrac{112}{249} = 7{,}5502008 \ldots\ldots$$

$$8 - \tfrac{1743}{3872} = 7{,}5498451 \ldots\ldots$$

Anstatt daß $\sqrt{57} = 7{,}5498344 \ldots\ldots$ ist.

V. Verwandelung der Kettenbrüche in Reihen.

§. 340.

Aufgabe. Den Kettenbruch $S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1 x}{a_1} + \frac{\alpha_2 x}{a_2} + \frac{\alpha_3 x}{a_3} + \ldots$ in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze

$$\beta = \frac{\alpha}{a};\quad \beta_1 = \frac{\alpha_1}{a\,a_1};\quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{a_1\,a_2};\quad \beta_3 = \frac{\alpha_3}{a_2\,a_3};\quad \beta_4 = \frac{\alpha_4}{a_3\,a_4};\ \ldots.$$

so verwandelt sich nach §. 275. der gegebene Kettenbruch in

$$S = \frac{\beta}{1} + \frac{\beta_1 x}{1} + \frac{\beta_2 x}{1} + \frac{\beta_3 x}{1} + \frac{\beta_4 x}{1} + \ldots.$$

und wenn man die gesuchte Reihe durch

$$S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots.$$

bezeichnet, wo A, A_1, A_2, A_3, ... näher zu bestimmende Koeffizienten bedeuten, so erhält man nach §. 334., wenn zur Abkürzung

$$\beta\beta_1 = (\beta_1)!\quad \beta\beta_1\beta_2 = (\beta_2)!\quad \beta\beta_1\beta_2\beta_3 = (\beta_3)!\ \text{u. s. w.}$$

$$\sigma_1 = \beta_1;\ \sigma_2 = \beta_1 + \beta_2;\ \sigma_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3;\ \text{u. s. w.}$$

oder $\sigma_2 = \sigma_1 + \beta_2;\ \sigma_3 = \sigma_2 + \beta_3;\ \sigma_4 = \sigma_3 + \beta_4;$ u. s. w.

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
A &= \beta \\
-A_1 &= (\beta_1)! \\
-A_2 &= \sigma_1 A_1 - (\beta_2)! \\
-A_3 &= \sigma_2 A_2 + (\beta_3)! \\
-A_4 &= \sigma_3 A_3 + \sigma_1\beta_3\ A_2 - (\beta_4)! \\
-A_5 &= \sigma_4 A_4 + \left.\begin{matrix}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{matrix}\right| A_3 + (\beta_5)! \\
-A_6 &= \sigma_5 A_5 + \left.\begin{matrix}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\end{matrix}\right| A_4 + \sigma_1\beta_3\beta_5\ A_3 - (\beta_6)! \\
-A_7 &= \sigma_6 A_6 + \left.\begin{matrix}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\\ \sigma_3\beta_5\\ \sigma_4\beta_6\end{matrix}\right| A_5 + \left.\begin{matrix}\sigma_1\beta_3\beta_5\\ \left.\begin{matrix}\sigma_1\beta_3\\ \sigma_2\beta_4\end{matrix}\right|\beta_6\end{matrix}\right| A_4 + (\beta_7)!
\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 341.

Zusatz. Wäre der Kettenbruch

$$S = \frac{\alpha x^r}{a} + \frac{\alpha_1 x^h}{a_1} + \frac{\alpha_2 x^h}{a_2} + \frac{\alpha_3 x^h}{a_3} + \frac{\alpha_4 x^h}{a_4} + \ldots.$$

so wird nach §. 298. die entsprechende Reihe

$$S = Ax^r + A_1 x^{r+h} + A_2 x^{r+2h} + A_3 x^{r+3h} + A_4 x^{r+4h} + \ldots.$$

und man findet die Werthe A, A_1, A_2, A_3, ... eben so wie im vorigen §.

Beispiel. Für den Kettenbruch

$$S = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{7} + \frac{4x}{2} + \frac{4x}{9} + \ldots$$

die entsprechende Reihe zu finden, wird hier

$\alpha = 1;\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1;\ \alpha_3 = \alpha_4 = 2;\ \alpha_5 = \alpha_6 = 3;\ \alpha_7 = \alpha_8 = 4; \ldots\ldots$

$a = 1;\ a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 2;\ a_2 = 3;\ a_4 = 5;\ a_6 = 7; \ldots\ldots$

$$\begin{array}{lll} \beta = 1 & & \beta = 1 \\ \beta_1 = \frac{1}{1.2} & \sigma_1 = \frac{1}{2} & (\beta_1)! = \frac{1}{2} \\ \beta_2 = \frac{1}{2.3} & \sigma_2 = \frac{2}{3} & (\beta_2)! = \frac{1}{12} \\ \beta_3 = \frac{2}{2.3} & \sigma_3 = 1 & (\beta_3)! = \frac{1}{36} \\ \beta_4 = \frac{2}{2.5} & \sigma_4 = \frac{6}{5} & (\beta_4)! = \frac{1}{180} \\ \beta_5 = \frac{3}{2.5} & \sigma_5 = \frac{3}{2} & (\beta_5)! = \frac{1}{600} \\ \beta_6 = \frac{3}{2.7} & \sigma_6 = \frac{12}{7} & (\beta_6)! = \frac{1}{2800} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$ daher

$A = 1;\ A_1 = -\frac{1}{2};\ A_2 = \frac{1}{3};\ A_3 = -\frac{1}{4};\ A_4 = \frac{1}{5};\ A_5 = -\frac{1}{6}; \ldots\ldots$

und $r = h = 1$, folglich

$$S = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots\ldots$$

§. 342.

Ein anderes Verfahren, durch welches jeder gegebene Kettenbruch

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \frac{\alpha_4}{a_4} + \ldots$$

in eine Reihe aufgelöst werden kann, erhält man durch folgende Betrachtung. Nach §. 260. ist

$\frac{N}{M} = \frac{\alpha}{M}$; daher nach §. 265.

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{\alpha}{M} - \frac{\alpha\alpha_1}{MM_1};$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{N_1}{M_1} + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{M_1M_2} = \frac{\alpha}{M} - \frac{\alpha\alpha_1}{MM_1} + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{M_1M_2};$$

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{N_2}{M_2} - \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{M_2M_3} = \frac{\alpha}{M} - \frac{\alpha\alpha_1}{MM_1} + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{M_1M_2} - \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{M_2M_3};$$

u. s. w. Da sich nun jeder dieser Näherungsbrüche dem Urbruch S desto mehr nähert, je weiter man die Rechnung fortsetzt, so erhält man die gesuchte Reihe oder

$$S = \frac{\alpha}{M} - \frac{\alpha\alpha_1}{MM_1} + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{M_1M_2} - \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{M_2M_3} + \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{M_3M_4} - \ldots\ldots$$

Wird daher die gesuchte Reihe durch

$$S = A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots\ldots$$

bezeichnet, so findet man

$$A = \frac{\alpha}{M}$$

$$A_1 = -\frac{\alpha\alpha_1}{MM_1}$$

$$A_2 = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{M_1M_2}$$

$$A_3 = -\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{M_2M_3}$$

$$A_4 = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{M_3M_4}$$

u. s. w.

Sind alle Zähler der Ergänzungsbrüche des Kettenbruches $= 1$, also $\alpha = 1$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$; .... so wird

$$S = \frac{1}{M} - \frac{1}{MM_1} + \frac{1}{M_1M_2} - \frac{1}{M_2M_3} + \frac{1}{M_3M_4} - \frac{1}{M_4M_5} + \ldots\ldots$$

Die Werthe der aufeinander folgenden Nenner der Näherungsbrüche können nach §. 262. bestimmt werden.

1. **Beispiel.** Den Kettenbruch

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ldots}}}}}}$$

in eine Reihe zu verwandeln.

Hier ist:

$\alpha = 1$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 9$; $\alpha_3 = 25$; $\alpha_4 = 49$; .....

$a = 1$; $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = 2$, also

$M = 1$; $M_1 = 3$; $M_2 = 15$; $M_3 = 105$; $M_4 = 945$; .... daher

$A = 1$; $A_1 = -\frac{1}{3}$; $A_2 = +\frac{1}{5}$; $A_3 = -\frac{1}{7}$; $A_4 = +\frac{1}{9}$; ... folglich

$$S = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots\ldots$$

Eben diesen Ausdruck findet **Euler** (S. 44. der §. 301. angeführten Abhandlung) nur auf einem ganz verschiedenen Wege.

2. **Beispiel.** Den Kettenbruch (§. 300.)

$$S = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 + \cfrac{2x}{2 + \cfrac{2x}{5 + \cfrac{3x}{2 + \cfrac{3x}{7 + \cfrac{4x}{2 + \cfrac{4x}{9 + \ldots}}}}}}}}}$$

in eine Reihe zu verwandeln.

Hier ist:

$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = x$; $\alpha_3 = \alpha_4 = 2x$; $\alpha_5 = \alpha_6 = 3x$; ....

$a = 1$; $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 2$; $a_2 = 3$; $a_4 = 5$; $a_6 = 7$; .... daher

$M = 1;\ M_1 = 2 + x;\ M_2 = 2\,(3 + 2x);\ M_3 = 2\,(6 + 6x + x^2);$
$M_4 = 6\,(10 + 12x + 3x^2);\ M_5 = 6\,(20 + 30x + 12x^2 + x^3);$ u. s. w.
daher wird

$$S = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2+x} + \frac{x^3}{2(2+x)(3+2x)} - \frac{x^4}{2(3+2x)(6+6x+x^2)}$$
$$+ \frac{x^5}{3(6+6x+x^2)(10+12x+3x^2)} - \frac{x^6}{3(10+12x+3x^2)(20+30x+12x^2+x^3)} + \ldots\ldots$$

§. 343.

Aufgabe. Den gegebenen Kettenbruch

$$S = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{1} + \frac{\alpha_4}{1} + \frac{\alpha_5}{1} + \frac{\alpha_6}{1} + \ldots.$$

in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Die gesuchte Reihe sey

$$S = A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots.$$

Man setze zur Abkürzung $\sigma_1 = \alpha_1;\ \sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2;\ \sigma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$ $\sigma_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4;\ \ldots$ so findet man für den vorstehenden Kettenbruch nach §. 260.

$$\begin{array}{lll}
M = 1 & & \\
M_1 = M + \alpha_1 & = 1 + \sigma_1 & \\
M_2 = M_1 + M\alpha_2 & = 1 + \sigma_2 & \\
M_3 = M_2 + M_1\alpha_3 & = 1 + \sigma_3 & + \sigma_1\alpha_3 \\
M_4 = M_3 + M_2\alpha_4 & = 1 + \sigma_4 & + \sigma_1\alpha_3 \\
 & & + \sigma_2\alpha_4 \\
M_5 = M_4 + M_3\alpha_5 & = 1 + \sigma_5 & + \sigma_1\alpha_3 + \sigma_1\alpha_3\alpha_5 \\
 & & + \sigma_2\alpha_4 \\
 & & + \sigma_3\alpha_5 \\
M_6 = M_5 + M_4\alpha_6 & = 1 + \sigma_6 & + \sigma_1\alpha_3 + \sigma_1\alpha_3\alpha_5 \\
 & & + \sigma_2\alpha_4 + \left.\begin{array}{l}\sigma_1\alpha_3 \\ \sigma_2\alpha_4\end{array}\right|\alpha_6 \\
 & & + \sigma_3\alpha_5 \\
 & & + \sigma_4\alpha_6
\end{array}$$

u. s. w. Daher wird nach §. 342.

$$A = \frac{\alpha}{1}$$
$$A_1 = -\frac{\alpha\alpha_1}{1+\sigma_1}$$
$$A_2 = \frac{\alpha\alpha_1\sigma_2}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}$$
$$A_3 = -\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{(1+\sigma_2)(1+\sigma_3+\sigma_1\alpha_3)}$$
$$A_4 = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{(1+\sigma_3+\sigma_1\alpha_3)(1+\sigma_4+\sigma_1\alpha_3+\sigma_2\alpha_4)}$$

u. s. w.

§. 344.

Nach einem ganz ähnlichen Verfahren kann jeder gegebene Urbruch in eine Reihe verwandelt werden.

1. **Beispiel.** Um den Bruch $\frac{216}{1147}$ in eine abnehmende Reihe zu verwandeln, bestimme man die Nenner der entsprechenden Näherungsbrüche, so ist §. 250.
$M = 5$; $M_1 = 16$; $M_2 = 69$; $M_3 = 154$; $M_4 = 1147$, daher, weil hier die Zähler der Ergänzungsbrüche $= 1$ sind,

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5.16} + \frac{1}{16.69} - \frac{1}{69.154} + \frac{1}{154.1147}.$$

2. **Beispiel.** Soll man den Bruch $\frac{1}{3,141592\,653589\ldots}$ in eine abnehmende Reihe verwandeln, so ist §. 255.

$M = 3$; $M_1 = 22$; $M_2 = 333$; $M_3 = 355$; $M_4 = 103993$; ....

daher findet man, wenn $\pi = 3{,}14159\ldots$ gesetzt wird, weil hier die Zähler der Ergänzungsbrüche $= 1$ sind:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{22.333} - \frac{1}{333.355} + \frac{1}{355.103993} - \frac{1}{103993.104348} + \frac{1}{104348.208341} - \ldots$$

§. 345.

Noch verdient ein Verfahren angeführt zu werden, durch welches man jeden gegebenen Bruch in eine schnell abnehmende Reihe verwandeln kann. Es sey $\frac{A_1}{A}$ der gegebene Bruch, und man erhalte durch die Division, wenn q den größten Quotienten in ganzen Zahlen und A_2 den Rest bezeichnet,

$\frac{A}{A_1} = q + \frac{A_2}{A_1}$; ferner, auf gleiche Art;

$\frac{A}{A_2} = q_1 + \frac{A_3}{A_2}$;

$\frac{A}{A_3} = q_2 + \frac{A_4}{A_3}$;

$\frac{A}{A_4} = q_3 + \frac{A_5}{A_4}$;

u. s. w., so wird hieraus, wenn die erste Gleichung mit $\frac{A_1}{qA}$, die zweite mit $\frac{A_2}{q_1 A}$, u. s. w. multiplizirt wird:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{q} - \frac{A_2}{qA}$$

$$\frac{A_2}{A} = \frac{1}{q_1} - \frac{A_3}{q_1 A}$$

$$\frac{A_3}{A} = \frac{1}{q_2} - \frac{A_4}{q_2 A}$$

. . . . folglich

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{q} - \frac{A_2}{qA}$$
$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq_1} + \frac{A_3}{qq_1A}$$
$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq_1} + \frac{1}{qq_1q_2} - \frac{A_4}{qq_1q_2A}$$
$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq_1} + \frac{1}{qq_1q_2} - \frac{1}{qq_1q_2q_3} + \frac{A_5}{qq_1q_2q_3A}$$
$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq_1} + \frac{1}{qq_1q_2} - \frac{1}{qq_1q_2q_3} + \frac{1}{qq_1q_2q_3q_4} - \frac{A_6}{qq_1q_2q_3q_4A}$$

u. s. w.

Um die Werthe $q;\ q_1;\ q_2;\ \ldots$ zu bestimmen, darf man nur mit A_1 in A, dann mit dem Rest A_2 in A; hierauf wieder mit dem Rest A_3 in A u. s. w. dividiren, wo endlich die Division aufgehen muß, wenn A_1, A ganze Zahlen sind, weil die Reste $A_2;\ A_3;\ A_4;\ \ldots$ nach einander kleiner werden müssen, bis zuletzt die Division aufgeht, oder ein Rest der Einheit gleich wird.

Beispiel. Den Bruch $\frac{216}{1147}$ in eine schnell abnehmende Reihe zu verwandeln.

Dem Vorhergehenden gemäß erhält man folgende Rechnung:

$$A_1 = 216 \,\Big|\, \begin{array}{r}1147\\ \underline{1080}\end{array} \,\Big|\, 5 = q$$
$$A_2 = 67 \,\Big|\, \begin{array}{r}1147\\ \underline{1139}\end{array} \,\Big|\, 17 = q_1$$
$$A_3 = 8 \,\Big|\, \begin{array}{r}1147\\ \underline{1144}\end{array} \,\Big|\, 143 = q_2$$
$$A_4 = 3 \,\Big|\, \begin{array}{r}1147\\ \underline{1146}\end{array} \,\Big|\, 382 = q_3$$
$$A_5 = 1 \,\Big|\, \begin{array}{r}1147\\ \underline{1147}\\ 0\end{array} \,\Big|\, 1147 = q_4$$

Hieraus findet man

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5.17} + \frac{1}{5.17.143} - \frac{1}{5.17.143.382} + \frac{1}{5.17.143.382.1147}.$$

§. 346.

Die Lehre von den Kettenbrüchen hat erst in neuern Zeiten eine bedeutende Erweiterung erhalten. Außer mehreren von **Euler** und **Lagrange** in den Denkschriften der Berliner und Petersburger Akademien enthaltenen und theils schon angeführten Abhandlungen, kann man darüber nachsehen:

Lambert's, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. 2. Theil. 1. Absch. Berlin 1770. S. 54. u. f.

Euler, Opuscula analytica. Tom. I. Petrop. 1784. *p.* 85. *etc.*

Trembley, Recherches sur les fractions continues. Mém. de l'ac. de Berlin, Année 1794 *et* 1795. *p.* 109.

Hindenburg, Combinatorisch entwickelte Werthe der continuirlichen Brüche. Archiv der reinen und angewandten Mathematik. 1. Bd. Leipz. 1795. S. 47. u. f.

Kausler, Die Lehre von den continuirlichen Brüchen. Stuttgard. 1803.

Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques. Nouv. édit. Paris*, 1808. *p.* 59. *etc.*

Kausler, *Expositio methodi series quasqunque datas in fractiones continuas convertendi. Mém. de l'ac. de Petersb. Tome I.* (1803 — 1806.) *p.* 156.

Viscovatov, *de la méthode générale pour réduire toutes sortes de quantités en fractions continues. Mém. de l'ac. de Petersb. T. I. p.* 226.

Zehntes Kapitel.

Von den Reihen überhaupt.

---

§. 348.

Die Natur und Beschaffenheit einer Reihe, hängt von dem Gesetze ab, nach welchem die aufeinander folgenden Glieder derselben gebildet worden sind. Was unter **begrenzten** oder **endlichen**, **unbegrenzten** oder **unendlichen**, **fallenden** und **steigenden** Reihen verstanden wird, ist bereits §. 51. erklärt worden. Noch pflegt man die Reihen einzutheilen in **geometrische**, wenn durch die Division jeder zwei unmittelbar aufeinander folgender Glieder, durchgängig gleiche Quotienten entstehen. z. B.

$$3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243;\ 729;\ 2187;\ 6561;\ \ldots\ldots$$

$$1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ a^5;\ a^6;\ a^7;\ \ldots\ldots$$

$$1;\ \frac{1}{a};\ \frac{1}{a^2};\ \frac{1}{a^3};\ \frac{1}{a^4};\ \frac{1}{a^5};\ \frac{1}{a^6};\ \frac{1}{a^7};\ \ldots\ldots$$

Arithmetische Reihen der ersten Ordnung sind solche, bei welchen die Unterschiede zweier auf einander folgenden Glieder durchgängig gleich sind. Z. B.

$$3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17;\ 19;\ \ldots\ldots\ldots$$

$$a;\ a \pm b;\ a \pm 2b;\ a \pm 3b;\ a \pm 4b;\ a \pm 5b;\ \ldots\ldots$$

Wegen der arithmetischen Reihen höherer Ordnungen sehe man das dreizehnte Kapitel.

Reciproke Reihen heißen diejenigen, deren Glieder aus Brüchen bestehen, welche die Einheit zum Zähler und die Potenzen einer arithmetischen Reihe zum Nenner haben. Z. B.

$$\frac{1}{a^r};\ \frac{1}{(a+b)^r};\ \frac{1}{(a+2b)^r};\ \frac{1}{(a+3b)^3};\ \frac{1}{(a+4b)^r};\ \ldots\ldots\ldots$$

$$1;\ \frac{1}{2^3};\ \frac{1}{3^3};\ \frac{1}{4^3};\ \frac{1}{5^3};\ \frac{1}{6^3};\ \frac{1}{7^3};\ \ldots\ldots$$

$$1;\ \frac{1}{3^4};\ \frac{1}{5^4};\ \frac{1}{7^4};\ \frac{1}{9^4};\ \frac{1}{11^4};\ \frac{1}{13^4};\ \ldots\ldots$$

Eine reciproke Reihe der ersten Potenzen von den natürlichen Zahlen, heißt auch eine **harmonische Reihe**. z. B.

$$1;\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{3};\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{1}{5};\ \tfrac{1}{6};\ \tfrac{1}{7};\ \tfrac{1}{8};\ \tfrac{1}{9};\ \ldots\ldots$$

Wiederkehrende oder **recurrente** Reihen sind solche, in welcher die Glieder mittelst der vorhergehenden dadurch bestimmt werden, daß man eine bestimmte Anzahl unmittelbar vorhergehender Glieder, mit eben so vielen unveränderlich beizubehaltenden Ausdrücken, einzeln nach ihrer Folge, multiplizirt und die Summe dieser Producte addirt. So ist

$$1 - ax + (a^2 - b)\,x^2 - (a^3 - 2ab)\,x^3 + (a^4 - 3a^2b + b^2)\,x^4 - \ldots\ldots$$

eine solche Reihe, weil man jedes Glied findet, wenn man das unmittelbar vorangehende mit $-ax$ und das diesem vorgehende mit $-bx^2$ multiplizirt und beide Producte zusammen addirt.

§. 349.

Bezeichnet man die aufeinander folgenden Glieder irgend einer Reihe (§. 7.) auf nachstehende Weise:

$$y;\ y_1;\ y_2;\ y_3;\ y_4;\ \ldots\ldots\ldots\ y_{n-1};\ y_n$$

so daß y das erste, y_1 das zweite, y_2 das dritte, ... Glied der Reihe vorstellt, so ist y^n des $n+1$ste Glied dieser Reihe. Ist alsdann y_n eine solche Funkzion von n und andern Größen, aus welcher die einzelnen Glieder der Reihe dadurch bestimmt werden können, daß, wenn $n = 0$ in y_n gesetzt wird, daraus y; für $n = 1$, daraus y_1; für $n = 2$, daraus y_2 u. s. w. entstehen, so heißt y_n das **allgemeine Glied** (*Terminus generalis*) der Reihe.

Wäre z. B. $y_n = (a + nb)\,x^n$ das allgemeine Glied einer Reihe, und man nimmt, zur Bestimmung der übrigen Glieder, n als eine veränderliche Größe an [wie solches in der Folge stets der Fall seyn soll, wenn von dem allgemeinen Gliede einer Reihe die Rede ist], so erhält man das erste Glied y, wenn $n = 0$ in y_n statt n gesetzt wird; dies giebt $y = ax^0 = a$. Für $n = 1$ erhält man das zweite Glied $y_1 = (a + b)\,x$; für $n = 2$, das dritte Glied $y_2 = (a + 2b)\,x^2$, ... und wenn $n - 1$ statt n gesetzt wird, so erhält man das nt Glied oder $y_{n-1} = (a + nb - b)\,x^{n-1}$.

Die Zahl n, von welcher das allgemeine Glied y_n eine Funkzion ist, und die nach den verschiedenen Stellen eines Gliedes verschiedene Werthe erhält, heißt der **Stellenzeiger** (*Index*) (Anzeiger, Stellenzahl) einer Reihe. Sie darf mit der **Anzahl der Glieder** einer Reihe nicht verwechselt werden.

Mit Hülfe des allgemeinen Gliedes y_n und der Veränderung des Stellenzeigers n, kann man jede Reihe so weit **vorwärts** erweitern als man will, wenn man $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... statt n in y_n setzt, weil dadurch die auf y_n folgenden Glieder erhalten werden. Eben so kann man die Reihe **rückwärts** erweitern, wenn -1, -2, -3, ... statt n gesetzt wird, weil

man dadurch diejenigen Glieder findet, welche dem Gliede y voran gehen. Wenn daher $y_n = (a + nb)\,x^n$ ist, so findet man das folgende Glied $y_{n+1} = (a + nb + b)\,x^{n+1}$ u. s. w. Eben so erhält man das y voran gehende Glied y_{-1}, wenn -1 statt n in y_n gesetzt wird, also $y_{-1} = (a - b)\,x^{-1}$; $y_{-2} = (a - 2b)\,x^{-2}$; u. s. w. Die allgemeinste Darstellung einer ohne Ende vor- und rückwärts erweiterten Reihe, wenn man über jedes Glied seinen Stellenzeiger schreibt, ist daher folgende:

$$\begin{matrix} & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & n-1 & n & n+1 & \\ \ldots\ldots; & y_{-3}; & y_{-2}; & y_{-1}; & y; & y_1; & y_2; & \ldots\ldots & y_{n-1}; & y_n; & y_{n+1}; & \ldots\ldots \end{matrix}$$

Dasjenige Glied dieser Reihe, dessen Stellenzeiger = o ist, heißt das **Anfangsglied** derselben, weil man von demselben anfängt, die Reihe vor oder rückwärts zu erweitern. Bei den gewöhnlich vorkommenden Reihen ist das Anfangsglied auch zugleich das erste Glied der Reihe. Z. B.

$$y;\ y_1;\ y_2;\ y_3;\ \ldots\ldots\ y_{n-1};\ y_n.$$

Hier ist y das Anfangsglied und zugleich das erste Glied. Das allgemeine Glied y_n, dessen Stellenzahl n ist, wird alsdann das $n+1$ste Glied einer solchen Reihe. Hätte man hingegen folgende Reihe

$$y_{-2};\ y_{-1};\ y;\ y_1;\ y_2;\ \ldots\ldots\ y_{n-2};\ y_{n-1}$$

so ist zwar y das Anfangsglied derselben, weil sein Stellenzeiger = o ist; aber es ist alsdann y_{-2} das erste, y_{-1} das zweite, y das dritte, ... y_{n-1} das $n+2$te Glied der Reihe. Man darf daher nicht unbedingt das **erste Glied** einer Reihe mit dem Anfangsgliede derselben verwechseln. Bei allen folgenden Untersuchungen über Reihen wird vorausgesetzt, daß das erste Glied der Reihe mit dem Anfangsgliede derselben einerlei sey. Ausnahmen hievon sollen besonders bemerkt werden.

Anmerkung. Um Verwechselungen mit Binomialkoefficienten zu vermeiden, kann man auch die Reihenglieder auf folgende Art schreiben:

$$\overset{0}{y};\ \overset{1}{y};\ \overset{2}{y};\ \overset{3}{y};\ \ldots\ldots\ \overset{n-1}{y};\ \overset{n}{y};\ \overset{n+1}{y};\ \ldots\ldots$$

indem man den Stellenzeiger über y setzt. Weil aber der Druck für diese Bezeichnung nicht so bequem ist, und die Stellenzeiger leicht mit Exponenten verwechselt werden können, auch in der Folge gewöhnlich zur Bezeichnung der Binomialkoefficienten nur die Buchstaben n, m, r oder andere kleine Anfangsbuchstaben, zu den übrigen Koefficienten aber, große Buchstaben gewählt werden sollen, so wird hiedurch aller Verwechselung der Koefficienten einer Binomialreihe, mit den Koefficienten oder Gliedern einer jeden andern Reihe, hinlänglich vorgebeugt.

§. 350.

Zusatz. Um aus dem allgemeinen Gliede einer Reihe jedes einzelne derselben zu finden, mußte bisher das allgemeine Glied eine Funkzion von n seyn, und man konnte jedes einzelne Glied erhalten, wenn man anstatt n die Stellenzahl des gesuchten Gliedes setzte. Weil aber $n^0 = 1$ ist, so kann auch wohl das allgemeine Glied einer Reihe lediglich aus solchen Größen bestehen, welche von n unabhängig sind, in welchem Falle alle Glieder der Reihe einander gleich werden.

Denn es sey $y_n = a\,n^0$, so sind alle Glieder der Reihe, welche entstehen, wenn man 0, 1, 2, 3, ... statt n setzt, einander gleich, oder $y = a$, $y_1 = a$, $y_2 = a$, ... $y_n = a$.

Wenn daher das allgemeine Glied $y_n = a\,n^0 = a$ eine vom Stellenzeiger n unabhängige Größe ist, so sind alle Glieder der Reihe einander gleich.

§. 351.

Derjenige Ausdruck, welcher die Summe der Glieder einer Reihe vom Anfangsgliede y bis zum allgemeinen Gliede y_n, beide mit inbegriffen angiebt, heißt das **Summenglied** (summatorische Glied) (*Term. summatorius*) der Reihe. Das Summenglied giebt daher **die Summe von** $n+1$ **Gliedern einer Reihe** an, welches man dadurch bezeichnet, daß vor das allgemeine Glied y_n das Zeichen $\int$ gesetzt wird. So ist

$$\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n.$$

Wäre das allgemeine Glied $(n-2)a$, so ist das Summenglied:

$$\int(n-2)a = -2a - a + 0 + a + 2a + 3a + \ldots\ldots + (n-2)a.$$

Ist hingegen $(n-3)a$ das allgemeine Glied einer Reihe, so erhält man

$$\int(n-3)a = -3a - 2a - a + 0 + a + 2a + 3a + \ldots\ldots + (n-3)a.$$

Weil das Summenglied jederzeit die Summe von $n+1$ Gliedern einer Reihe bezeichnet, so erhält man, wenn a das allgemeine Glied einer Reihe ist,

$$(I)\quad \int a = \int a n^0 = (n+1)a. \quad (§. 350.)$$

Für $a = 1$ wird

$$(II)\quad \int 1 = n+1.$$

Es ist nämlich das allgemeine Glied a von n unabhängig, daher bleibt es für jeden Werth von n dasselbe, oder jedes Glied der Reihe ist $= a$. Da nun $\int a$ die Summe von $n+1$ Gliedern der Reihe bezeichnet, so ist offenbar $\int a = (n+1)a$.

Behält n hier und in der Folge die angenommene Bedeutung, und es befindet sich irgend eine Funkzion von n unter dem Summenzeichen, so wird dadurch die Summe von $n+1$ Gliedern einer Reihe angedeutet, welche entsteht, wenn man nach einander 0, 1, 2, 3, ... bis n statt n in das, unter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied setzt, alle andern Größen aber, welche von n unabhängig sind, als unveränderlich annimmt. Es ist daher auch

$$\int y_{n+3} = y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \ldots\ldots + y_{n+2} + y_{n+3}$$
$$\int y_{n-2} = y_{-2} + y_{-1} + y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-3} + y_{n-2}.$$

§. 352.

Wäre y_n das allgemeine Glied einer Reihe, von welcher man nur die Summe einer gegebenen Anzahl aufeinander folgender Glieder, mit Inbegriff des ersten Gliedes, ausdrucken will, so kann dies leicht dadurch geschehen, daß der Stellenzeiger des letzten Gliedes dieser Reihe, links oben, neben das Summenzeichen $\int$ gesetzt wird. Hienach ist

$$^3\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3.$$

Es bezeichnet daher überhaupt $^r\!\int y_n$ die Summe einer Reihe, welche erhalten wird, wenn nach einander 0, 1, 2, 3, ... r statt n in y_n gesetzt werden, oder

$$^r\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots y_{r-1} + y_r.$$

Die Zahl r heißt der Stellenzeiger des Summengliedes oder der **Summenzeiger**. Die Anzahl der Glieder der zugehörigen Reihe ist um eins größer als der Summenzeiger, und die Reihe bricht bei demjenigen Gliede ab, welches man erhält, wenn der Summenzeiger statt n in das all-

gemeine Glied gesetzt wird. Hienach ist

$$(I) \quad {}^{0}\!\int y_n = y.$$

Der angenommenen Bezeichnung gemäß ist

$$\begin{aligned} {}^{3}\!\int y_{n+1} &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ {}^{4}\!\int y_{n-1} &= y_{-1} + y + y_1 + y_2 + y_3 \\ {}^{5}\!\int y_{n-2} &= y_{-2} + y_{-1} + y + y_1 + y_2 + y_3 \\ {}^{r+2}\!\int y_{n-2} &= y_{-2} + y_{-1} + y + y_1 + \ldots\ldots + y_{r-1} + y_r \\ {}^{m+r}\!\int y_{n-r} &= y_{-r} + y_{1-r} + y_{2-r} + y_{3-r} + \ldots\ldots + y_{m-1} + y_m. \end{aligned}$$

Nach der angenommenen Bezeichnung ist ferner

$${}^{n}\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n.$$

Eben diese Reihe wurde aber nach §. 350. durch $\int y_n$ also ohne Summenzeiger bezeichnet. Wenn daher in der Folge der Summenzeiger neben $\int$ fehlt, so wird vorausgesetzt, daß derselbe $= n$ ist.

In den Fällen, wo der Summenzeiger $= 0$ ist, muß dies besonders ausgedruckt werden.

Wegen $\int a = \int a n^0 = (n + 1)\, a$ (§. 351.) erhält man

$$(II) \quad {}^{r}\!\int a = (r + 1)\, a$$

und für $r = 0$

$$(III) \quad {}^{0}\!\int a = a.$$

Es ist ferner

$$\int n^r = 0^r + 1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots + n^r, \text{ daher}$$

$$(IV) \quad {}^{0}\!\int n^r = 0 \text{ und}$$

$$(V) \quad {}^{1}\!\int n^r = 1,$$

wenn r eine positive, ganze oder gebrochene Zahl, ist.

§. 353.

1. **Zusatz.** Das allgemeine Glied einer Reihe mit abwechselnden Zeichen kann durch $(-1)^n y_n$ ausgedruckt werden. Hienach läßt sich das Summenglied einer Reihe mit abwechselnden Zeichen auf folgende Art darstellen:

$$\int(-1)^n y_n = (-1)^0 y + (-1)^1 y_1 + (-1)^2 y_2 + \ldots\ldots + (-1)^n y_n \text{ oder}$$

$$\int(-1)^n y_n = y - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} y_{n-1} + (-1)^n y_n,$$

oder auch

$$\int(-1)^n y_n = y - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + \ldots\ldots \mp y_{n-1} \pm y_n;$$

wo die obern Zeichen für ein gerades und die untern für ein ungerades n gelten.

§. 354.

2. **Zusatz.** Wäre das allgemeine Glied einer Reihe oder $y_n = n + 1$, so wird

$$\int y_n = \int(n + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n + (n + 1).$$

Nun ist §. 40. (XIII)

$$\frac{(m+1)\,m}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + (m - 1) + m,$$

oder $m = n + 1$ gesetzt, giebt

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n + (n+1),$$

daher wird hier $\int y_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, und es ist dies offenbar die Summe einer Reihe von $n+1$ Gliedern, deren allgemeines Glied $n+1$ ist. Sucht man nur die Summe von 4 Gliedern, also ${}^3\!\int y_n$, so muß offenbar $n = 3$ in $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gesetzt werden. Wenn daher

$$\int y_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ ist, so erhält man}$$

$$^r\!\int y_n = \frac{(r+1)(r+2)}{2},$$

und überhaupt wenn $\int y_n$ irgend eine Funkzion von n ist (§. 349.), welche man durch Fn bezeichnen kann, so ist für

$$\int y_n = Fn$$

$$^r\!\int y_n = Fr.$$

Eben so findet man $\int y_n$ aus $^r\!\int y_n$.

§. 355.

Weil $^r\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_r$ ist, so kann man r ohne Ende wachsen lassen und es entsteht dann eine unendliche Reihe, welche man durch $^\infty\!\int y_n$ oder auch, wenn für diese Bezeichnung der Buchstab t gewählt wird, durch

$$^t\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n + \ldots\ldots$$

bezeichnen kann, wo die fortlaufenden Punkte, hinter dem zuletzt geschriebenen Gliede, anzeigen, daß die Reihe ohne Ende fortläuft.

Die Funkzion aus deren Entwickelung eine unendliche Reihe entsteht, welche ebenfalls durch $^t\!\int y_n$ bezeichnet werden kann, heißt die **ganze Summe** oder die **erzeugende Funkzion der Reihe**. Das Summenglied einer endlichen Reihe verwandelt sich daher in die ganze Summe, wenn die Reihe unendlich wird. Ist die ganze Summe einer unendlichen Reihe irgend eine gebrochene Funkzion, so heißt diese auch der **erzeugende** oder **Urbruch** der Reihe.

Diejenigen unendlichen Reihen, von welchen die Summe einer bestimmten Anzahl ihrer ersten Glieder einem angeblichen **endlichen** Werthe, oder einer endlichen Grenze, immer näher kommt, je mehr Glieder man zusammen zählt, heißen **abnehmende** oder **convergente Reihen**. Die endliche Grenze, welcher sich die Summe der Glieder fortwährend nähert, je mehr man zusammen zählt, ist daher die ganze Summe der Reihe.

Nähert sich die Summe einer bestimmten Anzahl von Gliedern einer unendlichen Reihe, so weit man solche auch fortsetzen mag, keiner angeblichen endlichen Grenze, so heißt die Reihe **wachsend** oder **divergent**. Es kann daher durch Zusammenzählung der Glieder einer solchen Reihe, kein Näherungswerth für die ganze Summe derselben gefunden werden.

Reihen, in welchen, ohne Rücksicht auf die Zeichen vor den Gliedern, jedes Glied kleiner als das nächst vorhergehende ist, heißen **Reihen mit abnehmenden Gliedern**. Sie dürfen nicht

mit abnehmenden oder convergenten Reihen verwechselt werden, weil eine Reihe sehr wohl abnehmende Glieder haben und dennoch wachsend oder divergent seyn kann.

Reihen in welchen, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, jedes Glied größer als das nächst vorhergehende ist, heißen **Reihen mit wachsenden Gliedern.**

Daß Reihen mit abnehmenden Gliedern dennoch einen unendlich großen Werth erhalten, also zu den wachsenden Reihen gehören können, beweist die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \ldots\ldots$$

deren Summe nach §. 167. unendlich groß ist.

§. 356.

Wie in jedem vorkommenden Falle entschieden werden könne ob, eine Reihe abnehmend oder wachsend sey, soll im sechszehnten Kapitel näher auseinander gesetzt werden, weil man nur dann, wenn die Reihe abnehmend ist, durch Zusammenzählung ihrer Glieder einen Näherungswerth für die ganze Summe derselben erhalten kann.

Daß sich bei wachsenden unendlichen Reihen durch Zusammenzählen ihrer einzelnen Glieder die ganze Summe derselben auch nicht näherungsweise angeben läßt, kann durch folgendes Beispiel erläutert werden. Es sey $\frac{1}{1-2x}$ der zu entwickelnde Urbruch einer Reihe, so wird (§. 59.)

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \ldots\ldots + 2^n x^n + \ldots\ldots$$

Die ganze Summe dieser Reihe kann auch durch ${}^1\!S 2^n x^n$ bezeichnet werden und es ist hienach ${}^1\!S 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$.

Erhält x einen bestimmten Werth, wodurch die analytische Summe der Reihe in eine arithmetische verwandelt wird, so ist dadurch die ganze Summe der Reihe bestimmt ausgedruckt; allein, ob alsdann, wenn diese ganze Summe unbekannt wäre, durch Zusammenzählen der einzelnen Reihenglieder ein Näherungswerth für diese Summe erhalten werden kann, hängt davon ab, ob die Reihe abnehmend oder wachsend ist. Für $x = 1$ wird die ganze Summe $\frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2} = -1$, also $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + \ldots\ldots$ eine wachsende Reihe, deren Glieder immer größer und zuletzt unendlich groß werden, weshalb auch, durch fortgesetztes Zusammenzählen dieser Glieder, eine unendlich große Summe gefunden wird, obgleich die Reihe der Entwickelung von $\frac{1}{1-2} = -1$ gleich ist. Es ist daher unstatthaft, bei wachsenden Reihen, aus der Zusammenzählung ihrer einzelnen Glieder, einen Näherungswerth für ihre ganze Summe abzuleiten. Hierdurch wird aber der anscheinende Widerspruch nicht gehoben, daß eine Reihe, welche durch Zusammenzählen ihrer Glieder unendlich groß wird, $= -1$ seyn soll. Allein es ist zu erwägen, daß, sobald bei einer Reihe vom Zusammenzählen ihrer Glieder die Rede ist, dieses nur dann mit Erfolg bewirkt werden kann, wenn zugleich auf die **Ergänzung** der Reihe (§. 206. u. f.) Rücksicht genommen wird, und daß ohne diese, bei wachsenden Reihen, weder ein annähernder Werth, noch die ganze Summe einer solchen Reihe gefunden werden kann, weil

weil die Ergänzung derselben, als ein nothwendig zur Reihe gehöriger Theil, nicht aus der Rechnung wegbleiben darf. Dagegen verschwindet aller Widerspruch, wenn man bei diesen Reihen die Ergänzung kennt. Diese für das angenommene Beispiel zu finden, werde mit $1 - 2x$ in 1 dividirt, so erhält man, wenn die Reihe bei irgend einem Gliede, etwa beim achten, abbricht

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + 64x^6 + 128x^7 + \frac{256x^8}{1-2x}.$$

Hier ist $\frac{256x^8}{1-2x}$ die Ergänzung, oder die Summe der fehlenden Glieder der unendlichen Reihe, und die angezeigte Gleichheit, zwischen dem erzeugenden Bruch und der Reihe selbst, ist außer allem Zweifel. Wird $x = 1$ gesetzt, so erhält man

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 - 256$$

wie erfordert wird.

Hieraus folgt, daß, wenn bei einer wachsenden unendlichen Reihe die Ergänzung derselben unbekannt ist, so kann durch Zusammenzählung ihrer Glieder kein annähernder Werth für ihre ganze Summe gefunden werden, und aller anscheinende Widerspruch, welcher aus der Gleichheit einer solchen Reihe mit ihrer ganzen Summe entsteht, wird beseitigt, wenn man zugleich auf die Ergänzung der Reihe Rücksicht nimmt.

§. 357.

Die bereits §. 11. gegebene Erinnerung, daß $\infty - \infty$ nicht unbedingt $= 0$ gesetzt werden kann, findet auch hier ihre Anwendung, weshalb besonders die Behandlung solcher Reihen, deren Summe unendlich groß ist, alle Behutsamkeit erfordert. Denn man setze:

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots$$

Diesen Ausdruck durch 2 dividirt, giebt

$$\tfrac{1}{2}S = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \ldots\ldots [I]$$

und von dem vorstehenden abgezogen, giebt

$$\tfrac{1}{2}S = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \ldots\ldots$$

hievon wieder die Reihe [I] abgezogen, giebt

$$0 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots$$

Nach §. 164. (*XIII*) ist diese Reihe $= lgn\, 2$, folglich

$lgn\, 2 = 0$, welches absurd ist, da nach §. 166.

$lgn\, 2 = 0,69314 \ldots\ldots$ seyn muß.

Das Fehlerhafte dieser Schlüsse liegt darin, daß nach §. 167.

$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \ldots = \infty$ wird, also hier ganz unangemessen $\infty - \infty = 0$ gesetzt worden ist.

Ueberhaupt erfordern unendliche Reihen die größte Vorsicht bei ihrer Behandlung. Zu welchen Fehlschlüssen sie, ohne die erforderliche Rücksicht Veranlassung, geben können, folgt aus nachstehendem Beispiele.

Nach §. 59. ist

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \ldots \text{ also für } x = 1$$

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \quad [I]$$

Ferner ist nach §. 57.

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + 0 + x^3 - x^4 + 0 + x^6 - x^7 + 0 + \ldots \text{ also für } x = 1$$

$$\tfrac{1}{3} = 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \ldots [II]$$

Schreibt man nun, ohne Rücksicht auf die fehlenden Glieder,

$$\tfrac{1}{3} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots [III]$$

so ist diese Reihe mit der oben gefundenen, deren ganze Summe $= \frac{1}{2}$ ist, einerlei, also $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, welches absurd ist. Offenbar ist hier sehr fehlerhaft die Reihe [*III*] mit [*II*], durch Weglassung der Nullen, als einerlei angenommen worden, obgleich diese Nullen nothwendig aus der Entwickelung des erzeugenden Bruchs entstehen und die verschiedenen Gestalten der Reihen [*I*] und [*II*] anzeigen, daß [*II*] aus einem andern erzeugenden Bruch entstehen müsse, als [*I*], weshalb auch ihre ganzen Summen verschieden seyn müssen.

§. 358.

Wäre y_n das allgemeine Glied einer Reihe, so ist

$$^{m}\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{m-2} + y_{m-1} + y_m \text{ und}$$
$$^{m-1}\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{m-2} + y_{m-1},$$

daher findet man, wenn die untere Reihe von der oberen abgezogen wird,

$$(I) \quad \begin{cases} y_m = {}^{m}\!\int y_n - {}^{m-1}\!\int y_n, \text{ oder auch} \\ y_n = \int y_n - {}^{n-1}\!\int y_n. \end{cases}$$

Wenn daher das Summenglied $\int y_n$ irgend einer Reihe bekannt ist, so läßt sich daraus $^{n-1}\!\int y_n$ dadurch bestimmen, daß man $n - 1$ statt n in den $\int y_n$ entsprechenden Ausdruck setzt, wodurch alsdann leicht das allgemeine Glied der entsprechenden Reihe aus dem Summengliede gefunden wird.

1. **Beispiel.** Wäre $(n+1)^2 a$ das Summenglied einer Reihe, deren unbekanntes allgemeines Glied durch y_n bezeichnet werde, so ist $\int y_n = (n+1)^2 a$, also, wenn man in den entsprechenden Ausdruck $n - 1$, statt n, setzt, so wird

$$^{n-1}\!\int y_n = n^2 a, \text{ daher}$$

$$\int y_n - {}^{n-1}\!\int y_n = (n+1)^2 a - n^2 a = (2n+1) a,$$

folglich das allgemeine Glied

$$y_n = (2n+1) a$$

und die entsprechende Reihe:

$$a + 3a + 5a + 7a + 9a + 11a + \ldots + (2n+1) a.$$

Das hundertste Glied dieser Reihe, wenn dessen Stellenzahl $= 99$ gesetzt wird, wäre hienach:

$$y_{99} = (2 \cdot 99 + 1) a = 199 a$$

und die Summe der ersten hundert Glieder

$$(99 + 1)^2 a = 10000 a.$$

2. **Beispiel.** Das gegebene Summenglied einer Reihe sey $=(n+1)(a+\frac{1}{6}cn+\frac{1}{3}cn^2)$, so wird nach der angenommenen Bezeichnung:

$$\int y_n = (n+1)(a+\tfrac{1}{6}cn+\tfrac{1}{3}cn^2)$$

$^{n-1}\int y_n = n[a+\frac{1}{6}c(n-1)+\frac{1}{3}c(n-1)^2]$, daher findet man das gesuchte allgemeine Glied

$$y_n = \int y_n - {}^{n-1}\int y_n = a + cn^2.$$

Diesem allgemeinen Gliede entspricht die Reihe

$$a;\ a+c;\ a+2c;\ a+3c;\ a+4c;\ a+5c;\ \ldots\ldots$$

§. 359.

Weil $^m\int y_n = \quad y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1} + y_m$ und

$^m\int y_{n-1} = y_{-1} + y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1}$,

so erhält man, wenn die untere Reihe von der oberen abgezogen wird

$$^m\int y_n - {}^m\int y_{n-1} = y_m - y_{-1}, \text{ daher}$$

$$(I) \begin{cases} ^m\int y_{n-1} = y_{-1} - y_m + {}^m\int y_n, \text{ oder auch} \\ \int y_{n-1} = y_{-1} - y_n + \int y_n. \end{cases}$$

Wäre z. B. $y_n = (2n+1)a$ und $\int(2n+1)a = (n+1)^2 a$ gegeben, so wird $y_{-1} = -a$ und $\int y_{n-1} = \int(2n-1)a$, daher erhält man nach (I)

$$\int(2n-1)a = -a-(2n+1)a+(n+1)^2 a, \text{ oder}$$

$$\int(2n-1)a = (n+1)^2 a - 2(n+1)a = (n+1)(n-1)a.$$

Nun ist

$$\int(2n-1)a = -a + a + 3a + 5a + 7a + \ldots + (2n-1)a$$

und man findet

$$^0\int(2n-1)a = -a$$
$$^1\int(2n-1)a = 0$$
$$^2\int(2n-1)a = 3a$$
$$^3\int(2n-1)a = 8a$$

u. s. w., wie erfordert wird.

Die vorstehenden Ausdrücke (I) von (I) §. 358. abgezogen, geben:

$$(II) \begin{cases} ^m\int y_{n-1} = y_{-1} + {}^{m-1}\int y_n \text{ und auch} \\ \int y_{n-1} = y_{-1} + {}^{n-1}\int y_n. \end{cases}$$

Es ist $^m\int y_n \quad = y + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m$

$^m\int y_{n+1} = \quad y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m + y_{m+1}$

$^{m-1}\int y_{n+1} = \quad y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m$.

Zuerst die zweite, und dann, die dritte Reihe von der ersten abgezogen, so erhält man

$$(III) \begin{cases} ^m\int y_n = y + y_{m+1} + {}^m\int y_{n+1}, \text{ oder} \\ \int y_n = y + y_{n+1} + \int y_{n+1} \text{ und} \end{cases}$$

$$(IV) \begin{cases} ^m\int y_n = y + {}^{m-1}\int y_{n+1}, \text{ oder} \\ \int y_n = y + {}^{n-1}\int y_{n+1}. \end{cases}$$

Wegen $^{m}\!\int n y_n = 0.y + 1y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + my_m$
$^{m}\!\int (n+1) y_{n+1} = 1y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + my_m + (m+1)y_{m+1}$
$^{m-1}\!\int (n+1) y_{n+1} = 1y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + my_m.$

Hieraus findet man wie oben

$$(V) \begin{cases} ^{m}\!\int n y_n = (m+1)\, y_{m+1} + {}^{m}\!\int (n+1) y_{n+1}, \text{ oder} \\ \int n y_n = (n+1)\, y_{n+1} + \int (n+1) y_{n+1} \end{cases}$$

$$(VI) \begin{cases} ^{m}\!\int n y_n = {}^{m-1}\!\int (n+1)\, y_{n+1}, \text{ oder} \\ \int n y_n = {}^{n-1}\!\int (n+1)\, y_{n+1}. \end{cases}$$

Ferner ist $^{1}\!\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \ldots$
$^{1}\!\int y_{n-1} = y_{-1} + y + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \ldots$
$^{1}\!\int y_{n+1} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \ldots$

folglich

$$(VII) \quad ^{1}\!\int y_{n-1} = y_{-1} + {}^{1}\!\int y_n$$
$$(VIII) \quad ^{1}\!\int y_n = y + {}^{1}\!\int y_{n+1}.$$

§. 360.

Besteht das allgemeine Glied y_n, von irgend einer Reihe, aus mehreren Theilen, also

$$y_n = y'_n + y''_n + y'''_n + \ldots\ldots$$

wo y'_n, y''_n, y'''_n, ... eben so wie y_n Funkzionen von n sind, so kann man jedes dieser Glieder als das allgemeine Glied einer Reihe ansehen, welche aus $n+1$ Gliedern besteht. Die Summen dieser Reihen müssen zusammen genommen eben so groß seyn, als die Summe derjenigen Reihe, zu welcher das allgemeine Glied y_n gehört, daher erhält man auch aus

$$y_n = y'_n + y''_n + y'''_n + \ldots$$
$$\int y_n = \int y'_n + \int y''_n + \int y'''_n + \ldots$$

oder, wenn das allgemeine Glied einer Reihe aus mehreren Theilen besteht, so findet man das summirende Glied derselben, wenn man von jedem Theile des allgemeinen Gliedes, das Summenglied sucht, und alsdann diese Glieder addirt.

Um diesen wichtigen Satz vollständig zu übersehen, so sey

$$y_n = y'_n + y''_n + y'''_n + \ldots$$

daher erhält man auch, wenn o, 1, 2, 3, ... statt n gesetzt werden

$$y = y' + y'' + y''' + \ldots$$
$$y_1 = y'_1 + y''_1 + y'''_1 + \ldots$$
$$y_2 = y'_2 + y''_2 + y'''_2 + \ldots$$
$$y_3 = y'_3 + y''_3 + y'''_3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y'_n + y''_n + y'''_n + \ldots$$

folglich, wenn man die übereinander stehenden Glieder addirt,

$$\int y_n = \int y'_n + \int y''_n + \int y'''_n + \ldots$$

§. 361.

Besteht das allgemeine Glied y_n einer Reihe aus zwei Faktoren a und N, wovon der eine, N, eine Funkzion von dem Stellenzeiger n, der andere a aber, insofern als unveränderlich angesehen wird, als er von dem Stellenzeiger n unabhängig ist, so wird bei der Bildung der Reihenglieder y; y_1; y_2; y_3; .... aus dem allgemeinen Gliede $y_n = aN$, jedes einzelne Glied den Faktor a unveränderlich behalten, wogegen der zweite, aus N entspringende Faktor eines solchen Gliedes, nach dem Stellenzeiger n verändert wird. Die einzelnen Glieder haben daher, eben so wie die Summe der Reihe, den gemeinschaftlichen Faktor a und es ist daher $\int y_n$, oder

$$(I)\ \int aN = a\int N.$$

Wäre z. B. $N = (n+1)^2$, so ist

$$\int a(n+1)^2 = a + 2^2 a + 3^2 a + 4^2 a + \ldots + (n+1)^2 a$$
$$= a[1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n+1)^2], \text{ oder}$$
$$\int a(n+1)^2 = a\int (n+1)^2.$$

Für $N = 1$ in (I) wird $\int a = a\int 1 = a\int n^0$. Nun war, §. 351., $\int 1 = \int n^0 = n+1$, daher ist

$$(II)\ \int a = a\int 1 = (n+1)\,a.$$

§. 362.

Auch mittelst der Ableitungsrechnung läßt sich aus dem Summengliede $\int y_n$ einer Reihe das allgemeine Glied y_n derselben finden. Denn man setze, weil $\int y_n$ eine Funkzion von n seyn muß, $\int y_n = fn$, so wird ${}^{n-1}\!\int y_n = f(n-1)$, daher, wenn n als veränderlich angenommen und (§. 176.) $x = n$ und $h = 1$ gesetzt wird,

$$f(n-1) = fn - f^1 n + \frac{f^2 n}{2!} - \frac{f^3 n}{3!} + \frac{f^4 n}{4!} - \frac{f^5 n}{5!} + \ldots$$

oder weil $fn = \int y_n$, so wird $\partial fn = f^1 n . \partial n$, also $f^1 n = \frac{\partial \int y_n}{\partial n}$; $f^2 n = \frac{\partial^2 \int y_n}{\partial n^2}$; .... daher:

$${}^{n-1}\!\int y_n = \int y_n - \frac{\partial \int y_n}{1!\,\partial n} + \frac{\partial^2 \int y_n}{2!\,\partial n^2} - \frac{\partial^3 \int y_n}{3!\,\partial n^3} + \ldots$$

oder wegen $y_n = \int y_n - {}^{n-1}\!\int y_n$ (§. 358.) erhält man auch das allgemeine Glied

$$y_n = \frac{\partial \int y_n}{1!\,\partial n} - \frac{\partial^2 \int y_n}{2!\,\partial n^2} + \frac{\partial^3 \int y_n}{3!\,\partial n^3} - \frac{\partial^4 \int y_n}{4!\,\partial n^4} + \frac{\partial^5 \int y_n}{5!\,\partial n^5} - \frac{\partial^6 \int y_n}{6!\,\partial n^6} + \ldots\ldots$$

wo bei den Ableitungen n als unabhängig veränderlich angenommen ist.

Diese Reihe bricht ab, wenn $\int y_n$ eine solche Funkzion von n ist, deren höhere Ableitungen verschwinden. In den meisten Fällen verdient der im vorigen §. gefundene Ausdruck zur Bestimmung des allgemeinen Gliedes aus dem Summengliede den Vorzug.

Beispiel. Wäre $\int y_n = (n+1)(a + \frac{1}{2}cn + \frac{1}{3}cn^2)$ gegeben, so findet man $\frac{\partial \int y_n}{\partial n} = a + \frac{1}{2}c + cn + cn^2$; $\frac{\partial^2 \int y_n}{\partial n^2} = c + 2cn$; $\frac{\partial^3 \int y_n}{\partial n^3} = 2c$; $\frac{\partial^4 \int y_n}{\partial n^4} = 0$, daher wird

$$y_n = a + \frac{1}{2}c + cn + cn^2 - \frac{c+2cn}{2} + \frac{2c}{6} = a + cn^2.$$

§. 363.

Den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen Gliede einer Reihe und den zugehörigen Ableitungen, kann man ebenfalls mittelst der taylorschen Reihe angeben. Denn man setze das allgemeine Glied $y_n = fn$; so wird $y_{n\pm r} = f(n \pm r)$. Aber (§. 176.)

$$f(n \pm r) = fn \pm r f^1 n + \frac{r^2}{2!} f^2 n \pm \frac{r^3}{3!} f^3 n + \ldots\ldots$$

oder weil $\frac{\partial y_n}{\partial n} = f^1 n$; $\frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} = f^2 n$; .... folglich

$$(I) \quad y_{n+r} = y_n + r\frac{\partial y_n}{\partial n} + \frac{r^2}{2!}\frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} + \frac{r^3}{3!}\frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} + \frac{r^4}{4!}\frac{\partial^4 y_n}{\partial n^4} + \ldots\ldots$$

$$(II) \quad y_{n-r} = y_n - r\frac{\partial y_n}{\partial n} + \frac{r^2}{2!}\frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} - \frac{r^3}{3!}\frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} + \frac{r^4}{4!}\frac{\partial^4 y_n}{\partial n^4} - \ldots\ldots$$

wo durchgängig n als unabhängig veränderlich angenommen ist. Diese Reihen müssen abbrechen, wenn eine der höhern Ableitungen von $y_n = 0$ wird.

Von diesen Reihen wird in der Folge Gebrauch gemacht werden. Wollte man sie darauf anwenden, um aus einem gegebenen allgemeinen Gliede, z. B. $y_n = a + cn^2$ das Glied y_{n+r} zu finden, so erhält man dies offenbar leichter, wenn $n + r$ statt n in die vorstehende Gleichung gesetzt wird, und man findet sogleich

$$y_{n+r} = a + c(n+r)^2.$$

Aus $y_n = a + cn^2$ wird $\frac{\partial y_n}{\partial n} = 2cn$; $\frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} = 2c$; $\frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} = 0$, daher nach (I)

$$y_{n+r} = a + cn^2 + r.2cn + \frac{r^2}{2}.2c = a + c(n+r)^2.$$

Noch erhält man für $r = 1$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\partial y_n}{\partial n} + \frac{\partial^2 y_n}{2!\,\partial n^2} + \frac{\partial^3 y_n}{3!\,\partial n^3} + \frac{\partial^4 y_n}{4!\,\partial n^4} + \frac{\partial^5 y_n}{5!\,\partial n^5} + \ldots\ldots\ldots$$

$$y_n - y_{n-1} = \frac{\partial y_n}{\partial n} - \frac{\partial^2 y_n}{2!\,\partial n^2} + \frac{\partial^3 y_n}{3!\,\partial n^3} - \frac{\partial^4 y_n}{4!\,\partial n^4} + \frac{\partial^5 y_n}{5!\,\partial n^5} - \ldots\ldots$$

§. 364.

Die natürlichen Zahlen, von 0 an gerechnet, bilden eine Reihe, deren allgemeines oder $n + 1$stes Glied $= n$ ist; man hat daher, wenn r eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bezeichnet:

$$\int n^{r+1} = 0^{r+1} + 1^{r+1} + 2^{r+1} + 3^{r+1} + \ldots + (n-1)^{r+1} + n^{r+1} \text{ und}$$

$$\int (n+1)^{r+1} = 1^{r+1} + 2^{r+1} + 3^{r+1} + 4^{r+1} + \ldots + n^{r+1} + (n+1)^{r+1}, \text{ also}$$

$$\int (n+1)^{r+1} - \int n^{r+1} = (n+1)^{r+1} - 0^{r+1},$$

oder wenn der vorstehende Ausdruck nur dann angewandt wird, wenn r positiv oder $= 0$ wird, so ist $0^{r+1} = 0$ (§. 13.), daher

$$\int (n+1)^{r+1} - \int n^{r+1} = (n+1)^{r+1}. \quad [I]$$

Ferner ist (§. 25.)

$$(n+1)^{r+1} = n^{r+1} + \frac{r+1}{1} n^r + \frac{r+1.r}{1.2} n^{r-1} + \dots$$ oder §. 363.

$$\int (n+1)^{r+1} = \int n^{r+1} + \frac{r+1}{1}\int n^r + \frac{r+1.r}{1.2}\int n^{r-1} + \dots$$

Diesen Werth statt $\int (n+1)^{r+1}$ in [I] gesetzt, giebt:

$$(n+1)^{r+1} = \frac{r+1}{1}\int n^r + \frac{r+1.r}{1.2}\int n^{r-1} + \frac{r+1.r.r-1}{1.2.3}\int n^{r-2} + \dots$$

oder man findet hieraus die Summe von den Potenzen der natürlichen Zahlen

$$\int n^r = \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} - \frac{r}{2}\int n^{r-1} - \frac{r.r-1}{2.3}\int n^{r-2} - \frac{r.r-1.r-2}{2.3.4}\int n^{r-3} - \frac{r.r-1.r-2.r-3}{2.3.4.5}\int n^{r-4} - \dots$$

Für $r = 0$ wird

$\int n^0 = n + 1$, oder weil $n^0 = 1$ ist

$\int 1 = n + 1$ wie §. 351.

Wird nach einander 1, 2, 3 . . . statt r gesetzt, so findet man

$$\int n = \frac{(n+1)^2}{2} - \tfrac{1}{2}(n+1)$$

$$\int n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \tfrac{2}{2}\int n - \frac{2.1}{2.3}(n+1)$$

$$\int n^3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \tfrac{3}{2}\int n^2 - \frac{3.2}{2.3}\int n - \frac{3.2.1}{2.3.4}(n+1)$$

$$\int n^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - \tfrac{4}{2}\int n^3 - \frac{4.3}{2.3}\int n^2 - \frac{4.3.2}{2.3.4}\int n - \frac{4.3.2.1}{2.3.4.5}(n+1)$$ u. s. w.

Werden die Glieder $\int n$; $\int n^2$; $\int n^3$; . . . . lediglich durch n ausgedrückt, so erhält man

$$\int n^0 = n + 1;$$

$$\int n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \tfrac{1}{2} n (n+1);$$

$$\int n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \tfrac{1}{6} n (n+1)(2n+1);$$

$$\int n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2;$$

$$\int n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30};$$

$$\int n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12};$$

$$\int n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42};$$

$$\int n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12};$$

$$\int n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{4n^7}{6} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30};$$

$$\int n^9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{9n^8}{12} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20};$$

$$\int n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66};$$ u. s. w.

Es läßt sich hienach für jede Potenz, auf welche man die natürlichen aufeinander folgenden Zahlen erhebt, die Summe einer bestimmten Anzahl derselben angeben. Einen allgemeinen Ausdruck für $\int n^r$ findet man §. 439.

1. **Beispiel.** Die Summe aller Zahlen von 1 bis 1000 zu finden.

Hier ist $n = 1000$, also $\int n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ oder $= \frac{1000000}{2} + \frac{1000}{2} = 500500$.

2. **Beispiel.** Die Summe von den Quadraten aller Zahlen von 1 bis 1000 zu finden.

Hier ist $n = 1000$, also $\int n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ oder $\frac{1000^3}{3} + \frac{1000^2}{2} + \frac{1000}{6} = 333833500$.

3. **Beispiel.** Die Summe von den fünften Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100 zu finden.

Hier ist $n = 100$ also $\int n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} - \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$ oder

$= \frac{100^6}{6} + \frac{100^5}{2} + \frac{5.100^4}{12} - \frac{100^2}{12} = 171708332500$.

§. 365.

Es ist nach §. 351.

$$\int n^r a^n = o^r + 1^r a + 2^r a^2 + 3^r a^3 + \ldots\ldots + n^r a^n \text{ und}$$

$$\int (n+1)^r a^n = 1^r + 2^r a + 3^r a^2 + 4^r a^3 + \ldots\ldots + (n+1)^r a^n,$$

oder mit a multiplizirt

$$a \int (n+1)^r a^n = 1^r a + 2^r a^2 + 3^r a^3 + \ldots\ldots + n^r a^n + (n+1)^r a^{n+1},$$

daher, wenn man die erste von der letzten Reihe abzieht:

$$a \int (n+1)^r a^n - \int n^r a^n = (n+1)^r a^{n+1} - o^r \quad [I] \quad (§. 13. I.).$$

Ferner ist nach §. 25.

$$(n+1)^r a^n = n^r a^n + \frac{r}{1} n^{r-1} a^n + \frac{r.r-1}{1.2} n^{r-2} a^n + \ldots\ldots$$

daher §. 360.

$$\int (n+1)^r a^n = \int n^r a^n + \frac{r}{1} \int n^{r-1} a^n + \frac{r.r-1}{1.2} \int n^{r-2} a^n + \ldots\ldots$$

Aus $[I]$ folgt aber

$$\int (n+1)^r a^n = \frac{1}{a} \int n^r a^n + \frac{(n+1)^r a^{n+1} - o^r}{a}, \text{ daher}$$

$\int n^r a^n + \frac{r}{1} \int n^{r-1} a^n + \frac{r.r-1}{1.2} \int n^{r-2} a^n + \ldots\ldots = \frac{1}{a} \int n^r a^n + \frac{(n+1)^r a^{n+1} - o^r}{a}$, oder weil

$\int n^r a^n - \frac{1}{a} \int n^r a^n = \frac{a-1}{a} \int n^r a^n$, so wird

$$\frac{a-1}{a} \int n^r a^n = \frac{(n+1)^r a^{n+1} - o^r}{a} - \frac{r}{1} \int n^{r-1} a^n - \ldots\ldots$$

Man erhält daher

$$\int n^r a^n = \frac{(n+1)^r a^{n+1} - o^r}{a-1} - \frac{a}{a-1} \left[\frac{r}{1} \int n^{r-1} a^n + \frac{r.r-1}{1.2} \int n^{r-2} a^n + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} \int n^{r-3} a^n + \ldots \right]$$

Setzt

Setzt man nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt r und bemerkt, daß für $r = o$ das Glied $o^r = o^o = 1$ wird, so erhält man

$$\int a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\int n a^n = \frac{(n+1) a^{n+1}}{a - 1} - \frac{a}{a-1} \int a^n$$

$$\int n^2 a^n = \frac{(n+1)^2 a^{n+1}}{a - 1} - \frac{a}{a-1} [2 \int n a^n + \int a^n]$$

$$\int n^3 a^n = \frac{(n+1)^3 a^{n+1}}{a - 1} - \frac{a}{a-1} [3 \int n^2 a^n + 3 \int n a^n + \int a^n]$$

u. s. w., oder, wenn man in diesen Ausdrücken statt $\int a^n$; $\int n a^n$; $\int n^2 a^n$; .... die gefundenen Werthe setzt:

$$(I) \quad \int a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1};$$

$$(II) \quad \int n a^n = \frac{n a^{n+1}}{a - 1} - \frac{a(a^n - 1)}{(a-1)^2};$$

$$(III) \quad \int n^2 a^n = \frac{n^2 a^{n+1}}{a - 1} - \frac{2 n a^{n+1}}{(a-1)^2} + \frac{a(a+1)(a^n - 1)}{(a-1)^3};$$

$$(IV) \quad \int n^3 a^n = \frac{n^3 a^{n+1}}{a - 1} - \frac{3 n^2 a^{n+1}}{(a-1)^2} + \frac{3 n (a+1) a^{n+1}}{(a-1)^3} - \frac{a(a^2 + 4a + 1)(a^n - 1)}{(a-1)^4};$$

$$(V) \quad \int n^4 a^n = \frac{n^4 a^{n+1}}{a - 1} - \frac{4 n^3 a^{n+1}}{(a-1)^2} + \frac{6 n^2 (a+1) a^{n+1}}{(a-1)^3} - \frac{4 n (a^2 + 4a + 1) a^{n+1}}{(a-1)^4} + \frac{a(a^3 + 11 a^2 + 11 a + 1)(a^n - 1)}{(a-1)^5};$$

$$(VI) \quad \int n^5 a^n = \frac{n^5 a^{n+1}}{a - 1} - \frac{5 n^4 a^{n+1}}{(a-1)^2} + \frac{10 n^3 (a+1) a^{n+1}}{(a-1)^3} - \frac{10 n^2 (a^2 + 4a + 1) a^{n+1}}{(a-1)^4} + \frac{5 n (a^3 + 11 a^2 + 11 a + 1) a^{n+1}}{(a-1)^5} - \frac{a(a^4 + 26 a^3 + 66 a^2 + 26 a + 1)(a^n - 1)}{(a-1)^6};$$ u. s. w.

§. 366.

1. **Zusatz.** Mit Hülfe der im vorigen §. gefundenen Ausdrücke, ist man im Stande die Summen folgender Reihen zu finden:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \ldots + a^n$$
$$a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + \ldots + n a^n$$
$$a + 4a^2 + 9a^3 + 16a^4 + 25a^5 + 36a^6 + \ldots + n^2 a^n$$
$$a + 8a^2 + 27a^3 + 64a^4 + 125a^5 + \ldots + n^3 a^n$$

u. s. w.

§. 367.

2. **Zusatz.** Man setze durchgängig $-a$ statt a und erwäge, daß
$(-a)^n = + a^n$; $(-a)^{n+1} = - a^{n+1}$ für ein gerades n und
$(-a)^n = - a^n$; $(-a)^{n+1} = + a^{n+1}$ für ein ungerades n wird, so erhält man

$$(I)\ \int(-a)^n = \frac{\pm a^{n+1}+1}{a+1} = \frac{(-1)^n a^{n+1}+1}{a+1} = -\frac{(-a)^{n+1}-1}{a+1};$$

$$(II)\ \int n(-a)^n = \pm\frac{n a^{n+1}}{a+1} + \frac{a(\pm a^n-1)}{(a+1)^2};$$

$$(III)\ \int n^2(-a)^n = \pm\frac{n^2 a^{n+1}}{a+1} \pm \frac{2n a^{n+1}}{(a+1)^2} - \frac{a(a-1)(\pm a^n-1)}{(a+1)^3};$$

u. s. w., wo die oberen Zeichen für ein gerades und die unteren für ein ungerades n gelten.

Es lassen sich hienach die Summen folgender Reihen mit abwechselnden Zeichen angeben:

$$+1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \ldots (-a)^n$$
$$-a + 2a^2 - 3a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 6a^6 - \ldots n(-a)^n$$
$$-a + 4a^2 - 9a^3 + 16a^4 - 25a^5 + 36a^6 - \ldots n^2(-a)^n \text{ u. s. w.}$$

§. 368.

3. Zusatz. Setzt man hingegen $\frac{1}{a}$ statt a, so wird:

$$\int\frac{1}{a^n} = \frac{a^{n+1}-1}{(a-1)a^n}$$
$$\int\frac{n}{a^n} = \frac{a^n-1}{(a-1)^2a^{n-1}} - \frac{n}{(a-1)a^n}$$
$$\int\frac{n^2}{a^n} = \frac{(a+1)(a^n-1)}{(a-1)^3a^{n-1}} - \frac{2n}{(a-1)^2a^{n-1}} - \frac{n^2}{(a-1)a^n}$$

u. s. w.

§. 369.

4. Zusatz. In die zuletzt gefundenen Ausdrücke werde durchgängig $-a$ statt a gesetzt, so erhält man mit Rücksicht auf die Bemerkungen §. 353.

$$\int\frac{1}{(-a)^n} = \frac{a^{n+1}\pm 1}{(a+1)a^n}$$
$$\int\frac{n}{(-a)^n} = \frac{\pm n}{(a+1)a^n} - \frac{a^n\mp 1}{(a+1)^2a^{n-1}}$$
$$\int\frac{n^2}{(-a)^n} = \frac{\pm n^2}{(a+1)a^n} \pm \frac{2n}{(a+1)^2a^{n-1}} + \frac{(a-1)(a^n\mp 1)}{(a+1)^3a^{n-1}}.$$

u. s. w.

Hienach lassen sich die Summen folgender Reihen finden:

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^5} + \ldots \frac{1}{(-a)^n}$$
$$0 - \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} - \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4} - \frac{5}{a^5} + \ldots \frac{n}{(-a)^n}$$
$$0 - \frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} - \frac{9}{a^3} + \frac{16}{a^4} - \frac{25}{a^5} + \ldots \frac{n^2}{(-a)^n}$$

u. s. w.

Setzt man in die oben gefundenen Ausdrücke 1 statt a, so wird

$$\int (-1)^n = \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$\int n(-1)^n = \pm \frac{n}{2} - \frac{1 \mp 1}{4}$$

$$\int n^2 (-1)^n = \pm \frac{n^2 + n}{2} = \pm (n+1)_2$$

u. s. w., wo die oberen Zeichen für ein gerades und die unteren für ein ungerades n gelten.

Hienach erhält man

$$\frac{1 \pm 1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1$$

$$\pm \frac{n}{2} - \frac{1 \mp 1}{4} = 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + \ldots \pm n$$

$$\pm (n+1)_2 = 0 - 1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36 - 49 + 64 - \ldots \pm n^2 \text{ u. s. w.}$$

Die beiden letzten Ausdrücke mit ± 1 multiplizirt und die Reihenglieder in umgekehrter Ordnung geschrieben, geben

$$\frac{n}{2} + \frac{1 \mp 1}{4} = n - (n-1) + (n-2) - (n-3) + (n-4) - (n-5) + \ldots \pm 2 \mp 1$$

$$(n+1)_2 = n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - (n-3)^2 + (n-4)^2 - (n-5)^2 + \ldots \pm 2^2 \mp 1^2.$$

1. **Beispiel.** Die Summe von den ersten hundert aller natürlichen Zahlen zu finden, wenn die ungeraden positiv und die geraden negativ genommen werden.

Hier ist $n = 100$ eine gerade Zahl, also die Summe $+\frac{n}{2} - \frac{1-1}{4} = 50$, daher

$$50 = 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \ldots - 99 + 100,$$

oder wenn man auf beiden Seiten der Gleichung die Zeichen umkehrt

$$-50 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots + 99 - 100,$$

wie verlangt wird.

2. **Beispiel.** Die Summe von den Quadraten der ersten zehn natürlichen Zahlen zu finden, wenn die ungeraden positiv und die geraden negativ genommen werden.

Hier ist $n = 10$, eine gerade Zahl, also die Summe $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{100 + 10}{2} = 55$, daher

$$55 = 0 - 1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36 - 49 + 64 - 81 + 100;$$

oder die Zeichen umgekehrt

$$-55 = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100.$$

3. **Beispiel.** Die Summe der Reihe

$$m_2 - (m-1)_2 + (m-2)_2 - (m-3)_2 + \ldots \pm 2_2$$

zu finden, so ist $m_2 = \frac{m(m-1)}{2}$ daher

$$\begin{array}{ll} +2m_2 & = + m^2 - m \\ -2(m-1)_2 & = -(m-1)^2 + (m-1) \\ +2(m-2)_2 & = +(m-2)^2 - (m-2) \\ \ldots & \ldots \\ \pm 2 \cdot 2_2 & = \pm 2^2 \mp 2. \end{array}$$

oder, wenn S die Summe der gegebenen Reihe bezeichnet

$$2S = \begin{Bmatrix} + m^2 - (m-1)^2 + \ldots \pm 2^2 \\ - [m - (m-1) + \ldots \pm 2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (m+1)_2 \pm 1 \\ - \left(\frac{m}{2} + \frac{1 \mp 1}{4}\right) \pm 1 \end{Bmatrix} \text{ oder}$$

$$2S = (m+1)_2 \pm 1 - \frac{m}{2} - \frac{1 \mp 1}{4} \mp 1 = (m+1)_2 - \frac{m}{2} - \frac{1 \mp 1}{4}, \text{ oder}$$

$$S = \frac{(m+1)^2}{2} - \frac{m}{4} - \frac{1 \mp 1}{8} = \frac{m^2 + m}{4} - \frac{m}{4} - \frac{1 \mp 1}{8} = \frac{m^2}{4} - \frac{1 \mp 1}{8}, \text{ folglich}$$

$$\frac{m^2}{4} - \frac{1 \mp 1}{8} = m_2 - (m-1)_2 + (m-2)_2 - (m-3)_2 + (m-4)_2 - \ldots \mp 3_2 \pm 2_2,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades und die unteren für ein ungerades m gelten.

§. 370.

Bedeutet k irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so erhält man, wenn a^k statt a §. 365. gesetzt wird:

$$\int a^{kn} = \frac{a^{kn+k} - 1}{a^k - 1};$$

$$\int n a^{kn} = \frac{n a^{kn+k}}{a^k - 1} - \frac{a^k (a^{kn} - 1)}{(a^k - 1)^2};$$

$$\int n^2 a^{kn} = \frac{n^2 a^{kn+k}}{a^k - 1} - \frac{2n a^{kn+k}}{(a^k - 1)^2} + \frac{a^k (a^k + 1)(a^{kn} - 1)}{(a^k - 1)^3};$$

u. s. w.

§. 371.

Mit Hülfe der §. 364. und 365. gefundenen allgemeinen Ausdrücke läßt sich aus jedem gegebenen allgemeinen Gliede, welches irgend eine rationale ganze Funkzion vom Stellenzeiger n ist, das zugehörige summirende Glied finden, wenn man nach §. 360. das gegebene allgemeine Glied zertheilt und von den einzelnen Theilen die Summen sucht.

Die folgenden Aufgaben enthalten einige hieher gehörigen Fälle, wobei zu erinnern ist, daß, sowohl in dem allgemeinen als auch in dem summirenden Gliede, nur der Stellenzeiger n als veränderliche Größe behandelt wird, und daß andere sonst veränderliche Größen, wie $x, y, z, \ldots$, hier als beständige Größen behandelt werden.

§. 372.

Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe ist $y_n = a + nb + n^2 c$; man soll das zugehörige Summenglied finden.

Auflösung. Nach §. 362. ist

$$\int y_n = \int a + \int nb + \int n^2 c = a\int 1 + b\int n + c\int n^2.$$

Es ist aber §. 364.

$$\int 1 = n + 1$$

$$\int n = \tfrac{1}{2} n (n+1)$$

$$\int n^2 = \tfrac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$$

daher findet man das Summenglied

$$\int y_n = (n+1)\,[a + \tfrac{1}{2}nb + \tfrac{1}{6}n(2n+1)c].$$

Die dazu gehörige Reihe ist

$$a + (a+b+c) + (a+2b+4c) + (a+3b+9c) + (a+4b+16c) + \ldots + (a+nb+n^2c).$$

§. 373.

Zusatz. Für $c = o$ erhält man die Reihe

$$a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + (a+4b) + \ldots + (a+nb)$$

und das dazu gehörige Summenglied

$$\int(a+nb) = (n+1)(a + \tfrac{1}{2}nb).$$

Für $b = o$ findet man die Reihe

$$a + (a+c) + (a+4c) + (a+9c) + (a+16c) + \ldots + (a+n^2c)$$

und deren Summenglied

$$\int(a+n^2c) = \frac{(n+1)[6a+n(2n+1)c]}{6}.$$

Wäre das allgemeine Glied $y_n = (a+nb)(c-nd)$ gegeben, welchem die Reihe

$$ac + (a+b)(c-d) + (a+2b)(c-2d) + \ldots + (a+nb)(c-nd)$$

entspricht, so erhält man

$$y_n = ac + n(bc-ad) - n^2bd.$$

Vergleicht man dieses allgemeine Glied mit dem §. 372. gegebenen und setzt daselbst ac statt a; $bc-ad$ statt b und $-bd$ statt c, so erhält man das Summenglied

$$\int y_n = (n+1)[ac + \tfrac{1}{2}n(bc-ad) - \tfrac{1}{6}n(2n+1)bd].$$

§. 374.

Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe ist $(a+nb)^3$; man soll das Summenglied derselben finden.

Auflösung. Für das allgemeine Glied erhält man

$$y_n = (a+nb)^3 = a^3 + 3na^2b + 3n^2ab^2 + n^3b^3, \text{ also}$$

$$\int y_n = a^3\int 1 + 3a^2b\int n + 3ab^2\int n^2 + b^3\int n^3.$$

Es ist aber §. 364.

$$\int 1 = n+1$$

$$\int n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

$$\int n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ und}$$

$$\int n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2, \text{ daher findet man das Summenglied}$$

$$\int y_n = \frac{n+1}{4}[4a^3 + 6na^2b + 2n(2n+1)ab^2 + n^2(n+1)b^3].$$

Die zugehörige Reihe ist

$$a^3 + (a+b)^3 + (a+2b)^3 + (a+3b)^3 + (a+4b)^3 + \ldots + (a+nb)^3.$$

§. 375.

Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe sey $y_n = (a+nb+n^2c+n^3d)\,x^n$; man soll das zugehörige Summenglied finden.

Auflösung. Nach §. 360. ist

$$\int y_n = a\int x^n + b\int n x^n + c\int n^2 x^n + d\int n^3 x^n.$$

Es ist aber §. 365.

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\int n x^n = \frac{n x^{n+1}}{x-1} - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

$$\int n^2 x^n = \frac{n^2 x^{n+1}}{x-1} - \frac{2n x^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{x(x+1)(x^n-1)}{(x-1)^3}$$

$$\int n^3 x^n = \frac{n^3 x^{n+1}}{x-1} - \frac{3n^2 x^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{3n(x+1)x^{n+1}}{(x-1)^3} - \frac{x(x^2+4x+1)(x^n-1)}{(x-1)^4}.$$

Hienach findet man $\int y_n$ oder

$$\int (a + nb + n^2 c + n^3 d)\, x^n = \frac{(a+nb+n^2c+n^3d)x^{n+1}-a}{x-1} - \frac{(b+2nc+3n^2d)x^{n+1}-bx}{(x-1)^2}$$
$$+ \frac{(c+3nd)(x+1)x^{n+1}-cx(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{dx(x^2+4x+1)(x^n-1)}{(x-1)^4}.$$

§. 376.

Zusatz. Für $d = 0$ wird

(*I*) $\int (a+nb+n^2c)x^n = \frac{(a+nb+n^2c)x^{n+1}-a}{x-1} - \frac{(b+2nc)x^{n+1}-bx}{(x-1)^2} + \frac{cx(x+1)(x^n-1)}{(x-1)^3}.$

Hierin $c = 0$ gesetzt, giebt

(*II*) $\int (a+nb)x^n = \frac{(a+nb)x^{n+1}-a}{x-1} - \frac{bx(x^n-1)}{(x-1)^2}.$

Hierin $a = b = 1$ gesetzt, giebt

(*III*) $\int (1+n)x^n = \frac{(1+n)x^{n+1}-1}{x-1} - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}.$

Für $a = 1$ und $b = 2$ in (*II*) wird

(*IV*) $\int (1+2n)x^n = \frac{(2n+1)x^{n+1}-1}{x-1} - \frac{2x(x^n-1)}{(x-1)^2}.$

Für $a = 1$ und $b = 0$ in (*II*) wird

(*V*) $\int x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ wie §. 365. (*I*).

Für $x = 2$ in (*II*) wird

(*VI*) $\int (a+nb)2^n = (a+nb)2^{n+1} - 2b(2^n-1) - a.$

Für $-b$ statt b in (*II*) wird

(*VII*) $\int (a-nb)\,x^n = \frac{(a-nb)x^{n+1}-a}{x-1} + \frac{bx(x^n-1)}{(x-1)^2}.$

Durchgängig $\frac{1}{x}$ statt x in (*II*) gesetzt, giebt

(*VIII*) $\int \frac{a+nb}{x^n} = \frac{a(x^{n+1}-1)-nb}{(x-1)x^n} + \frac{b(x^n-1)}{(x-1)^2 x^{n-1}}.$

Durchgängig $-x$ statt x in (II) gesetzt, giebt für eine Reihe mit abwechselnden Zeichen

$$(IX)\quad \int(a+nb)(-x)^n = \frac{\pm(a+nb)x^{n+1}+a}{x+1} + \frac{bx(\pm x^n-1)}{(x+1)^2},$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Hierin $a=1$ und $b=0$ giebt

$$(X)\quad \int(-x)^n = \frac{\pm x^{n+1}+1}{x+1}.$$

Für $x=1$ in (IX) wird

$$(XI)\quad \int(a+nb)(-1)^n = \frac{\pm(a+nb)+a}{2} + \frac{b(\pm1-1)}{4}.$$

Hierin $a=b=1$ gesetzt, giebt

$$(XII)\quad \int(-1)^n(n+1) = \frac{1\pm(2n+3)}{4}.$$

In (I) werde ac statt a, $ad+bc$ statt b und bd statt c gesetzt, so erhält man

$$(XIII)\quad \int(a+nb)(c+nd)x^n$$
$$= \frac{(a+nb)(c+nd)x^{n+1}-ac}{x-1} - \frac{(ad+bc+2nbd)x^{n+1}-(ad+bc)x}{(x-1)^2} + \frac{bdx(x+1)(x^n-1)}{(x-1)^3}.$$

Durchgängig $-b$, $-d$ und $-x$ statt b, d und x gesetzt, giebt

$$(XIV)\quad \int(-1)^n(a-nb)(c-nd)x^n$$
$$= \frac{(a-nb)(c-nd)x(-x)^n+ac}{x+1} - \frac{(ad+bc-2nbd)x(-x)^n-(ad+bc)x}{(x+1)^2} - \frac{bdx(x-1)[(-x)^n-1]}{(x+1)^3},$$

und wenn man hierin $c=a$ und $b=d=x=1$ setzt,

$$(XV)\quad \int(a-n)^2(-1)^n = \frac{a^2+(a-n)^2(-1)^n+a-(a-n)(-1)^n}{2} = (a+1)_2+(-1)^n(a-n)_2.$$

§. 377.

Aufgabe. Aus dem allgemeinen Gliede $\frac{(a+nh)\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}}$ das Summenglied zu finden, wenn α_{r+n} und β_{r+n} Binomialkoeffizienten sind.

Auflösung. In (LXVI) §. 38. werde $\alpha-1$ statt α und $r+n-1$ statt n gesetzt, so erhält man

$$\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} + \frac{(\alpha-1)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}} = \frac{\alpha+\beta-2r-2n+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} \text{ oder}$$

$$\frac{n\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \frac{\alpha+\beta-2r+1}{2}\,\frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{\alpha}{2}\left[\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} + \frac{(\alpha-1)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}}\right].$$

Durchgängig mit h multiplizirt und dazu $\frac{a\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}}$ addirt, giebt

$$\frac{(a+nh)\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \frac{2a+(\alpha+\beta-2r+1)h}{2}\,\frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{\alpha h}{2}\left[\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} + \frac{(\alpha-1)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}}\right] \text{ oder}$$

$$\int\frac{(a+nh)\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \frac{2a+(\alpha+\beta-2r+1)h}{2}\int\frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{\alpha h}{2}\int\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{\alpha h}{2}\int\frac{(\alpha-1)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}}.$$

Nun ist nach §. 40. (*I*)

$$\int \frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\left[\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}}\right].$$

Hienach findet man auch

$$\int \frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-2}\left[\frac{(\alpha-2)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{(\alpha-2)_{r-1}}{\beta_{r-1}}\right]$$

$$\int \frac{(\alpha-1)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-2}\left[\frac{(\alpha-2)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}} - \frac{(\alpha-2)_{r-2}}{\beta_{r-2}}\right].$$

Diese Werthe in den vorstehenden Ausdruck gesetzt, so findet man:

$$\int \frac{(a+nh)\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \frac{2a\alpha+(\alpha+\beta-2r+1)\alpha h}{2(\alpha-\beta-1)}\left[\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} - \frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}}\right]$$
$$- \frac{\alpha(\alpha-1)h}{2(\alpha-\beta-2)}\left[\frac{(\alpha-2)_{r+n}}{\beta_{r+n}} + \frac{(\alpha-2)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}} - \frac{(\alpha-2)_{r-1}}{\beta_{r-1}} - \frac{(\alpha-2)_{r-2}}{\beta_{r-2}}\right],$$

oder weil nach §. 38. (*LXVI*)

$$\frac{(\alpha-2)_{r+n}}{\beta_{r+n}} + \frac{(\alpha-2)_{r+n-1}}{\beta_{r+n-1}} = \frac{\alpha+\beta-2r-2n}{\alpha-1}\,\frac{(\alpha-1)_{r+n}}{\beta_{r+n}} \text{ und}$$

$$\frac{(\alpha-2)_{r-1}}{\beta_{r-1}} + \frac{(\alpha-2)_{r-2}}{\beta_{r-2}} = \frac{\alpha+\beta-2r+2}{\alpha-1}\,\frac{(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}}$$

ist, so erhält man auch nach gehöriger Abkürzung:

$$\int \frac{(a+nh)\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}} = \left[a+\frac{n(\alpha-\beta-1)h-(\beta-r+1)h}{\alpha-\beta-2}\right]\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)_{r+n}}{(\alpha-\beta-1)\beta_{r+n}} - \left[a-\frac{(\alpha-r)h}{\alpha-\beta-2}\right]\frac{\alpha(\alpha-1)_{r-1}}{(\alpha-\beta-1)\beta_{r-1}}.$$

§. 378.

1. **Zusatz.** Für $\beta = -1$ wird $\beta_n = (-1)_n = (-1)^n$ (§. 33.), daher

$$(I)\quad \int (-1)^n(a+nh)\alpha_{r+n} = \pm\left[a+\frac{n\alpha h-(r-2)h}{\alpha-1}\right](\alpha-1)_{r+n} + \left[a-\frac{(\alpha-r)h}{\alpha-1}\right](\alpha-1)_{r-1},$$

oder $\alpha = -1$ gesetzt, giebt

$$(II)\quad \int \frac{(-1)^n(a+nh)}{\beta_{r+n}} = \pm\left[a+\frac{n(\beta+2)h+(\beta+r-1)h}{\beta+3}\right]\frac{r+n+1}{(\beta+2)\beta_{r+n}} + \left[a-\frac{(r+1)h}{\beta+8}\right]\frac{r}{(\beta+2)\beta_{r-1}}.$$

Für $r = o$ entstehen hier und §. 377. unbestimmte Ausdrücke. Weil aber §. 38. (*XIII*) $(\alpha-1)_{r-1} = \frac{r\alpha_r}{\alpha}$; $\frac{r}{\beta_{r-1}} = \frac{\beta+1}{(\beta+1)_r}$ und $\frac{\alpha(\alpha-1)_{r-1}}{\beta_{r-1}} = \frac{(\beta+1)\alpha_r}{(\beta+1)_r}$ ist, so erhält man

$$(III)\quad \int \frac{(a+nh)\alpha_n}{\beta_n} = \left[a+\frac{n(\alpha-\beta-1)h-(\beta-1)h}{\alpha-\beta-2}\right]\frac{\alpha(\alpha-1)_n}{(\alpha-\beta-1)\beta_n} - \left[a-\frac{\alpha h}{\alpha-\beta-2}\right]\frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1}$$

$$(IV)\quad \int (-1)^n(a+nh)\alpha_n = \pm\left[a+\frac{n\alpha h+2h}{\alpha-1}\right](\alpha-1)_n$$

$$(V)\quad \int \frac{(-1)^n(a+nh)}{\beta_n} = \pm\left[a+\frac{n(\beta+2)h+(\beta-1)h}{\beta+3}\right]\frac{n+1}{(\beta+2)\beta_n} + \left[a-\frac{h}{\beta+3}\right]\frac{\beta+1}{\beta+2}$$

$$(VI)\quad \int \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)_n}{(\alpha-\beta-1)\beta_n} - \frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1}$$

(*VII*)

$(VII)\ \int(-1)^n \alpha_n = \pm (\alpha - 1)_n$

$$(VIII)\ \int \frac{(-1)^n}{\beta_n} = \pm \frac{n+1}{(\beta+2)\beta_n} + \frac{\beta+1}{\beta+2}$$

wo durchgängig die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten.

§. 379.

2. Zusatz. Es ist $\frac{1}{(r+n)_n} = \frac{1}{(r+n)_r} = \frac{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ r}{r+n\,.\,r+n-1\ldots\ldots n+1}$, und nach §. 38. (XI)

$$\frac{1}{(\beta-r)_n} = \frac{\beta_r}{(r+n)_n\,\beta_{r+n}} \text{ daher } \frac{1}{(\beta-r)_n} = \frac{r!\,\beta_r}{n+1\ldots\ldots n+r\,.\,\beta_{r+n}}, \text{ also}$$

$$\int \frac{(a+nh)\alpha_n}{(\beta-r)_n} = r!\,\beta_r \int \frac{(a+nh)\,\alpha_n}{n+1\ldots n+r\,.\,\beta_{r+n}} \text{ oder}$$

$$\int \frac{(a+nh)\,\alpha_n}{n+1\ldots n+r\,.\,\beta_{r+n}} = \frac{1}{r!\,\beta_r} \int \frac{(a+nh)\,\alpha_n}{(\beta-r)_n}.$$

Wird hienach in (III) §. 378. $\beta - r$ statt β gesetzt, so findet man

$$(I)\ \int \frac{(\alpha+nh)\,\alpha_n}{n+1\ldots n+r\,.\,\beta_{r+n}}$$

$$= \left[\frac{a}{r!\,\beta_r} + \frac{n(\alpha-\beta+r-1)h-(\beta-r-1)h}{(\alpha-\beta+r-2)\,r!\,\beta_r}\right] \frac{\alpha(\alpha-1)_n}{(\alpha-\beta+r-1)(\beta-r)_n} - \frac{1}{r!\,\beta_r}\left[a - \frac{\alpha h}{\alpha-\beta+r-2}\right] \frac{\beta-r+1}{\alpha-\beta+r-1}.$$

Für $a = 1$ und $h = 0$ wird

$$(II)\ \int \frac{\alpha_n}{(n+1)\ldots(n+r)\beta_{r+n}} = \frac{1}{r!\,\beta_r}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)_n}{(\alpha-\beta+r-1)(\beta-r)_n} - \frac{\beta-r+1}{\alpha-\beta+r-1}\right]$$

Hierin $r = 1$ gesetzt, giebt

$$\int \frac{\alpha_n}{(n+1)\,\beta_{1+n}} = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)_n}{(\alpha-\beta)(\beta-1)_n} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\right]$$

oder $\alpha = -1$ gesetzt, giebt wegen §. 33.

$$(III)\ \int \frac{(-1)^n}{n+1\ldots n+r\,.\,\beta_{r+n}} = \frac{1}{r!\,\beta_r}\left[\pm \frac{n+1}{(\beta-r+2)(\beta-r)_n} + \frac{\beta-r+1}{\beta-r+2}\right]$$

$$\int \frac{(-1)^n}{(n+1)\beta_{1+n}} = \frac{1}{\beta}\left[\pm \frac{n+1}{(\beta+1)(\beta-1)_n} + \frac{\beta}{\beta+1}\right]$$

und wenn man in (II) $\beta = -1$ setzt, so wird

$$(IV)\ \int \frac{(-1)^n \alpha_n}{(n+1)\ldots(n+r)} = \frac{1}{r!\,(\alpha+r)}\left[r \pm \frac{\alpha(\alpha-1)_n}{(r+n)_n}\right]$$

$$\int \frac{(-1)^n \alpha_n}{n+1} = \frac{1}{\alpha+1}\left[1 \pm \frac{\alpha(\alpha-1)_n}{n+1}\right] = \frac{1 \pm \alpha_{n+1}}{\alpha+1}.$$

§. 380.

3. **Zusatz.** Die Reihe, welche dem §. 377. gefundenen Summengliede entspricht, ist

$$= a\,\frac{\alpha_r}{\beta_r} + (a+h)\,\frac{\alpha_{r+1}}{\beta_{r+1}} + (a+2h)\,\frac{\alpha_{r+2}}{\beta_{r+2}} + \ldots + (a+nh)\,\frac{\alpha_{r+n}}{\beta_{r+n}}.$$

In dieser Reihe vertausche man r mit $r-n$, h mit $-h$ und a mit $a+nh$, so wird

$$(a+nh)\,\frac{\alpha_{r-n}}{\beta_{r-n}} + (a+nh-h)\,\frac{\alpha_{r-n+1}}{\beta_{r-n+1}} + \ldots + a\,\frac{\alpha_r}{\beta_r} = \int (a+nh)\,\frac{\alpha_{r-n}}{\beta_{r-n}}.$$

Eben diese Vertauschung werde in dem Summengliede §. 377. vorgenommen, so findet man:

$$(I)\ \int (a+nh)\frac{\alpha_{r-n}}{\beta_{r-n}} = \left[a+\frac{(\beta+r-2n-1)h}{\alpha-\beta-2}\right]\frac{\alpha(\alpha-1)_r}{(\alpha-\beta-1)\beta_r} - \left[a+\frac{(\alpha-\beta)nh+(\alpha-n-r)h}{\alpha-\beta-2}\right]\frac{\alpha(\alpha-1)_{r-n-1}}{(\alpha-\beta-1)\beta_{r-n-1}}.$$

§. 381.

4. **Zusatz.** In §. 38. (XXVII) werde $m = r+n$ und $a = \alpha - r + 1$ gesetzt, so erhält man

$$(-1)^{r+n}\,(\alpha+n)_{r+n} = (-\alpha+r-1)_{r+n} \text{ und } \frac{(\alpha+n)_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}} = \frac{(-\alpha+r-1)_{r+n}}{(-\beta+r-1)_{r+n}}.$$

Nun setze man $-\alpha+r-1$ statt α und $-\beta+r-1$ statt β in §. 377., so erhält man

$$(I)\ \int (a+nh)\,\frac{(\alpha+n)_{r+n}}{(\beta+n)_{r+n}}$$

$$= \left[a+\frac{n(\alpha-\beta+1)h-\beta h}{\alpha-\beta+2}\right]\frac{(\alpha-r+1)(\alpha+n+1)_{r+n}}{(\alpha-\beta+1)(\beta+n)_{r+n}} - \left[a-\frac{(\alpha+1)h}{\alpha-\beta+2}\right]\frac{(\alpha-r+1)\alpha_{r-1}}{(\alpha-\beta+1)(\beta-1)_{r-1}}.$$

Hierin $\beta = r$ giebt

$$(II)\ \int (a+nh)(\alpha+n)_{r+n} = \left[a+\frac{n(\alpha-r+1)-rh}{\alpha-r+2}\right](\alpha+n+1)_{r+n} - \left[a-\frac{(\alpha+1)h}{\alpha-r+2}\right]\alpha_{r-1}$$

und wenn $r = 0$ gesetzt wird

$$(III)\ \int (a+nh)(\alpha+n)_n = \left[a+\frac{n(\alpha+1)h}{\alpha+2}\right](\alpha+n+1)_n.$$

Hierin $a = 1$ und $h = 0$ gesetzt, giebt

$$(IV)\ \int (\alpha+n)_n = (\alpha+n+1)_n.$$

In (I) werde $\alpha = r$ gesetzt, so findet man

$$(V)\ \int \frac{a+nh}{(\beta+n)_{r+n}} = \left[a+\frac{(r+1)h}{\beta-r-2}\right]\frac{r}{(\beta-r-1)(\beta-1)_{r-1}} - \left[a+\frac{n(\beta-r-1)h+\beta h}{\beta-r-2}\right]\frac{r+n+1}{(\beta-r-1)(\beta+n)_{r+n}}.$$

Hierin $r = 0$ gesetzt, giebt $\frac{r}{(\beta-1)_{r-1}} = \frac{0}{0}$. Diesen unbestimmten Ausdruck zu vermeiden, werde $\frac{r}{(\beta-1)_{r-1}} = \frac{\beta}{\beta_r}$ gesetzt, so findet man β für $r = 0$, daher wird:

$$(VI)\ \int \frac{a+nh}{(\beta+n)_n} = \left[a+\frac{h}{\beta-2}\right]\frac{\beta}{\beta-1} - \left[a+\frac{n(\beta-1)h+\beta h}{\beta-2}\right]\frac{n+1}{(\beta-1)(\beta+n)_n}$$

und wenn man $a = 1$ und $h = o$ setzt:

$$(VII)\ \int \frac{1}{(\beta + n)_n} = \frac{\beta}{\beta - 1} - \frac{n+1}{(\beta - 1)(\beta + n)_n} = \frac{\beta}{\beta - 1}\left[1 - \frac{1}{(\beta + n)_n}\right].$$

Nach (XIII) §. 40. wird ferner

$$(VIII)\ \int (\alpha + n)_r = (\alpha + n + 1)_{r+1} - \alpha_{r+1}$$

$$(IX)\ \int (\alpha - n)_r = (\alpha + 1)_{r+1} - (\alpha - n)_{r+1}$$

und für $\alpha = o$ in (VIII) wird

$$(X)\ \int n_r = (n + 1)_{r+1}$$

§. 382.

Nach der eingeführten Bezeichnung lassen sich die Summen mehrerer Reihen auf nachstehende Weise ausdrucken, wenn hier unter $a, b, h, \alpha, \beta, x$ alle mögliche positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen, unter n, m, r aber nur positive ganze Zahlen, und unter e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, oder $e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ verstanden werden. Auch bedeuten hier α_n; β_n; .... Binomialkoeffizienten.

Nach §. 39. (I) ist

$$(I)\ {}^t\!\int \alpha_n x^n = (1 + x)^\alpha.$$

Für $\alpha = -1$ wird (§. 33.)

$${}^t\!\int (-1)^n x^n = \frac{1}{1 + x}, \text{ oder für } x = 1$$

$${}^t\!\int (-1)^n = \tfrac{1}{2}, \text{ oder } -x \text{ statt } x \text{ gesetzt}$$

$${}^t\!\int x^n = \frac{1}{1 - x}, \text{ oder } \frac{bx}{a} \text{ statt } x \text{ gesetzt}$$

$${}^t\!\int \frac{b^n x^n}{a^n} = \frac{a}{a - bx}, \text{ und } -x \text{ statt } x \text{ gesetzt}$$

$${}^t\!\int (-1)^n \frac{b^n x^n}{a^n} = \frac{a}{a + bx}$$

$$(II)\ {}^t\!\int \alpha_n = 2^\alpha$$

$$(III)\ {}^t\!\int (-1)^n \alpha_n = o$$

$$(IV)\ {}^t\!\int \alpha_{2n} x^{2n} = \frac{(1 + x)^\alpha + (1 - x)^\alpha}{2}$$

$${}^t\!\int \alpha_{2n} = 2^{\alpha - 1}$$

$$(V)\ {}^t\!\int \alpha_{2n+1} x^{2n+1} = \frac{(1 + x)^\alpha - (1 - x)^\alpha}{2}$$

$${}^t\!\int \alpha_{2n+1} = 2^{\alpha - 1}$$

$$(VI)\ {}^t\!\int (n + 1)(n + 2)\,\alpha_{n+2} x^{n+2} = \alpha(\alpha - 1)\,x^2\,(1 + x)^{\alpha - 2}$$

$${}^t\!\int (n + 1)(n + 2)\,\alpha_{n+2} = \alpha(\alpha - 1)\,2^{\alpha - 2}$$

$${}^t\!\int (-1)^n (n + 1)(n + 2)\,\alpha_{n+2} = o$$

$$(VII)\ {}^t\!\int (n + 1)(n + 2)(n + 3)\,\alpha_{n+3} x^n = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1 + x)^{\alpha - 3}$$

$$(VIII)\ {}^t\!\int (n + 1)^2\,\alpha_{n+1} x^n = \alpha(\alpha x + 1)(1 + x)^{\alpha - 2}$$

$$(IX)\ {}^t\!\int (n + 1)^3\,\alpha_{n+1} x^n = \alpha(\alpha^2 x^2 + 3\alpha x - x + 1)(1 + x)^{\alpha - 3}$$

(X) $^t\!\int(-1)^n(n+1)^r\alpha_{n+1}=0$

(XI) $^t\!\int(a+nh)\alpha_n x^n=(a+ax+\alpha hx)(1+x)^{\alpha-1}$.

Für $a=h=1$ wird

$$^t\!\int(n+1)\alpha_n x^n=(1+x+\alpha x)(1+x)^{\alpha-1}$$

(XII) $^t\!\int(a+nh)(\alpha+n-1)_n x^n=\frac{a-ax+\alpha hx}{(1-x)^{\alpha+1}}$

(XIII) $$^t\!\int\frac{\alpha_n x^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}=\frac{(1+x)^{\alpha+r}-1-(\alpha+r)_1x-(\alpha+r)_2x^2-\dots-(\alpha+r)_{r-1}x^{r-1}}{\alpha+1.\alpha+2.\alpha+3\dots\alpha+r.x^r}$$

$$^t\!\int\frac{\alpha_n x^n}{n+1}=\frac{(1+x)^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)x}$$

$$^t\!\int\frac{\alpha_n x^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{(1+x)^{\alpha+2}-1-(\alpha+2)x}{(\alpha+1)(\alpha+2)x^2}$$

$$^t\!\int\frac{\alpha_n x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{(1+x)^{\alpha+3}-1-(\alpha+3)x-(\alpha+3)_2x^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)x^3}$$

(XIV) $^t\!\int\frac{n+1.n+2.n+3\dots2n}{1\,.\,3\,.\,5\dots2n-1}\alpha_n x^n=(1+2x)^\alpha$

(XV) $^t\!\int\frac{1\,.\,3\,.\,5\dots2n-1}{n+1.n+2.n+3\dots2n}\alpha_n x^n=\left(1+\frac{x}{2}\right)^\alpha$

(XVI) $^t\!\int(\alpha+n-1)_n\left(\frac{x-1}{x}\right)^n=x^\alpha$

(XVII) $\int\frac{1}{(\alpha+n)_r}=\frac{r}{r-1}\left[\frac{1}{(\alpha-1)_{r-1}}-\frac{1}{(\alpha+n)_{r-1}}\right]$ (§. 40. *XIV.*)

$$\int\frac{1}{(\alpha-n)_r}=\frac{r}{r-1}\left[\frac{1}{(\alpha-n-1)_{r-1}}-\frac{1}{\alpha_{r-1}}\right]$$

(XVIII) $\int(\alpha+nh)(\alpha+n)_r$

$=(a-\alpha h-h)[(\alpha+n+1)_{r+1}-\alpha_{r+1}]+(r+1)h[(\alpha+n+2)_{r+2}-(\alpha+1)_{r+2}]$ (§. 40. *XV.*)

(XIX) $^t\!\int(r+n)_r\,\alpha_{2r+2n+1}=(\alpha-r-1)_r2^{\alpha-2r-1}$ (§. 40. *XVII.*)

(XX) $\int(r+n)_r(\alpha+r+n)_{r+n}=(\alpha+r)_r(\alpha+r+n+1)_n$ (§. 41. *XXIX.*)

(XXI) $\int(-1)^n(r+n)_r\alpha_{r+n}=\pm\alpha_r(\alpha-r-1)_n$ (§. 41. *XXX.*)

(XXII) $^t\!\int\frac{x^n}{(n+1)!}=\frac{e^x-1}{x}$ (§. 162. *VI.*) und

$$^t\!\int\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

Für $x=1$ wird

$$^t\!\int\frac{1}{(n+1)!}=e-1 \text{ und } ^t\!\int\frac{1}{n!}=e,$$

oder $-x$ statt x gesetzt

$$^t\!\int\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}=\frac{1-e^{-x}}{x} \text{ und } ^t\!\int\frac{(-1)^n x^n}{n!}=e^{-x}$$

$$^t\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{e} \text{ und } ^t\!\int\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e}$$

$$(XXIII)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n x^n}{n+1}=\frac{lgn\,(1+x)}{x}$$ (§. 164. IV.)

$$(XXIV)\ {}^{t}\!\int\frac{x^n}{n+1}=\frac{-lgn\,(1-x)}{x}$$ (§. 164. V.)

$$(XXV)\ {}^{t}\!\int\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\tfrac{1}{2}\,lgn\,\frac{1+x}{1-x}$$ (§. 164. VI.)

$$(XXVI)\ {}^{t}\!\int\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$ (§. 169. VII.)

$$(XXVII)\ {}^{t}\!\int\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$ (§. 169. IX.)

$$(XXVIII)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$ (§. 168. I.)

$$(XXIX)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$$ (§. 168. II.)

$$(XXX)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n}{n+1}=lgn\,2$$ (§. 164. XIII.)

$$(XXXI)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}=2\,lgn\,2-1$$ (§. 164. XIV.)

$$(XXXII)\ {}^{t}\!\int\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=lgn\,2$$ (§. 164. XV.)

$$(XXXIII)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=Arc\,tg\,x$$ (§. 171. II.)

$$(XXXIV)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n}{2n+1}=\tfrac{1}{4}\,\pi$$ (§. 172.)

$$(XXXV)\ {}^{t}\!\int\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}=\tfrac{1}{8}\,\pi$$ (§. 172.)

$$(XXXVI)\ {}^{t}\!\int\frac{1.3.5\ldots.2n+1}{2.4.6\ldots.2n+2}\cdot\frac{x^{2n+3}}{2n+3}=Arc\,\sin x-x$$ (§. 174. I.)

Wird (XXX) durch 2 dividirt und von (XXXIV) abgezogen, so findet man

$$(XXXVII)\ {}^{t}\!\int\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,lgn\,2.$$

§. 383.

Jede Reihe

$$fx=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots.+A_nx^n$$

deren Summe fx bekannt ist, wenn f das Funkzionenzeichen bedeutet, läßt sich in eine andere von der Form

$$Ax^\alpha;\ A_1x^{\alpha+\beta};\ A_2x^{\alpha+2\beta};\ A_3x^{\alpha+3\beta};\ \ldots.\ A_nx^{\alpha+n\beta}$$

durch folgendes Verfahren verwandeln.

Man setze in die gegebene Reihe und in ihr Summenglied, x^β statt x so wird

$$f(x^\beta)=A+A_1x^\beta+A_2x^{2\beta}+A_3x^{3\beta}+\ldots.+A_nx^{n\beta}.$$

Durchgängig mit x^α multiplizirt, giebt

$$x^\alpha f(x^\beta) = Ax^\alpha + A_1 x^{\alpha+\beta} + A_2 x^{\alpha+2\beta} + A_3 x^{\alpha+3\beta} + \ldots + A_n x^{\alpha+n\beta}.$$

Ist daher

(I) $\int A_n x^n = fx$ gegeben, so findet man daraus

(II) $\int A_n x^{\alpha+n\beta} = x^\alpha f(x^\beta)$.

Dieser Ausdruck gilt eben so für unendliche Reihen.

So ist z. B. §. 365. (II)

$$\int n x^n = \frac{n x^{n+1}}{x-1} - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

daher wird auch

$$\int n x^{\alpha+n\beta} = \frac{n x^{\alpha+n\beta+\beta}}{x^\beta - 1} - \frac{x^{\alpha+\beta}(x^{n\beta}-1)}{(x^\beta-1)^2}.$$

§. 384.

In einer jeden Reihe von der Form

$$S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

giebt es einen Werth für x, welcher jedes einzelne Glied dieser Reihe, wenn solches ohne Rücksicht auf das Vorzeichen positiv genommen wird, größer macht, als die Summe aller nachfolgenden Glieder.

Kann man diesen Satz für das unbestimmte Glied $A_n x^n$ beweisen, so gilt er auch für jedes andere. Man setze daher

$$S' = A_{n+1} x^{n+1} + A_{n+2} x^{n+2} + \ldots + A_{n+r} x^{n+r} + \ldots$$

Wäre A_{n+r} der größte unter allen Koeffizienten dieser Reihe, so wird

$S' < A_{n+r} x^{n+1} + A_{n+r} x^{n+2} + A_{n+r} x^{n+3} + \ldots$ oder

$S' < A_{n+r} x^{n+1} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$, oder wegen

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ erhält man auch

$S' < \frac{A_{n+r} x^{n+1}}{1-x}$ oder $\frac{S'}{A_n x^n} < \frac{A_{n+r} x}{A_n(1-x)}$, wenn nach §. 15. vorausgesetzt wird, daß $A_n x^n$ positiv ist, also dieses Glied, wenn es negativ seyn sollte, positiv genommen werden muß.

Setzt man nun $x = \frac{A_n}{A_n + A_{n+r}}$, so wird $\frac{x}{1-x} = \frac{A_n}{A_{n+r}}$, daher

$$\frac{S'}{A_n x^n} < 1 \text{ also } S' < A_n x^n,$$

oder es giebt, wenn $A_n x^n$ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, nur als positive Größe angenommen wird, einen Werth für x, durch welchen

$A_n x^n > A_{n+1} x^{n+1} + A_{n+2} x^{n+2} + A_{n+3} x^{n+3} + \ldots$ wird.

Hierbei ist übrigens vorausgesetzt, daß keiner der Koeffizienten unendlich groß wird.

§. 385.

Durch angemessene Veränderungen in bekannten allgemeinen Ausdrücken, läßt sich sehr oft die Summe mehrerer Reihen finden.

So ist $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+x} + \frac{b+x}{a+x} \cdot \frac{1}{a-b}$ [I]

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Brüche auf einerlei Nenner bringt. Hierin nach einander $c, d, e, \ldots$ statt x gesetzt, giebt

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{a+c} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{a+c}\left(\frac{1}{a+d} + \frac{b+d}{a+d} \cdot \frac{1}{a-b}\right)$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{(a+c)(a+d)} + \frac{b+d}{a+d}\left(\frac{1}{a+e} + \frac{b+e}{a+e} \cdot \frac{1}{a-b}\right)$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{(a+c)(a+d)} + \frac{b+d}{(a+d)(a+e)} + \frac{b+e}{a+e}\left(\frac{1}{a+f} + \frac{b+f}{a+f} \cdot \frac{1}{a-b}\right)$$

und wenn man auf diese Art weiter fort geht

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{(a+c)(a+d)} + \frac{b+d}{(a+d)(a+e)} + \frac{b+e}{(a+e)(a+f)} + \frac{b+f}{(a+f)(a+g)} + \ldots\ldots$$

wo $a, b, c, d, e, \ldots$ ganz willkührlich anzunehmende Größen bedeuten.

Hienach wird für $a=2,\ b=1,\ c=2,\ d=3,\ e=4,\ f=5, \ldots\ldots$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{4.5} + \frac{4}{5.6} + \frac{5}{6.7} + \frac{6}{7.8} + \frac{7}{8.9} + \frac{8}{9.10} + \ldots\ldots$$

Hiebei ist zu bemerken, daß man bei unbegrenzten Reihen nur dann durch Zusammenzählen der einzelnen Glieder einen annähernden Werth für die ganze Summe der Reihe findet, wenn die Glieder der Reihe abnehmend sind (§. 356.).

Will man die Reihe bei irgend einem Gliede abbrechen, so darf man nur den Ergänzungsbruch suchen, welcher dem letzten Gliede zugehört und denselben vom erzeugenden Bruch abziehen, so giebt dieser Rest die Summe sämmtlicher Glieder der Reihe.

Angenommen, daß die vorstehende Reihe bei dem Gliede $\frac{b+f}{(a+f)(a+g)}$ abbrechen soll, so wird

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{(a+c)(a+d)} + \ldots + \frac{b+f}{a+f}\left(\frac{1}{a+g} + \frac{b+g}{a+g} \cdot \frac{1}{a-b}\right), \text{ daher}$$

$$\frac{1}{a-b} - \frac{(b+f)(b+g)}{(a+f)(a+g)(a-b)} = \frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{(a+c)(a+d)} + \frac{b+d}{(a+d)(a+e)} + \frac{b+e}{(a+e)(a+f)} + \frac{b+f}{(a+f)(a+g)}.$$

Andere Reihen entstehen, wenn in [I] $x=0$ gesetzt wird, dann erhält man

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a-b},$$

daher findet man durch ein dem Vorhergehenden ähnliches Verfahren, mit Anwendung von [I],

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{b+c}{a+c} \cdot \frac{1}{a-b}\right)$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+c)} + \frac{b(b+c)}{a(a+c)} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+c)} + \frac{b(b+c)}{a(a+c)}\left(\frac{1}{a+d} + \frac{b+d}{a+d} \cdot \frac{1}{a-b}\right)$$

und wenn man auf diese Art fort fährt

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+c)} + \frac{b(b+c)}{a(a+c)(a+d)} + \frac{b(b+c)(b+d)}{a(a+c)(a+d)(a+e)} + \frac{b(b+c)(b+d)(b+e)}{a(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)}$$
$$+ \frac{b(b+c)(b+d)(b+e)(b+f)}{a(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)(a+g)} + \ldots\ldots$$

Wird z. B. $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 12$, $f = 16$, ... gesetzt, so findet man

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5.9} + \frac{3.7}{5.9.13} + \frac{3.7.11}{5.9.13.17} + \frac{3.7.11.15}{5.9.13.17.21} + \ldots\ldots$$

Auch läßt sich wie im Vorhergehenden die Summe einer bestimmten Anzahl Glieder finden. Durch Anwendung des Ausdrucks

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)}$$

und anderer, lassen sich noch mehrere dergleichen Reihen bilden. Dies Verfahren hat zuerst *Nicole* in den *Mémoires de l'acad. de Paris, année* 1727. *p.* 361 *etc.* angewandt.

Noch andere Verfahrungsarten, wie mittelst bekannter allgemeiner Ausdrücke die Summen von Reihen gefunden werden können, sind in den folgenden §§. enthalten.

§. 386.

Ein anderes Verfahren, durch welches die Summe mehrerer Reihen gefunden werden kann, besteht darin, daß man von einer willkührlich angenommenen Reihe, durch angemessene Abänderungen derselben, die unbekannte Summe wegzuschaffen sucht. Nachstehende Beispiele dienen zur Erläuterung.

1. **Beispiel.** Es sey S die unbekannte Summe der Reihe

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \ldots + \frac{1}{a+nb-b} + \frac{1}{a+nb}, \text{ also}$$
$$S - \frac{1}{a} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots\ldots + \frac{1}{a+nb},$$

so wird, wenn man diese Reihe von der darüber stehenden abzieht,

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{b}{(a+nb-b)(a+nb)} + \frac{1}{a+nb}.$$

Nun ist $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nb} = \frac{nb}{a(a+nb)}$, folglich wird

$$\frac{n}{a(a+nb)} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots + \frac{1}{(a+nb-b)(a+nb)}.$$

2. **Beispiel.** Man setze

$$S = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+3b)(a+4b)} + \ldots\ldots \text{ also}$$
$$S - \frac{1}{a(a+b)} = \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+3b)(a+4b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} + \ldots\ldots$$

und ziehe die untere von der oberen Reihe ab, so wird

$$\frac{1}{a(a+b)} = \frac{2b}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{2b}{(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \frac{2b}{(a+2b)(a+3b)(a+4b)} + \ldots\ldots \text{ folglich}$$
$$\frac{1}{2ab(a+b)} = \frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)(a+4b)} + \ldots\ldots$$

Für

Für $a = b = 1$ wird

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots\dots$$

3. **Beispiel.** Für

$$S = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a(a+h)}{b(b+h)} + \frac{a(a+h)(a+2h)}{b(b+h)(b+2h)} + \dots\dots \text{ wird}$$

$$S - 1 = \frac{a(a+h)}{b(b+h)} + \frac{a(a+h)(a+2h)}{b(b+h)(b+2h)} + \frac{a(a+h)(a+2h)(a+3h)}{b(b+h)(b+2h)(b+3h)} + \dots$$

und wenn man die untere Reihe von der obern abzieht:

$$1 = \frac{b-a}{b} + \frac{a(b-a)}{b(b+h)} + \frac{a(a+h)(b-a)}{b(b+h)(b+2h)} + \frac{a(a+h)(a+2h)(b-a)}{b(b+h)(b+2h)(b+3h)} + \dots \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b(b+h)} + \frac{a(a+h)}{b(b+h)(b+2h)} + \frac{a(a+h)(a+2h)}{b(b+h)(b+2h)(b+3h)} + \dots\dots$$

4. **Beispiel.** Man setze

$$S = \frac{1}{a} + \frac{x}{a+b} + \frac{x^2}{a+2b} + \frac{x^3}{a+3b} + \frac{x^4}{a+4b} + \dots \text{ so wird}$$

$$x^2 S = \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^4}{a+2b} + \dots\dots \text{ und}$$

$$-S = -\frac{1}{a} - \frac{x}{a+b} - \frac{x^2}{a+2b} - \frac{x^3}{a+3b} - \frac{x^4}{a+4b} + \dots\dots$$

die beiden letzten Reihen addirt, giebt

$$(x^2-1)S = -\frac{1}{a} - \frac{x}{a+b} + \frac{2bx^2}{a(a+2b)} + \frac{2bx^3}{(a+b)(a+3b)} + \frac{2bx^4}{(a+2b)(a+4b)} + \dots\dots [I]$$

Hierin $x = 1$ gesetzt, so verschwindet S und man findet

$$\frac{2a+b}{2a(a+b)} = \frac{1}{a(a+2b)} + \frac{1}{(a+b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+4b)} + \frac{1}{(a+3b)(a+5b)} + \dots$$

Für $a = b = 1$ wird

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{6.8} + \dots$$

und für $a = 1$ und $b = 4$ erhält man

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{1.9} + \frac{1}{5.13} + \frac{1}{9.17} + \frac{1}{13.21} + \frac{1}{17.25} + \frac{1}{21.29} + \dots\dots$$

Wird hingegen in $[I]$ $x = -1$ gesetzt, so findet man:

$$\frac{1}{2a(a+b)} = \frac{1}{a(a+2b)} - \frac{1}{(a+b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+4b)} - \frac{1}{(a+3b)(a+5b)} + \dots$$

und für $a = b = 1$ wird

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{4.6} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{6.8} + \dots\dots$$

Die vorstehenden Summen lassen sich auch auf folgende Weise ausdrucken

$$\overset{1}{\int} \frac{1}{(a+nb)(a+nb+2b)} = \frac{2a+b}{2a(a+b)}$$

$$\overset{1}{\int} \frac{(-1)^n}{(a+nb)(a+nb+2b)} = \frac{1}{2a(a+b)}.$$

§. 387.

Dadurch, daß man die Summe einer gegebenen Reihe als bekannt voraussetzt und durch Abänderungen der gegebnen Reihe einen Ausdruck zwischen bekannten Größen und dieser unbekannten Summe zu erlangen sucht, lassen sich ebenfalls mehrere Reihen summiren, wovon hier einige zur Erläuterung dieses Verfahrens angeführt werden sollen.

Wäre S die unbekannte Summe von der Reihe

$$S = x^{\alpha} + x^{\alpha+\beta} + x^{\alpha+2\beta} + x^{\alpha+3\beta} + \ldots + x^{\alpha+n\beta}, \text{ so wird}$$

$$S - x^{\alpha} + x^{\alpha+n\beta+\beta} = x^{\alpha+\beta} + x^{\alpha+2\beta} + \ldots + x^{\alpha+n\beta} + x^{\alpha+n\beta+\beta}$$

$$= x^{\beta}(x^{\alpha} + x^{\alpha+\beta} + \ldots + x^{\alpha+n\beta}), \text{ oder}$$

$$S - x^{\alpha} + x^{\alpha+n\beta+\beta} = x^{\beta} S, \text{ folglich}$$

$$S = \int x^{\alpha+n\beta} = \frac{x^{\alpha+n\beta+\beta} - x^{\alpha}}{x^{\beta} - 1}.$$

Das vorstehende Verfahren unterscheidet sich von dem vorhergegangenen §. 386. dadurch, daß hier die Summe der willkührlich angenommenen Reihe gefunden wird.

§. 388.

Nach §. 146. [34] ist

$$2 \sin\varphi \cos\beta = \sin(\varphi + \beta) + \sin(\varphi - \beta).$$

Hierin nach einander α; $\alpha + \beta$; $\alpha + 2\beta$; .... statt φ gesetzt und hiernächst die aufeinander folgenden Gleichungen mit x, x^2, x^3 .... multiplizirt, giebt

$$\begin{aligned}
2 \sin\alpha \cos\beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\
2x \sin(\alpha + \beta) \cos\beta &= x \sin(\alpha + 2\beta) + x \sin\alpha \\
2x^2 \sin(\alpha + 2\beta) \cos\beta &= x^2 \sin(\alpha + 3\beta) + x^2 \sin(\alpha + \beta) \\
2x^3 \sin(\alpha + 3\beta) \cos\beta &= x^3 \sin(\alpha + 4\beta) + x^3 \sin(\alpha + 2\beta) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
2x^{n-1} \sin(\alpha + n\beta - \beta) \cos\beta &= x^{n-1} \sin(\alpha + n\beta) + x^{n-1} \sin(\alpha + n\beta - 2\beta) \\
2x^{n} \sin(\alpha + n\beta) \cos\beta &= x^{n} \sin(\alpha + n\beta + \beta) + x^{n} \sin(\alpha + n\beta - \beta) \\
2x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta + \beta) \cos\beta &= x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta + 2\beta) + x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta).
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung setze man:

$$S = \int x^{n} \sin(\alpha + n\beta),$$

so findet man für die Summe der Glieder auf der linken Seite des Gleichheitszeichens

$$2S \cos\beta + 2x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta + \beta) \cos\beta,$$

und für die Summe der Glieder auf der rechten Seite

$$\frac{1}{x}(S - \sin\alpha) + x^{n} \sin(\alpha + n\beta + \beta) + x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta + 2\beta) + \sin(\alpha - \beta) + xS.$$

Diesen Ausdruck dem vorstehenden gleich gesetzt und daraus S entwickelt, so findet man, weil §. 146. [34]

$$2 \sin(\alpha + n\beta + \beta) \cos\beta - \sin(\alpha + n\beta + 2\beta) = \sin(\alpha + n\beta) \text{ ist,}$$

$$\text{(I)} \quad \int x^{n} \sin(\alpha + n\beta) = \frac{x^{n+2} \sin(\alpha + n\beta) - x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta + \beta) + \sin\alpha - x \sin(\alpha - \beta)}{x^2 - 2x \cos\beta + 1}.$$

Hierin $-x$ statt x gesetzt, giebt wegen $(-x)^n = (-1)^n x^n$

$$(II)\quad \int(-1)^n x^n \sin(\alpha+n\beta) = \frac{\pm x^{n+2}\sin(\alpha+n\beta) \pm x^{n+1}\sin(\alpha+n\beta+\beta) + \sin\alpha + x\sin(\alpha-\beta)}{x^2+2x\cos\beta+1}.$$

In (I) werde $x=1$ gesetzt, so findet man nach §. 146. wegen

$$\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta;\ [38]$$

$$\sin(\alpha+n\beta) - \sin(\alpha+n\beta+\beta) = -2\cos(\alpha+n\beta+\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta;\ [38]$$

$$\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta) - \cos(\alpha+n\beta+\tfrac{1}{2}\beta) = 2\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}n\beta)\sin\frac{n+1}{2}\beta;\ [40]\ \text{und}$$

$$1-\cos\beta = 2(\sin\tfrac{1}{2}\beta)^2;\ [43]$$

$$(III)\quad \int\sin(\alpha+n\beta) = \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}n\beta)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Hierin $\beta=\alpha$ gesetzt, giebt

$$(IV)\quad \int\sin(n+1)\alpha = \frac{\sin\frac{n+2}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Sucht man die ganze Summe der Reihe (I), so denke man sich die zuerst gefundenen unter einander stehenden Glieder ohne Ende fortgesetzt, bezeichne ${}^{1}\!\int x^n\sin(\alpha+n\beta)$ durch S' und addire die unter einander stehenden Glieder, so erhält man

$$2S'\cos\beta = \frac{1}{x}(S'-\sin\alpha) + \sin(\alpha-\beta) + xS',$$

und hieraus S' oder

$$(V)\quad {}^{1}\!\int x^n\sin(\alpha+n\beta) = \frac{\sin\alpha - x\sin(\alpha-\beta)}{x^2-2x\cos\beta+1}.$$

Für $x=1$ wird $S' = \dfrac{\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)}{2(1-\cos\beta)}$, oder wegen §. 146. [38. 43.]

$$(VI)\quad {}^{1}\!\int\sin(\alpha+n\beta) = \frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta},$$

und für $\beta=\alpha$

$$(VII)\quad {}^{1}\!\int\sin(n+1)\alpha = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\alpha.$$

In (V) werde $x=-1$ gesetzt, so erhält man wegen §. 146. [37. 44.]

$$(VIII)\quad {}^{1}\!\int(-1)^n\sin(\alpha+n\beta) = \frac{\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\cos\frac{1}{2}\beta},$$

und für $\beta=\alpha$

$$(IX)\quad {}^{1}\!\int(-1)^n\sin(n+1)\alpha = \tfrac{1}{2}\,tg\,\tfrac{1}{2}\alpha.$$

In (VI) und (VIII) werde $\beta=2\alpha$ gesetzt, so erhält man

$$(X)\quad {}^{1}\!\int\sin(1+2n)\alpha = \frac{1}{2\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\,cosec\,\alpha$$

$$(XI)\quad {}^{1}\!\int(-1)^n\sin(1+2n)\alpha = 0.$$

§. 389.

Zusatz. Setzt man $\frac{1}{2}\pi+\alpha$ statt α in (I), so wird wegen §. 146. [12]

$$(I)\quad \int x^n\cos(\alpha+n\beta) = \frac{x^{n+2}\cos(\alpha+n\beta) - x^{n+1}\cos(\alpha+n\beta+\beta) + \cos\alpha - x\cos(\alpha-\beta)}{x^2-2x\cos\beta+1}.$$

Hierin $x = 1$ giebt

$$(II)\quad \int \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2} n\beta) \sin \frac{n+1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta},$$

und für $\beta = \alpha$

$$(III)\quad \int \cos(n+1)\alpha = \frac{\cos \frac{n+2}{2}\alpha \,.\, \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

Eben so findet man für $\alpha = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ aus (V) wegen §. 146. [12]

$$(IV)\quad {}^{1}\!\int x^n \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\cos\alpha - x\cos(\alpha - \beta)}{x^2 - 2x\cos\beta + 1}.$$

Für $x = 1$ wird hieraus wegen §. 146. [40. 43.]

$$(V)\quad {}^{1}\!\int \cos(\alpha + n\beta) = \frac{-\sin(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta},$$

und für $\beta = \alpha$

$$(VI)\quad {}^{1}\!\int \cos(n+1)\alpha = -\tfrac{1}{2}.$$

In (IV) werde $x = -1$ gesetzt, dies giebt wegen §. 146. [39. 44.]

$$(VII)\quad {}^{1}\!\int (-1)^n \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{2\cos\frac{1}{2}\beta},$$

und für $\beta = \alpha$

$$(VIII)\quad {}^{1}\!\int (-1)^n \cos(n+1)\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

In (V) und (VII) werde $\beta = 2\alpha$ gesetzt, so erhält man

$$(IX)\quad {}^{1}\!\int \cos(1+2n)\alpha = 0$$

$$(X)\quad {}^{1}\!\int (-1)^n \cos(1+2n)\alpha = \frac{1}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\sec\alpha.$$

§. 390.

Bezeichnet N_n irgend eine Funkzion von der veränderlichen Größe n, und C eine beständige von n unabhängige Größe, so sey für irgend eine Reihe das Summenglied, oder

$$\int y_n = N_n + C, \quad [I]$$

so erhält man hieraus §. 352.

$${}^{n-1}\!\int y_n = N_{n-1} + C,$$

daher das allgemeine Glied der Reihe §. 358., oder

$$y_n = \int y_n - {}^{n-1}\!\int y_n = N_n - N_{n-1}. \quad [II]$$

In $[I]$ werde $n = 0$ gesetzt, so ist §. 352. (I)

$${}^{0}\!\int y_n = y = N + C,$$

und, wenn in $[II]$ $n = 0$ gesetzt wird,

$$y = N - N_{-1}, \text{ folglich}$$

$$C = -N_{-1}, \text{ daher nach } [I]$$

$$\int y_n = N_n - N_{-1}.$$

Wenn daher das allgemeine Glied einer Reihe, oder

$$y_n = N_n - N_{n-1}$$

gegeben ist, so findet man daraus das Summenglied, oder

$$\int y_n = N_n - N_{-1}, \text{ oder es ist}$$
$$\int (N_n - N_{n-1}) = N_n - N_{-1},$$

wo N_n jede mögliche Funkzion von n seyn kann. Uebrigens wird bemerkt, daß N_{n-1} oder N_{-1} aus N_n gefunden wird, wenn man in diesen Ausdruck $n - 1$ oder $- 1$ statt n setzt.

Von den beiden Gliedern, aus welchen hier das allgemeine Glied besteht, soll N_n der erste und N_{n-1} der zweite Theil des allgemeinen Gliedes heißen.

Dadurch, daß man verschiedene ganz willkührliche Funkzionen von n als erste Theile des allgemeinen Gliedes einer Reihe annimmt, kann man zur Summirung mehrerer sehr wichtigen Reihen gelangen.

Bei der Auswahl dieser Funkzionen kommt es vorzüglich darauf an, daß $N_n - N_{n-1}$ einen zusammenhängenden angemessenen Ausdruck bildet.

§. 391.

Der erste Theil des allgemeinen Gliedes einer Reihe sey $N_n = \frac{(n+1)\alpha + (n+1)^2\beta}{a + (n+1)b}$, so wird $N_{n-1} = \frac{n\alpha + n^2\beta}{a + nb}$ und $N_{-1} = 0$, daher

$$N_n - N_{n-1} = \frac{a(\alpha + \beta) + n(2a + b)\beta + n^2 b\beta}{(a + nb)(a + nb + b)}, \text{ folglich}$$
$$\int \frac{a(\alpha + \beta) + n(2a + b)\beta + n^2 b\beta}{(a + nb)(a + nb + b)} = \frac{(n+1)\alpha + (n+1)^2\beta}{a + nb + b}$$

und man kann hieraus nach den verschiedenen Werthen welche α, β, a, b erhalten können, sehr verschiedene Reihen bilden.

§. 392.

1. Zusatz. Für $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ wird

$$\int \frac{(2n+1)a + n(n+1)b}{(a + nb)(a + nb + b)} = \frac{(n+1)^2}{a + nb + b}$$

die entsprechende Reihe ist:

$$\frac{1.a}{a(a+b)} + \frac{3a + 2b}{(a+b)(a+2b)} + \frac{5a + 6b}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots + \frac{(2n+1)a + n(n+1)b}{(a+nb)(a+nb+b)}.$$

§. 393.

2. Zusatz. Für $\alpha = -1$ und $\beta = 1$ wird

$$\int \frac{n(2a + nb + b)}{(a + nb)(a + nb + b)} = \frac{n(n+1)}{a + nb + b}.$$

Die zugehörige Reihe ist

$$\frac{1(2a+2b)}{(a+b)(a+2b)} + \frac{2(2a+3b)}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{3(2a+4b)}{(a+3b)(a+4b)} + \ldots + \frac{n(2a+nb+b)}{(a+nb)(a+nb+b)}.$$

Wird $a = b = 1$ gesetzt, so erhält man

$$\int \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2} = \frac{1.4}{2.3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{3.6}{4.5} + \frac{4.7}{5.6} + \frac{5.8}{6.7} + \ldots + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)},$$

und wenn man $a = 2$ und $b = 1$ setzt,

$$\int \frac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+5)}{n+3} = \frac{1.6}{3.4} + \frac{2.7}{4.5} + \frac{3.8}{5.6} + \frac{4.9}{6.7} + \frac{5.10}{7.8} + \ldots + \frac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)},$$

oder $a = 1$ und $b = 2$, giebt

$$\int \frac{n(n+4)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2n+3} = \frac{1.5}{3.5} + \frac{2.6}{5.7} + \frac{3.7}{7.9} + \frac{4.8}{9.11} + \frac{5.9}{11.13} + \ldots + \frac{n(n+4)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

§. 394.

3. **Zusatz.** Für $\alpha = \frac{1}{a}$ und $\beta = 0$ wird

$$\int \frac{1}{(a+nb)(a+nb+b)} = \frac{n+1}{a(a+nb+b)}$$

und die zugehörige Reihe ist

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+3b)(a+4b)} + \ldots + \frac{1}{(a+nb)(a+nb+b)}.$$

Wird $a = b = 1$, so erhält man

$$\int \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Für $a = 3$ und $b = 1$ wird

$$\int \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n+1}{3(n+4)} = \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \ldots + \frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

Für $a = 4$ und $b = 3$ wird

$$\int \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{n+1}{4(3n+7)} = \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16} + \frac{1}{16.19} + \ldots + \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}.$$

§. 395.

Sind A_{nh+h}; A_{nh+2h}; A_{nh+3h}; .... solche Funkzionen von n, welche aus A_{nh} entstehen, wenn $n+1$; $n+2$; $n+3$; ... statt n in A_{nh} gesetzt wird, so sey nach §. 390.

$$N_n = A_{nh+h} + A_{nh+2h} + A_{nh+3h} + \ldots + A_{nh+rh},$$

wo r irgend eine ganze Zahl bedeutet, so wird

$N_{n-1} = A_{nh} + A_{nh+h} + A_{nh+2h} + \ldots + A_{nh+rh-h}$ und

$N_{-1} = A + A_h + A_{2h} + A_{3h} + \ldots + A_{rh-h}$, daher

$N_n - N_{n-1} = A_{nh+rh} - A_{nh}$ und

$N_n - N_{-1} = A_{nh+h} + A_{nh+2h} + \ldots + A_{nh+rh} - (A + A_h + A_{2h} + \ldots + A_{rh-h})$

folglich

(I) $\int (A_{nh+rh} - A_{nh}) = A_{nh+h} + A_{nh+2h} + \ldots + A_{nh+rh} - (A + A_h + A_{2h} + A_{3h} + \ldots + A_{rh-h})$.

Hierin 1, 2, 3, ... statt h gesetzt, giebt

(II) $\int (A_{n+r} - A_n) = A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \ldots + A_{n+r} - (A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{r-1})$

(III) $\int (A_{2n+2r} - A_{2n}) = A_{2n+2} + A_{2n+4} + \ldots + A_{2n+2r} - (A + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2r-2})$

(IV) $\int (A_{3n+3r} - A_{3n}) = A_{3n+5} + A_{3n+6} + \ldots + A_{3n+5r} - (A + A_3 + A_6 + A_9 + \ldots + A_{3r-3})$

u. s. w.

§. 396.

1. Zusatz. In (*II*) werde nach einander 1, 2, 3, . . . statt r gesetzt, so erhält man

(*I*) $\int(A_{n+1} - A_n) = A_{n+1} - A$

(*II*) $\int(A_{n+2} - A_n) = A_{n+1} + A_{n+2} - (A + A_1)$

(*III*) $\int(A_{n+3} - A_n) = A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} - (A + A_1 + A_2)$.

u. s. w.

§. 397.

2. Zusatz. Wird $\frac{-1}{A_{nh+rh}}$ statt A_{nh+rh} gesetzt, so erhält man

$$\frac{-1}{A_{nh+rh}} - \frac{-1}{A_{nh}} = \frac{A_{nh+rh} - A_{nh}}{A_{nh} + A_{nh+rh}}$$

und eben so wie §. 395.

$$\int\frac{A_{nh+rh}-A_{nh}}{A_{nh}\,A_{nh+rh}} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A_h} + \frac{1}{A_{2h}} + \ldots + \frac{1}{A_{rh-h}} - \left(\frac{1}{A_{nh+h}} + \frac{1}{A_{nh+2h}} + \frac{1}{A_{nh+3h}} + \ldots + \frac{1}{A_{nh+rh}}\right).$$

§. 398.

Man setze $A_n = \frac{n\alpha + n^2\beta}{a + nb}$, so wird $A = 0$; $A_1 = \frac{\alpha+\beta}{a+b}$; $A_2 = \frac{2\alpha+4\beta}{a+2b}$; ....

$A_{n+r} = \frac{(n+r)\alpha + (n+r)^2\beta}{a+nb+rb}$, daher

$$A_{n+r} - A_n = \frac{ra(\alpha+r\beta) + nr(2a+rb)\beta + n^2rb\beta}{(a+nb)(a+nb+rb)},$$ folglich §. 395.

$$\int\frac{ra(\alpha+r\beta)+nr(2a+rb)\beta+n^2r\beta}{(a+nb)(a+nb+rb)} = \frac{(n+1)\alpha+(n+1)^2\beta}{a+nb+b} + \frac{(n+2)\alpha+(n+2)^2\beta}{a+nb+2b} + \ldots + \frac{(n+r)\alpha+(n+r)^2\beta}{a+nb+rb}$$
$$- \left[\frac{\alpha+\beta}{a+b} + \frac{2\alpha+4\beta}{a+2b} + \frac{3\alpha+9\beta}{a+3b} + \ldots + \frac{(r-1)\alpha+(r-1)^2\beta}{a+rb-b}\right].$$

§. 399.

1. Zusatz. Für $\alpha = -1$ und $\beta = \frac{1}{r}$ wird

$$\int\frac{n(2a+rb+nb)}{(a+nb)(a+nb+rb)} = \frac{(n+1)(n+1-r)}{r(a+nb+b)} + \frac{(n+2)(n+2-r)}{r(a+nb+2b)} + \ldots + \frac{(n+r)n}{r(a+nb+rb)}$$
$$+ \frac{(r-1)1}{r(a+b)} + \frac{(r-2)2}{r(a+2b)} + \frac{(r-3).3}{r(a+3b)} + \ldots + \frac{1.(r-1)}{r(a+rb-b)}.$$

Wird $r = 2$ gesetzt, so findet man

$$\int\frac{n(2a+2b+nb)}{(a+nb)(a+nb+2b)} = \frac{(n+1)(n-1)}{2(a+nb+b)} + \frac{(n+2)n}{2(a+nb+2b)} + \frac{1}{2(a+b)}.$$

Die diesem Ausdrucke entsprechende Reihe ist

$$\frac{1.(2a+3b)}{(a+b)(a+3b)} + \frac{2(2a+4b)}{(a+2b)(a+4b)} + \frac{3(2a+5b)}{(a+3b)(a+5b)} + \ldots + \frac{n(2a+2b+nb)}{(a+nb)(a+nb+2b)}.$$

Für $a = b = 1$ wird

$$\int\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)} = \frac{(n+1)(n-1)}{2(n+2)} + \frac{n(n+2)}{2(n+3)} + \frac{1}{4}.$$

Die zugehörige Reihe ist

$$\frac{1.5}{2.4}+\frac{2.6}{3.5}+\frac{3.7}{4.6}+\frac{4.8}{5.7}+\frac{5.9}{6.8}+\ldots+\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}.$$

§. 400.

2. Zusatz. Man setze $\alpha=\frac{1}{ra}$ und $\beta=0$, so wird

$$(I)\ \int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+rb)}=\frac{n+1}{ra(a+nb+b)}+\frac{n+2}{ra(a+nb+2b)}+\ldots+\frac{n+r}{ra(a+nb+rb)}$$
$$-\frac{1}{ra}\left[\frac{1}{a+b}+\frac{2}{a+2b}+\frac{3}{a+3b}+\ldots+\frac{r-1}{a+rb-b}\right]$$

Für $a=b=1$ und $r=3$ wird

$$(II)\ \int\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\frac{n+1}{3(n+2)}+\frac{n+2}{3(n+3)}+\frac{n+3}{3(n+4)}-\frac{7}{18}.$$

Die entsprechende Reihe ist

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{6.9}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}.$$

Weil $\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$; $\frac{n+2}{n+3}=1-\frac{1}{n+3}$; $\frac{n+3}{n+4}=1-\frac{1}{n+4}$; so wird auch

$$(III)\ \int\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\frac{11}{18}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right).$$

Eben so findet man für $a=b=1$ und $r=2$

$$(IV)\ \int\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{3}{4}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}.$$

§. 401.

Man setze nach §. 396. (I)

$$A_n=\frac{(a+nb-b)(a+nb)(a+nb+b)\ldots(a+nb+rb)}{(r+2)b},\text{ so wird}$$

$$A_{n+1}=\frac{(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots(a+nb+rb+b)}{(r+2)b}\text{ und}$$

$$A=\frac{(a-b)a(a+b)(a+2b)\ldots(a+rb)}{(r+2)b},\text{ daher}$$

$A_{n+1}-A_n=(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b\ldots(a+nb+rb)$, folglich

$$(I)\ \int(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots(a+nb+rb)$$
$$=\frac{(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots(a+nb+rb+b)}{(r+2)b}-\frac{(a-b)a(a+b)(a+2b)\ldots(a+rb)}{(r+2)b}.$$

Für $r=2$ wird

$$(II)\ \int(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)$$
$$=\frac{(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)(a+nb+3b)}{4b}-\frac{(a-b)a(a+b)(a+2b)}{4b}.$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$a(a+b)(a+2b)+(a+b)(a+2b)(a+3b)+(a+2b)(a+3b)(a+4b)+\ldots$$
$$\ldots+(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b).$$

§. 402.

§. 402.

In dem zuletzt gefundenen Ausdruck des vorigen §. werde nach einander 1, 2, 3, ... r statt r gesetzt, so erhält man

$$\int \frac{n+1}{1} = \frac{n+1 . n+2}{1 . 2}$$

$$\int \frac{n+1 . n+2}{1 . 2} = \frac{n+1 . n+2 . n+3}{1 . 2 . 3}$$

$$\int \frac{n+1 . n+2 . n+3}{1 . 2 . 3} = \frac{n+1 . n+2 . n+3 . n+4}{1 . 2 . 3 . 4}$$

u. s. w., wo jedes folgende allgemeine Glied das summirende des vorhergehenden Ausdrucks ist, und sowohl die allgemeinen als die Summenglieder mit den Binomialkoeffizienten für negative Exponenten (§. 29.) übereinstimmen.

Aus den vorstehenden allgemeinen Gliedern erhält man nachstehende Reihen, welche unter dem Namen der **figurirten Zahlen** bekannt sind, wo also den vorstehenden allgemeinen Ausdrücken gemäß, jedes einzelne Glied die Summe der Glieder angiebt, welche sich in der unmittelbar darüberstehenden Reihe bis zu diesem Gliede befinden.

1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	n^0
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\frac{n+1}{1}$
1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	$\frac{n+1 . n+2}{1 . 2}$
1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	$\frac{n+1 . . . . n+3}{1 . . . . 3}$
1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	$\frac{n+1 . . . . n+4}{1 . . . . 4}$
1.	6.	21.	56.	126.	252.	264.	792.	$\frac{n+1 . . . . n+5}{1 . . . . 5}$
1.	7.	28.	84.	210.	462.	924.	1716.	$\frac{n+1 . . . . n+6}{1 . . . . 6}$

u. s. w.

Die Zahlen der vorstehenden zweiten wagerechten Reihe, für welche $\frac{n+1}{1}$ das allgemeine Glied ist, heißen figurirte Zahlen der **ersten Ordnung**, welche mit den natürlichen Zahlen einerlei sind.

Die Zahlen der dritten Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{n+1 . n+2}{1 . 2}$ ist, heißen figurirte Zahlen der **zweiten Ordnung**, auch **Triangular-** oder **Trigonalzahlen**.

Die Zahlen der vierten Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{n+1 . n+2 . n+3}{1 . 2 . 3}$ ist, heißen figurirte Zahlen der **dritten Ordnung**, auch **Pyramidalzahlen**.

Die in den folgenden Reihen enthaltenen Zahlen, heißen nach einander, figurirte Zahlen der vierten, fünften, ... Ordnung.

Man wird leicht bemerken, daß es einerlei sey, ob man die aufeinander folgenden Zahlenreihen wagerecht oder vertikal abwärts nimmt, weil man in beiden Fällen einerlei Reihen erhält.

Schreibt man die figurirten Zahlen in Form eines Dreiecks vertikal unter einander, so bemerkt man eben so leicht, daß alsdann die wagerecht neben einander stehenden Zahlen mit den Binomialkoeffizienten (§. 36.) übereinstimmen.

I.	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*	*VI.*	*VII.*	*VIII.*
1							
2	1						
3	3	1					
4	6	4	1				
5	10	10	5	1			
6	15	20	15	6	1		
7	21	35	35	21	7	1	
8	28	56	70	56	28	8	1
9	36	84	126	126	84	36	9
10.	45	120	210	252	210	220	45

§. 403.

Werden die Reihen, welche den Summen $\int\frac{n+1}{1}$; $\int\frac{n+1\,.\,n+2}{1\,.\,2}$; $\int\frac{n+1\,.\,n+2\,.\,n+3}{1\,.\,2\,.\,3}$; ..... entsprechen, entwickelt, und man setzt alsdann m statt $n+1$, so erhält man

$$1+2+3+4+5+6+7+\ldots\ldots+m=\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2};$$

$$\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{m-2\,.\,m-1}{1\,.\,2}+\frac{m-1\,.\,m}{1\,.\,2}+\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}=\frac{m\,.\,m+1\,.\,m+2}{1\,.\,2\,.\,3};$$

$$\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{m-2.m-1.m}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{m-1.m.m+1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{m.m+1.m+2}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{m.m+1.m+2.m+3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4};$$

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{m-1.m.m+1.m+2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\frac{m.m+1.m+2.m+3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=\frac{m.m+1.m+2.m+3.m+4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5};$$

u. s. w., überhaupt erhält man:

$$\frac{1.2\ldots r}{1.2\ldots r}+\frac{2.3\ldots r+1}{1.2\ldots r}+\ldots\ldots+\frac{m-1.m\ldots m+r-2}{1\,.\,2\ldots r}+\frac{m.m+1\ldots m+r-1}{1\,.\,2\ldots r}=\frac{m.m+1\ldots\ldots m+r}{1\,.\,2\ldots\ldots r+1}$$ oder

$$r_r+(r+1)_r+(r+2)_r+(r+3)_r+\ldots+(r+m-2)_r+(r+m-1)_r=(r+m)_{r+1},$$

eben so wie §. 40. (*XIII*).

§. 404.

Nach einander $a=0$ und $r=1$; $a=1$ und $r=2$; $a=2$ und $r=3$; .... in (*VIII*) §. 381. gesetzt, so erhält man

$$\int n = (n+1)_2$$
$$\int(n+1)_2 = (n+2)_3$$
$$\int(n+2)_3 = (n+3)_4$$
$$\int(n+3)_4 = (n+4)_5$$
. . . .

Hiernach wird

$$\int n = (n+1)_2 \quad \text{oder} \quad \int n = (n+1)_2$$
$$\int\int n = \int(n+1)_2 \quad \text{oder} \quad \int\int n = (n+2)_3$$
$$\int\int\int n = \int(n+2)_3 \quad \text{oder} \quad \int\int\int n = (n+3)_4$$
$$\int\int\int\int n = \int(n+3)_4 \quad \text{oder} \quad \int\int\int\int n = (n+4)_5$$
. . . .

oder wenn man $\int\int n = \int^2 n$; $\int\int\int n = \int^3 n$; $\int\int\int\int n = \int^4 n$; . . . . setzt, so erhält man ganz allgemein

$$\int^r n = (n+r)_{r+1}.$$

§. 405.

Nach der Bezeichnung §. 390. setze man

$$N_n = \frac{1}{rb}\,\frac{-1}{(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots\ldots(a+nb+rb)}, \text{ so wird}$$

$$N_{n-1} = \frac{1}{rb}\,\frac{-1}{(a+nb)(a+nb+b)\ldots\ldots(a+nb+rb-b)} \text{ und}$$

$$N_{-1} = \frac{1}{rb}\,\frac{-1}{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+rb-b)}, \text{ daher}$$

$$N_n - N_{n-1} = \frac{1}{rb}\left(\frac{1}{a+nb} - \frac{1}{a+nb+rb}\right)\left(\frac{1}{(a+nb+b)\ldots(a+nb+rb-b)}\right) = \frac{1}{(a+nb)(a+nb+b)\ldots(a+nb+rb)},$$

folglich

$$(I)\ \int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots\ldots(a+nb+rb)}$$
$$= \frac{1}{rb}\left[\frac{1}{a(a+b)\ldots\ldots(a+rb-b)} - \frac{1}{(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots(a+nb+rb)}\right].$$

Für $b = 1$ wird

$$(II)\ \int\frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)\ldots(a+n+r)}$$
$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+r-1)} - \frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)\ldots\ldots(a+n+r)}\right].$$

Endlich für $a = 1$ und $r - 1$ statt r, wird

$$(III)\ \int\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+r)}$$
$$= \frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(r-1)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots(n+r)}\right].$$

Hierin nach einander 2, 3, 4 . . . statt r gesetzt giebt:

$$\int\frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\int \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$$

$$\int \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right) \text{ u. s. w.}$$

Diesen Ausdrücken entsprechen die Reihen

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \text{ u. s. w.}$$

§. 406.

Setzt man

$$N_n = \frac{-1}{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+nb+b)}, \text{ so wird}$$

$$N_{n-1} = \frac{-1}{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+nb)} \text{ und } N_{-1} = \frac{-1}{a} \text{ daher}$$

$$N_n - N_{n-1} = \frac{a+b+nb-1}{a(a+b)\ldots(a+nb+b)}, \text{ folglich §. 390.}$$

$$(I) \int \frac{a+b+nb-1}{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+nb+b)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a(a+b)\ldots(a+nb+b)}.$$

Für $b = 1$ erhält man

$$(II) \int \frac{a+n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n+1)},$$

oder mit a multiplizirt

$$\int \frac{a+n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)} = 1 - \frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)}.$$

Hierin $a = 0$ gesetzt, giebt:

$$(III) \int \frac{n}{1.2.3\ldots(n+1)} = 1 - \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{n}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

§. 407.

Setzt man §. 390.

$$N_n = \frac{b}{a+h-b} \cdot \frac{(a+h)(a+2h)(a+3h)\ldots(a+nh+2h)}{b\;\;(b+h)\;(b+2h)\ldots(b+nh+h)}, \text{ so wird}$$

$$N_{n-1} = \frac{b}{a+h-b} \cdot \frac{(a+h)(a+2h)\ldots(a+nh+h)}{b\;\;(b+h)\ldots(b+nh)} \text{ und}$$

$$N_{-1} = \frac{b}{a+h-b} \cdot \frac{a+h}{b} = \frac{a+h}{a+h-b}, \text{ daher}$$

$$N_n - N_{n-1} = \frac{b}{a+h-b}\left(\frac{(a+h)\ldots(a+nh+h)}{b\;\ldots(b+nh)}\right)\left(\frac{a+nh+2h}{b+nh+h} - 1\right) = \frac{(a+h)(a+2h)\ldots(a+nh+h)}{(b+h)(b+2h)\ldots(b+nh+h)}$$

folglich

$$(I) \int \frac{(a+h)(a+2h)\ldots(a+nh+h)}{(b+h)(b+2h)\ldots(b+nh+h)} = \frac{a+h}{a+h-b}\left[\frac{(a+2h)(a+3h)\ldots(a+nh+2h)}{(b+h)\;(b+2h)\ldots(b+nh+h)} - 1\right]$$

oder hierin durchgängig a statt $a+h$ und b statt $b+h$ gesetzt, giebt

$$(II)\ \int\frac{a(a+h)(a+2h)\ldots(a+nh)}{b(b+h)(b+2h)\ldots(b+nh)}=\frac{a}{a+h-b}\left[\frac{(a+h)(a+2h)\ldots(a+nh+h)}{b\ (b+h)\ \ldots(b+nh)}-1\right]$$

Hierin $h=1$ gesetzt, giebt

$$(III)\ \int\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}=\frac{a}{a+1-b}\left[\frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n+1)}{b\ (b+1)(b+2)\ldots(b+n)}-1\right].$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{b(b+1)(b+2)(b+3)}+\ldots+\frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}.$$

In diesen Ausdruck setze man zuerst $a=1$ und hienächst $b=1$, so wird

$$(IV)\ \int\frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots(n+1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}=\frac{1}{b-2}\left[1-\frac{2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots(n+2)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}\right]\text{ und}$$

$$(V)\ \int\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots(n+1)}=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n+1}-1.$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$\frac{a}{1}+\frac{a(a+1)}{1\ .\ 2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}+\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ldots+\frac{a\ldots(a+n)}{1\ldots(n+1)}.$$

§. 408.

Mittelst des §. 390. angewendeten Verfahrens, lassen sich auch die Summen mehrerer Reihen mit abwechselnden Zeichen finden. Man setze

$$N_n=(-1)^{n+1}A_{n+1}+(-1)^{n+2}A_{n+2}+(-1)^{n+3}A_{n+3}+\ldots+(-1)^{n+r}A_{n+r},$$

wo r irgend eine ganze Zahl bedeutet, so wird

$$N_{n-1}=(-1)^nA_n+(-1)^{n+1}A_{n+1}+(-1)^{n+2}A_{n+2}+\ldots+(-1)^{n+r-1}A_{n+r-1},$$

oder wenn man durchgängig $(-1)^n$ als Faktor absondert

$$N_n=(-1)^n(-A_{n+1}+A_{n+2}-A_{n+3}+\ldots\pm A_{n+r})$$
$$N_{n-1}=(-1)^n(+A_n-A_{n+1}+A_{n+2}-\ldots\mp A_{n+r-1})$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades und die unteren für ein ungerades r gelten. Ferner wird wegen $(-1)^0=1$

$$N_{-1}=A-A_1+A_2-A_3+\ldots\mp A_{r-1}\text{ und}$$
$$N_n-N_{n-1}=(-1)^n(\pm A_{n+r}-A_n),\text{ daher §. 390.}$$

$$\int(-1)^n(\pm A_{n+r}-A_n)=(-1)^n(-A_{n+1}+A_{n+2}-\ldots\pm A_{n+r})-A+A_1-A_2+A_3-\ldots\pm A_{r-1},$$

oder man erhält für ein gerades r

$$(I)\ \int(-1)^n(A_{n+r}-A_n)=(-1)^n(-A_{n+1}+A_{n+2}-\ldots+A_{n+r})-A+A_1-A_2+A_3-\ldots+A_{r-1}$$

und für ein ungerades r

$$(II)\ \int(-1)^n(A_{n+r}+A_n)=(-1)^n(A_{n+1}-A_{n+2}+A_{n+3}-\ldots+A_{n+r})+A-A_1+A_2-A_3+\ldots+A_{r-1}.$$

Für $r=1$ wird

$$\int(-1)^n(A_{n+1}+A_n)=(-1)^nA_{n+1}+A$$

und für $r=2$

$$\int(-1)^n(A_{n+2}-A_n)=(-1)^n(A_{n+2}-A_{n+1})+A_1-A.$$

§. 409.

Nach §. 398. ist für $r = 2$

$$A_{n+2} - A_n = \frac{2a(\alpha + 2\beta) + 2n(2a+2b)\beta + 2n^2 b\beta}{(a+nb)(a+nb+2b)} \quad [I]$$

und es wird für $\alpha = -1$ und $\beta = \frac{1}{2}$

$$A_{n+2} - A_n = \frac{n(2a+2b+nb)}{(a+nb)(a+nb+2b)};\ A = 0;\ A_1 = \frac{-1}{2(a+b)};\ A_{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{2(a+nb+b)} \text{ und}$$

$$A_{n+2} = \frac{(n+2)n}{2(a+nb+2b)}, \text{ daher §. 390.}$$

$$\int \frac{(-1)^n n(2a+2b+nb)}{(a+nb)(a+nb+2b)} = (-1)^n \left(\frac{(n+2)n}{2(a+nb+2b)} - \frac{(n+1)(n-1)}{2(a+nb+b)}\right) - \frac{1}{2(a+b)}.$$

Für $a = b = 1$ wird

$$\int \frac{(-1)^n n(n+4)}{(n+1)(n+3)} = (-1)^n \left(\frac{(n+2)n}{2(n+3)} - \frac{(n+1)(n-1)}{2(n+2)}\right) - \frac{1}{4}.$$

Die zugehörige Reihe ist

$$\frac{1.5}{2.4} - \frac{2.6}{3.5} + \frac{3.7}{4.6} - \frac{4.8}{5.7} + \frac{5.9}{6.8} - \ldots\ldots \pm \frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)},$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

§. 410.

Wird hingegen §. 398. $r = 2$, $\alpha = \frac{1}{2a}$ und $\beta = 0$ gesetzt, so erhält man

$$A_{n+2} - A_n = \frac{1}{(a+nb)(a+nb+2b)};\ A = 0;\ A_1 = \frac{1}{2a(a+b)};\ A_{n+1} = \frac{n+1}{2a(a+nb+b)};$$

$$A_{n+2} = \frac{n+2}{2a(a+nb+2b)}, \text{ daher §. 390.}$$

$$\int \frac{(-1)^n}{(a+nb)(a+nb+2b)} = \frac{(-1)^n}{2a}\left(\frac{n+2}{a+nb+2b} - \frac{n+1}{a+nb+b}\right) + \frac{1}{2a(a+b)}.$$

Für $a = b = 1$ wird

$$\int \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+3)} = \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}\right) + \frac{1}{4}.$$

Die zugehörige Reihe ist:

$$\frac{1}{2.4} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} - \frac{1}{5.7} + \frac{1}{6.8} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

§. 411.

Wenn das Summenglied einer Reihe bekannt ist, so läßt sich in vielen Fällen die ganze Summe der Reihe dadurch finden, daß man in dem Ausdruck für das Summenglied diejenigen Glieder, welche n als Faktor enthalten, so abzuändern sucht, daß n Divisor einer beständigen Größe wird. Da nun in einer ohne Ende fortlaufenden Reihe die Anzahl der Glieder, oder $n = \infty$ wird, so erhält man für diesen Fall $\frac{1}{n} = 0$ (§. 10.) und es entsteht hieraus ein bestimmter Ausdruck für die ganze Summe, sofern solche nicht $= \infty$ wird. Auch übersieht man leicht hieraus, daß die ganze Summe einer Reihe von der Stellenzahl n unabhängig seyn muß.

1. **Beispiel.** Es ist §. 368.

$$\int\frac{1}{a^n} = \frac{a^{n+1}-1}{(a-1)a^n} = \frac{a.a^n-1}{(a-1)a^n},$$ oder Zähler und Nenner durch a^n dividirt

$$\int\frac{1}{a^n} = \frac{a-\frac{1}{a^n}}{a-1}.$$

Ist nun $a > 1$, so wird $a^n = \infty$, für $n = \infty$, also in diesem Falle $\frac{1}{a^n} = 0$, daher

$$^{1}\!\int\frac{1}{a^n} = \frac{a}{a-1},$$

wodurch man sich durch die Division von $a-1$ in a ebenfalls überzeugen kann.

Hierin $\frac{1}{a}$ statt a gesetzt, giebt

$$^{1}\!\int a^n = \frac{1}{1-a}.$$

2. **Beispiel.** Es ist §. 400.

$$\int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+rb)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{ra\left(b+\frac{a+b}{n}\right)} + \frac{1+\frac{2}{n}}{ra\left(b+\frac{a+2b}{n}\right)} + \ldots + \frac{1+\frac{r}{n}}{ra\left(b+\frac{a+rb}{n}\right)}$$
$$- \frac{1}{ra}\left[\frac{1}{a+b} + \frac{2}{a+2b} + \ldots + \frac{r-1}{a+rb-b}\right],$$

daher für $n = \infty$

$$(I)\quad ^{1}\!\int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+rb)} = \frac{1}{ra}\left[\frac{r}{b} - \frac{1}{a+b} - \frac{2}{a+2b} - \ldots - \frac{r-1}{a+rb-b}\right].$$

Für $r = 1$ und $r = 2$ wird

$$(II)\quad ^{1}\!\int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+b)} = \frac{1}{ab} \text{ und } ^{1}\!\int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+2b)} = \frac{2a+b}{2ab(a+b)},$$

und für $a = b = 1$

$$(III)\quad ^{1}\!\int\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4} \text{ oder } ^{1\,1}\!\int\frac{1}{(n+2)^2-1} = \frac{3}{4}, \text{ daher}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \ldots\ldots$$

3. **Beispiel.** Für $n = \infty$ wird §. 405.

$$^{1}\!\int\frac{1}{(a+nb)(a+nb+b)(a+nb+2b)\ldots(a+nb+rb)} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+r-1)}.$$

4. **Beispiel.** Eben so wird §. 406. (*III*)

$$^{1}\!\int\frac{n}{[n+1]^{1|1}} = 1.$$

§. 412.

Aufgabe. Aus der ganzen Summe einer unbegrenzten Reihe, das allgemeine Glied derselben zu finden.

Auflösung. Weil die ganze Summe einer Reihe von der Stellenzahl des allgemeinen Gliedes unabhängig ist (§. 411.), so sey von der Reihe:

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

die entsprechende ganze Summe $= fx$, alsdann wird $A_n x^n$ das allgemeine Glied, und wenn man den allgemeinen Koeffizienten A_n kennt, so ist auch das allgemeine Glied bekannt. Nun ist nach §. 181. für

$$fx = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

wenn $y = fx$ gesetzt wird

$$f^n x = n! [A_n + (n+1)_1 A_{n+1} x + (n+2)_2 A_{n+2} x^2 + \ldots]$$

daher für $x = o$

$f^n o = n! A_n$, folglich der allgemeine Koeffizient

$$A_n = \frac{f^n o}{n!},$$

oder man findet den allgemeinen Koeffizienten einer unbegrenzten Reihe, wenn von der ganzen Summe fx die $n$te Ableitung genommen, hienächst $x = o$ gesetzt, und der entstandene Ausdruck durch die Fakultät $n!$ dividirt wird.

1. **Beispiel.** Die ganze Summe einer Reihe sey e^x, so wird $fx = e^x$, also §. 180. (*II*) $f^n x = e^x$, daher $f^n o = e^o = 1$, also $A_n = \frac{1}{n!}$, daher $\frac{x^n}{n!}$ das allgemeine Glied, oder $^1\!\int \frac{x^n}{n!} = e^x$. (§. 382. *XXII.*)

2. **Beispiel.** Die ganze Summe sey $(1 + x + \alpha x)(1 + x)^{\alpha - 1}$, also

$$fx = (1 + x + \alpha x)(1 + x)^{\alpha - 1}$$
$$f^1 x = (1 + \alpha)(1 + x)^{\alpha - 1} + (1 + x + \alpha x)(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha - 2}$$
$$f^2 x = 2(1+\alpha)(\alpha - 1)(1+x)^{\alpha - 2} + (1+x+\alpha x)(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1+x)^{\alpha - 3}$$
$$f^3 x = 3(1+\alpha)(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1+x)^{\alpha - 3} + (1+x+\alpha x)(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(1+x)^{\alpha - 4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n x = n(1+\alpha)(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1+x)^{\alpha - n} + (1+x+\alpha x)(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)(1+x)^{\alpha - n - 1}.$$

Für $x = o$ wird

$$f^n o = n(1+\alpha)(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) + (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n) = (n+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) = (n+1)!\alpha_n$$

also $A_n = \frac{(n+1)!\alpha_n}{n!} = (n+1)\alpha_n$, daher ist $(n+1)\alpha_n x^n$ das allgemeine Glied, oder

$$^1\!\int (n+1)\alpha_n x^n = (1 + x + \alpha x)(1 + x)^{\alpha - 1} \text{ (§. 382. } XI.\text{)}.$$

§. 413.

Aufgabe. Das allgemeine Glied $A_n x^n$, wo A_n irgend eine Funkzion von n ist, nebst der ganzen Summe der zugehörigen Reihe sind gegeben; man soll daraus das Summenglied der Reihe finden.

Auf-

Auflösung. In A_n werde $n+r$ statt n gesetzt, so erhält man A_{n+r}. Kann man nun mittelst des Ausdruckes für ${}^1\!\int A_n x^n$ den Werth von ${}^1\!\int A_{n+r} x^{n+r}$ finden, so erhält man

$$A_r x^r + {}^1\!\int A_n x^n - x^r\,{}^1\!\int A_{n+r} x^n = F(r),$$

wo $F(r)$ irgend eine Funkzion von r ist.

Hierin n statt r gesetzt, giebt

$$\int A_n x^n = F(n).$$

Beweis. Es ist

$${}^r\!\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots + A_r x^r$$
$${}^1\!\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_r x^r + A_{r+1} x^{r+1} + \ldots\ldots$$
$$x^r \cdot {}^1\!\int A_{n+r} x^n = A_r x^r + A_{r+1} x^{r+1} + A_{r+2} x^{r+2} + \ldots\ldots \text{ folglich}$$
$$A_r x^r + {}^1\!\int A_n x^n - x^r\,{}^1\!\int A_{n+r} x^n = {}^r\!\int A_n x^n.$$

Diesen Ausdruck $= F(r)$ gesetzt, und n mit r vertauscht, so findet man (§. 355.)

$$\int A_n x^n = F(n).$$

Beispiel. Aus ${}^1\!\int \frac{b^n x^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a-bx}$ (§. 282.) das Summenglied zu finden, giebt hier

$$A_n = \frac{b^n}{a^{n+1}}, \text{ also } A_{n+r} = \frac{b^{n+r}}{a^{n+r+1}} = \frac{b^r}{a^r} \cdot \frac{b^n}{a^{n+1}}, \text{ daher}$$

$${}^1\!\int A_{n+r} x^n = \frac{b^r}{a^r} {}^1\!\int \frac{b^n x^n}{a^{n+1}} = \frac{b^r}{a^r} \cdot \frac{1}{a-bx}. \text{ Hienach wird}$$

$$\frac{b^r x^r}{a^{r+1}} + {}^1\!\int \frac{b^n x^n}{a^{n+1}} - x^r \frac{b^r}{a^r} {}^1\!\int \frac{b^n x^n}{a^{n+1}} = \frac{b^r x^r}{a^{r+1}} + \frac{1}{a-bx}\left(1 - \frac{b^r x^r}{a^r}\right)$$

oder $F(r) = \frac{a^{r+1} - b^{r+1} x^{r+1}}{(a-bx)\,a^{r+1}}$, daher $F(n) = \int \frac{b^n x^n}{a^{n+1}} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1} x^{n+1}}{(a-bx)\,a^{n+1}}$.

Eben diesen Ausdruck erhält man nach §. 365. (I), wenn daselbst $\frac{bx}{a}$ statt a gesetzt und hienächst $\int \left(\frac{bx}{a}\right)^n$ mit $\frac{1}{a}$ multiplizirt wird.

§. 414.

Zusatz. Für $x = 1$ wird das allgemeine Glied $= A_n$, und man erhält

$$A_r + {}^1\!\int A_n - {}^1\!\int A_{n+r} = F(r), \text{ daher}$$
$$\int A_n = F(n).$$

Beispiel. Aus ${}^1\!\int \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4}$ soll das Summenglied der zugehörigen Reihe gefunden werden. Hier ist $A_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ also $A_r = \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ und $A_{n+r} = \frac{1}{(n+r+1)(n+r+3)}$. In ($II$) §. 411. werde $b = 1$ und $a = r+1$ gesetzt, so erhält man

$${}^1\!\int A_{n+r} = \frac{2r+3}{2(r+1)(r+2)}, \text{ daher wird}$$

$$\frac{1}{(r+1)(r+3)} + \frac{3}{4} - \frac{2r+3}{2(r+1)(r+2)} = F(r) \text{ oder}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2r+5}{2(r+2)(r+3)} = F(r), \text{ folglich } F(n) \text{ oder}$$

$$\int \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}; \text{ eben so wie §. 400. } (IV).$$

§. 415.

Aufgabe. Das Summenglied einer Reihe mit abwechselnden Zeichen zu finden, deren allgemeines Glied y_n nebst den Summengliedern $\int y_n$ und $\int y_{2n}$ gegeben sind.

Auflösung. Es ist

$$\int y_n = y + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \ldots\ldots + y_n.$$

Ferner ist, wenn n eine gerade Zahl bedeutet,

$$\int y_{2n} = y + y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_n + \ldots\ldots + y_{2n},$$

wo zu y_n die Stellenzahl $\frac{n}{2}$ gehört.

Wäre n ungerade, so wird

$$\int y_{2n} = y + y_2 + y_4 + y_6 + \ldots\ldots + y_{n-1} + \ldots\ldots + y_{2n},$$

wo zu y_{n-1} die Stellenzahl $\frac{n-1}{2}$ gehört.

Es wird alsdann

$$\overset{\frac{n}{2}}{\int} y_{2n} = y + y_2 + y_4 + \ldots + y_n, \text{ wenn } n \text{ gerade und}$$

$$\overset{\frac{n-1}{2}}{\int} y_{2n} = y + y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

Man erhält daher

$$2 . \overset{\frac{n}{2}}{\int} y_{2n} - \int y_n = y - y_1 + y_2 - y_3 + \ldots\ldots + y_n,$$

oder wenn n eine **gerade** Zahl ist:

$$(I) \int (-1)^n y_n = 2 . \overset{\frac{n}{2}}{\int} y_{2n} - \int y_n$$

und wenn n eine **ungerade** Zahl ist:

$$(II) \int (-1)^n y_n = 2 . \overset{\frac{n-1}{2}}{\int} y_{2n} - \int y_n.$$

Ist daher $\int y_n$ und $\int y_{2n}$ bekannt, so läßt sich daraus $\int (-1)^n y_n$ finden.

1. Beispiel. Es ist $\int a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ (§. 365.), und wenn man a^2 statt a setzt, $\int a^{2n} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$. Nun setze man $\int y_n = \int a^n$, so wird $\int y_{2n} = \int a^{2n} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$, also

$$\overset{\frac{n}{2}}{\int} y_{2n} = \overset{\frac{n}{2}}{\int} a^{2n} = \frac{a^{n+2} - 1}{a^2 - 1} \text{ und}$$

$$\overset{\frac{n-1}{2}}{\int} y_{2n} = \overset{\frac{n-1}{2}}{\int} a^{2n} = \frac{a^{n+1} - 1}{a^2 - 1}, \text{ daher}$$

$$2\,.\,{}^{\frac{n}{2}}\!\int a^{2n} - \int a^n = 2\,.\,\frac{a^{n+2}-1}{a^2-1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{+a^{n+1}+1}{a+1} \text{ und}$$

$$2\,.\,{}^{\frac{n-1}{2}}\!\int a^{2n} - \int a^n = 2\,.\,\frac{a^{n+1}-1}{a^2-1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{-a^{n+1}+1}{a+1}, \text{ folglich}$$

$$\int(-1)^n a^n = \frac{\pm a^{n+1}+1}{a+1} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \ldots \pm a^n,$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Eben dieser Ausdruck ist schon §. 367. gefunden worden.

§. 416.

Aufgabe. Die ganze Summe einer Reihe mit **abwechselnden** Zeichen zu finden, deren allgemeines Glied y_n ist, wenn ${}^t\!\int y_n$ und ${}^t\!\int y_{2n}$ gegeben sind.

Auflösung. Es ist

$$2\,.\,{}^t\!\int y_{2n} = 2y + 2y_2 + 2y_4 + 2y_6 + 2y_8 + \ldots\ldots \text{ und}$$

$$-\,{}^t\!\int y_n = -y - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - \ldots\ldots \text{ daher}$$

$$2\,.\,{}^t\!\int y_{2n} - {}^t\!\int y_n = y - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - \ldots\ldots \text{ folglich}$$

$${}^t\!\int(-1)^n y_n = 2\,.\,{}^t\!\int y_{2n} - {}^t\!\int y_n.$$

Beispiel. Für $y_n = 2^n x^n$ wird $y_{2n} = 2^{2n} x^{2n}$. Aber

$${}^t\!\int 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-2x} \text{ und}$$

$${}^t\!\int 2^{2n} x^{2n} = 1 + 4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-4x^2}$$

wovon man sich leicht durch die Division von $1 - 2x$ und $1 - 4x^2$ in 1 überzeugen kann. Daher wird

$${}^t\!\int(-1)^n 2^n x^n = \frac{2}{1-4x^2} - \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots\ldots$$

§. 417.

Zusatz. Es ist ${}^t\!\int\frac{1}{(n+1)^m} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \ldots$

und $\frac{-2}{2^m}\,{}^t\!\int\frac{1}{(n+1)^m} = -\frac{2}{2^m} \qquad - \frac{2}{4^m} \qquad - \frac{2}{6^m} \qquad - \ldots$

daher ist $1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \ldots\ldots$ die Summe dieser beiden Reihen, welche mit ${}^t\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)^m}$ überein kommt, oder es ist ${}^t\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)^m} = {}^t\!\int\frac{1}{(n+1)^m} - \frac{2}{2^m}\,{}^t\!\int\frac{1}{(n+1)^m}$ folglich

$$(I)\quad {}^t\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)^m} = \frac{2^{m-1}-1}{2^{m-1}}\,{}^t\!\int\frac{1}{(n+1)^m}.$$

Ferner ist für $y_n = \frac{1}{(n+1)^m}$; $y_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^m}$, daher nach §. 216.

$${}^t\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)^m} = 2\,{}^t\!\int\frac{1}{(2n+1)^m} - {}^t\!\int\frac{1}{(n+1)^m}.$$

Diese Gleichung mit (I) verbunden, so erhält man ferner

$$(II)\quad {}^{t}\!\!\int\frac{1}{(2n+1)^m}=\frac{2^m-1}{2^m}\,{}^{t}\!\!\int\frac{1}{(n+1)^m}$$

$$(III)\quad {}^{t}\!\!\int\frac{(-1)^n}{(n+1)^m}=\frac{2^m-2}{2^m-1}\,{}^{t}\!\!\int\frac{1}{(2n+1)^m}.$$

Hieraus folgt, daß, wenn eine von den Summen der vorstehenden reciproken Reihen bekannt ist, so kann daraus die Summe der beiden übrigen gefunden werden.

§. 418.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Summengliede $\int\frac{1}{a+nh}$ das Summenglied $\int\frac{\alpha+n\beta}{a+nh}$ zu finden.

Auflösung. Wird mit $nh+a$ in $n\beta+\alpha$ dividirt, so erhält man

$$\frac{\alpha+n\beta}{a+nh}=\frac{\beta}{h}+\frac{\alpha h-a\beta}{h(a+nh)},\ \text{also}$$

$$\int\frac{\alpha+n\beta}{a+nh}=\int\frac{\beta}{h}+\frac{\alpha h-a\beta}{h}\int\frac{1}{a+nh}\ \text{oder (§. 361. } II.)$$

$$\int\frac{\alpha+n\beta}{a+nh}=\frac{(n+1)\beta}{h}+\frac{\alpha h-a\beta}{h}\int\frac{1}{a+nh}.$$

Der Werth von $\int\frac{1}{a+nh}$ wird nach §. 600. gefunden.

§. 419.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Summengliede $\int\frac{1}{a+nh}$ das Summenglied $\int\frac{\alpha+n\beta}{(a+nh)(b+nk)}$ zu finden.

Auflösung. Es ist §. 232. 3. Beisp.

$$\frac{\alpha+n\beta}{(a+n)(b+n)}=\frac{\alpha-\beta b}{(a-b)(b+n)}-\frac{\alpha-\beta a}{(a-b)(a+n)}.$$

Durchgängig $\frac{a}{h}$ statt a und $\frac{b}{k}$ statt b gesetzt und die Brüche weggeschafft, giebt:

$$\frac{\alpha+n\beta}{(a+nh)(b+nk)}=\frac{\alpha k-\beta b}{(ak-hb)(b+nk)}-\frac{\alpha h-\beta a}{(ak-bh)(a+nh)}$$

folglich

$$\int\frac{\alpha+n\beta}{(a+nh)(b+nk)}=\frac{\alpha k-\beta b}{ak-hb}\int\frac{1}{b+nk}-\frac{\alpha h-\beta a}{ak-bh}\int\frac{1}{a+nh}.$$

Für $\beta=o$ wird

$$\int\frac{1}{(a+nh)(b+nk)}=\frac{k}{ak-bh}\int\frac{1}{b+nk}-\frac{h}{ak-bh}\int\frac{1}{a+nh}.$$

§. 420.

Nimmt man von den Gliedern einer Reihe die Ableitungen, so entsteht dadurch eine neue Reihe, deren Glieder die Exponenten der veränderlichen Größen zum Faktor haben (§. 181.). Eben

so kann man, wenn die Zurückleitung der einzelnen Glieder einer Reihe genommen wird, dadurch eine neue Reihe bilden, deren Glieder die Exponenten der veränderlichen Größen als Nenner enthalten.

So ist (§. 59.)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots . \quad [I]$$

Hievon die Ableitung genommen, giebt (§. 184. *II.*)

$$(I) \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots .$$

Hievon wieder die Ableitung, giebt

$$(II) \quad \frac{2}{(1-x)^3} = 1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \ldots .$$

$$(III) \quad \frac{6}{(1-x)^4} = 1.2.3 + 2.3.4x + 3.4.5x^2 + 4.5.6x^3 + \ldots .$$

Sieht man α als veränderlich an, und nimmt von der §. 170. (*III*) gefundenen Reihe die Ableitung, so erhält man

$$(IV) \quad \tfrac{1}{2} = \cos\alpha - \tfrac{2}{2}\cos 2\alpha + \tfrac{3}{3}\cos 3\alpha - \tfrac{4}{4}\cos 4\alpha + \tfrac{5}{5}\cos 5\alpha - \tfrac{6}{6}\cos 6\alpha + \ldots .$$

Wird von der Reihe [*I*] die Zurückleitung genommen, so findet man (§. 218. *II.*)

$$\partial^{-1}\frac{1}{1-x} = C - lg(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots .$$

Für $x = 0$ wird $lg(1-x) = lg\,1 = 0$ daher $C = 0$, folglich

$$(V) \quad -lg(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots .$$

Hievon wieder die Zurückleitung genommen, giebt (§. 216. Beisp.), weil hier ebenfalls $C = 0$ wird,

$$(VI) \quad x + (1-x)\,lg(1-x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^6}{5.6} + \frac{x^7}{6.7} + \ldots .$$

Hievon nochmals die Zurückleitung genommen, giebt

$$(VII) \quad \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{(1-x)^2}{2}\,lg(1-x) = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^8}{6.7.8} + \ldots$$

Die Reihe (*V*) für $-lg(1-x)$ mit x^{m-1} multiplizirt, giebt

$$-x^{m-1}\,lg(1-x) = \frac{x^m}{1} + \frac{x^{m+1}}{2} + \frac{x^{m+2}}{3} + \frac{x^{m+4}}{4} + \ldots .$$

und wenn man hievon die Zurückleitung nimmt:

$$-\partial^{-1}x^{m-1}\,lg(1-x) = \frac{x^{m+1}}{1.(m+1)} + \frac{x^{m+2}}{2(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{3(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{4(m+4)} + \ldots .$$

Nach §. 218. (*X*) ist

$$\partial^{-1}x^{m-1}\,lg(1-x) = \frac{x^m}{m}\,lg(1-x) + \frac{1}{m}\,\partial^{-1}\left(\frac{x^m}{1-x}\right) \text{ und §. 218. } (II)$$

$$\partial^{-1}\left(\frac{x^m}{1-x}\right) = -\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{x^{m-2}}{m-2} - \ldots - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} - lg(1-x), \text{ also}$$

$$-\partial^{-1}x^{m-1}\,lg(1-x) = C - \frac{x^m}{m}\,lg(1-x) + \frac{1}{m}\left[\frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{x}{1} + lg(1-x)\right].$$

Für $x = 0$ wird $C = 0$, folglich

$$(VIII)\begin{cases}\frac{1}{m}\left(\frac{x^m}{m}+\frac{x^{m-1}}{m-1}+\ldots+\frac{x}{1}\right)-\frac{x^m-1}{m}\,lg\,(1-x)\\ =\frac{x^{m+1}}{1.(m+1)}+\frac{x^{m+2}}{2(m+2)}+\frac{x^{m+3}}{3(m+3)}+\frac{x^{m+4}}{4(m+4)}+\frac{x^{m+5}}{5(m+5)}+\frac{x^{m+6}}{6(m+6)}+\ldots\ldots\end{cases}$$

§. 421.

Durch Anwendung der Lehre von den Ableitungen und Zurückleitungen der Funkzionen, lassen sich allgemeine Regeln zur Summirung der Reihen entwickeln. In so fern sich diese Untersuchungen lediglich auf Ableitungen beziehen, so steht ihrer Anwendung nichts entgegen; wenn sie aber von solchen Zurückleitungen abhängen, welche bisher noch nicht entwickelt sind, so müssen sie der weitern Aufführung der Zurückleitungsrechnung vorbehalten bleiben.

Bedeutet A_n jede mögliche Funkzion von n und man bezeichnet durch S das Summenglied der Reihe

$$S = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots . + A_nx^n \quad [I]$$

so erhält man, wenn die Ableitung so genommen wird, als wenn nur x und S veränderlich wären,

$$\partial S = A_1 \quad + 2A_2x \quad + 3A_3x^2 + \ldots + nA_nx^{n-1} \text{ oder}$$

$$x\partial S = A_1x + 2A_2x^2 + 3A_3x^3 + \ldots + nA_nx^n = \int nA_nx^n.$$

Hievon wieder die Ableitung genommen, giebt

$$\partial(x\partial S) = A_1 \quad + 2^2A_2x \quad + 3^2A_3x^2 + \ldots + n^2A_nx^{n-1} \text{ oder}$$

$$x\partial(x\partial S) = A_1x + 2^2A_2x^2 + 3^2A_3x^3 + \ldots + n^2A_nx^n = \int n^2A_nx^n.$$

Geht man auf diese Art weiter, so erhält man, für

$$S = \int A_nx^n,$$

$$(I) \quad x\partial S = \int n\,A_nx^n$$

$$(II) \quad x\partial(x\partial S) = \int n^2A_nx^n$$

$$(III) \quad x\partial(x\partial(x\partial S)) = \int n^3A_nx^n$$

$$(IV) \quad x\partial(x\partial(x\partial(x\partial S))) = \int n^4A_nx^n$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke gelten eben so für begrenzte als für unbegrenzte Reihen.

Aus [I] folgt

$$xS = Ax + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + \ldots + A_nx^{n+1}, \text{ daher wird}$$

$$\partial(xS) = 1.A + 2A_1x + 3A_2x^2 + \ldots + nA_{n-1}x^{n-1} + (n+1)A_nx^n \text{ oder}$$

$$\partial(xS) = \int nA_{n-1}x^{n-1} + (n+1)A_nx^n,$$

oder mit x multiplizirt

$$x\partial(xS) = \int nA_{n-1}x^n + (n+1)A_nx^{n+1}, \text{ folglich}$$

$$(V) \quad \int nA_{n-1}x^n = x\partial(xS) - (n+1)A_nx^{n+1}, \text{ oder auch wegen } \partial(xS) = S + x\partial S$$

$$\int nA_{n-1}x^n = xS + x^2\partial S - (n+1)A_nx^{n+1}.$$

Ganz auf ähnliche Weise findet man, wenn $S' = {}^1\!\int A_nx^n$ gesetzt wird,

$$(VI) \quad {}^1\!\int nA_{n-1}x^n = x\partial(xS') \text{ oder auch}$$

$${}^1\!\int nA_{n-1}x^n = xS' + x^2\partial S'.$$

Noch ist zu bemerken, daß, wenn $y_n = A_n x^{n+1}$ gesetzt wird, so erhält man hieraus $y_{-1} = A_{-1}$, daher §. 359.

(*VII*) $\int A_{n-1} x^n = A_{-1} - A_n x^{n+1} + x \int A_n x^n$ und

(*VIII*) ${}^1\!\int A_{n-1} x^n = A_{-1} + x\, {}^1\!\int A_n x^n$.

§. 422.

Zusatz. Bezeichnet S die bekannte Summe einer Reihe mit abwechselnden Zeichen, also

$$S = A - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots \pm A_n x^n \mp \ldots\ldots$$

so ist auch $\pm A_n x^n = A_n x^n (-1)^n$, und man findet wie im vorigen §.

$$S = \int A_n x^n (-1)^n$$

$$x \partial S = \int n A_n x^n (-1)^n$$

$$x \partial (x \partial S) = \int n^2 A_n x^n (-1)^n$$

$$x \partial (x \partial (x \partial S)) = \int n^3 A_n x^n (-1)^n$$

u. s. w.

Werden die in Klammern enthaltenen Ausdrücke nach (*II*) §. 182. aufgelöst, so erhält man

$$x \partial (x \partial S) = x \partial S + x^2 \partial^2 S$$

$$x \partial (x \partial (x \partial S)) = x \partial S + 3 x^2 \partial^2 S + x^3 \partial^3 S$$

$$x \partial (x \partial (x \partial (x \partial S))) = x \partial S + 7 x^2 \partial^2 S + 6 x^3 \partial^3 S + x^4 \partial^4 S$$

$$x \partial (x \partial (x \partial (x \partial (x \partial S)))) = x \partial S + 15 x^2 \partial^2 S + 25 x^3 \partial^3 S + 10 x^4 \partial^4 S + x^5 \partial^5 S$$

u. s. w. Diese Ausdrücke lassen sich leicht, so weit man will, fortsetzen, weil jeder einzelne Zahlenkoeffizient gefunden wird, wenn man den unmittelbar darüberstehenden mit dem zugehörigen Exponenten von x multiplizirt und dazu den unmittelbar vorhergehenden Koeffizienten addirt. Diese besondere Eigenschaft dieser Koeffizienten läßt sich auch leicht allgemein beweisen.

Eben so, wie man mittelst der allgemeinen Ausdrücke §. 365. aus dem allgemeinen Gliede $(a + bn + cn^2 + dn^3 + \ldots)x^n$ das Summenglied finden konnte, lassen sich auch ähnliche Ausdrücke zur Bestimmung der ganzen Summe finden.

Nach §. 382. ist ${}^1\!\int x^n = \frac{1}{1-x}$, daher, wenn man $S = \frac{1}{1-x}$ setzt, so wird §. 190. (3. Beisp.)

$$\partial^n S = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \text{ daher}$$

$$x \partial S = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x \partial (x \partial S) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2!\, x^2}{(1-x)^3}$$

$$x \partial (x \partial (x \partial S)) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3.2!\, x^2}{(1-x)^3} + \frac{3!\, x^3}{(1-x)^4} \text{ u. s. w., folglich}$$

(*I*) ${}^1\!\int x^n = \frac{1}{1-x}$

(*II*) ${}^1\!\int n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

(*III*) ${}^1\!\int n^2 x^2 = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2!\, x^2}{(1-x)^3}$

$$(IV)\ {}^t\!\int n^3 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3.2!\,x^2}{(1-x)^3} + \frac{3!\,x^3}{(1-x)^4}$$

$$(V)\ {}^t\!\int n^4 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{7.2!\,x^2}{(1-x)^3} + \frac{6.3!\,x^3}{(1-x)^4} + \frac{4!\,x^4}{(1-x)^5}$$

$$(VI)\ {}^t\!\int n^5 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{15.2!\,x^2}{(1-x)^3} + \frac{25.3!\,x^3}{(1-x)^4} + \frac{10.4!\,x^4}{(1-x)^5} + \frac{5!\,x^5}{(1-x)^6}$$

u. s. w.

Hierin $-x$ statt x gesetzt, so erhält man ferner

$${}^t\!\int (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

$${}^t\!\int n(-x)^n = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

$${}^t\!\int n^2 (-x)^n = \frac{-x}{(1+x)^2} + \frac{2!\,x^2}{(1+x)^3}$$

$${}^t\!\int n^3 (-x)^n = \frac{-x}{(1+x)^2} + \frac{3.2!\,x^2}{(1+x)^3} - \frac{3!\,x^3}{(1+x)^4}$$

$${}^t\!\int n^4 (-x)^n = \frac{-x}{(1+x)^2} + \frac{7.2!\,x^2}{(1+x)^3} - \frac{6.3!\,x^3}{(1+x)^4} + \frac{4!\,x^4}{(1+x)^5}$$

u. s. w.

Beispiel. Sucht man ${}^t\!\int (a+nb)^2 x^n$, so wird wegen $(a+nb)^2 = a^2 + 2nb + n^2 b^2$ die gegebene Summe $= a^2.{}^t\!\int x^n + 2b.{}^t\!\int n x^n + b^2.{}^t\!\int n^2 x^n$, daher, wenn man die oben gefundenen Werthe setzt,

$${}^t\!\int (a+nb)^2 x^n = \frac{a^2}{1-x} + \frac{(b+2)\,b\,x}{(1-x)^2} + \frac{2b^2 x^2}{(1-x)^3}.$$

§. 423.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Summengliede $S = \int A_n x^n$ das Summenglied $U = \int (a + nb + n^2 c)\, A_n x^n$ zu finden.

Auflösung. Nach §. 360. ist

$$U = a\int A_n x^n + b\int n A_n x^n + c\int n^2 A_n x^n,\ \text{oder §. 421.}$$

$$U = aS + bx\partial S + cx\partial(x\partial S),\ \text{oder weil}$$

$\partial(x\partial S) = \partial S + x\partial^2 S$, so wird auch

$$U = aS + (b+c)\,x\partial S + cx^2\partial^2 S.$$

Dieser Ausdruck gilt eben sowohl für endliche als für unendliche Reihen.

Beispiel. Es ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots.$ Soll diese Reihe in eine solche verwandelt werden, welche noch in den aufeinander folgenden Gliedern die Koeffizienten $a;\ a+b+c;\ a+2b+4c;\ a+3b+9c;\ \ldots.$ erhält, so ist hier $S = \frac{1}{1-x}$, also $\partial S = \frac{1}{(1-x)^2}$ und $\partial^2 S = \frac{-2}{(1-x)^3}$ daher die ganze Summe der gesuchten Reihe, oder $U = \frac{a}{1-x} + \frac{(b+c)\,x}{(1-x)^2} - \frac{2cx^2}{(1-x)^3}$, oder auch

$${}^t\!\int (a + nb + n^2 c)\,x^n = \frac{a}{1-x} + \frac{(b+c)\,x}{(1-x)^2} - \frac{2cx^2}{(1-x)^3}.$$

Für

Für $c = 0$ wird

$$'\!\int(a + nb)\,x^n = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} = \frac{a-(a-b)x}{(1-x)^2}.$$

§. 424.

1. Zusatz. Für $c = 0$ erhält man

$$U = aS + bx\partial S, \text{ oder auch}$$

$$(I)\ \int(a + nb)A_n x^n = a\int A_n x^n + bx\partial\int A_n x^n$$

und auch

$$(II)\ '\!\int(a + nb)A_n x^n = a'\!\int A_n x^n + bx\partial\,.\,'\!\int A_n x^n.$$

1. Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$a \sin\alpha + (a+b)x \sin(\alpha+\beta) + (a+2b)x^2 \sin(\alpha+2\beta) + (a+3b)x^3 \sin(\alpha+3\beta) + \ldots.$

zu finden.

Man setze die ganze Summe der gegebenen Reihe $= U$ und

$$S = \sin\alpha + x\sin(\alpha+\beta) + x^2 \sin(\alpha+2\beta) + x^3 \sin(\alpha+3\beta) + \ldots.$$

so wird nach §. 388. (V), wenn man $P = 2x\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta$ und $Q = x^2 - 2x\cos\beta + 1$ setzt,

$$S = \frac{P}{Q} \text{ und } \partial S = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{Q^2} \text{ (§. 184. III.).}$$

Nun ist $\partial P = 2\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta$ und $\partial Q = 2x - 2\cos\beta$, und nach §. 420.

$$U = aS + bx\partial S = \frac{aP}{Q} + \frac{bx(Q\partial P - P\partial Q)}{Q^2} \text{ oder}$$

$$U = \frac{aPQ + bx(Q\partial P - P\partial Q)}{Q^2},$$

und wenn hierin die vorstehenden Werthe eingeführt werden, so erhält man

$$U = \frac{(a+bx)(x^2-2x\cos\beta+1) - 2bx(x-\cos\beta)}{(x^2-2x\cos\beta+1)^2}\,2\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta;$$

wo $U = '\!\int(a+nb)x^n \sin(\alpha+n\beta)$ ist.

2. Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$$U = a + \frac{a+b}{2}x + \frac{a+2b}{3}x^2 + \frac{a+3b}{4}x^3 + \frac{a+4b}{5}x^4 + \frac{a+5b}{6}x^5 + \ldots.$$

zu finden, setze man

$$S = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{1}{6}x^5 + \ldots.$$

so wird nach §. 164. (V)

$$S = \frac{-\lg(1-x)}{x}, \text{ daher §. 184.}$$

$$\partial S = \frac{-x\partial\lg(1-x) + \lg(1-x)}{x^2}. \text{ Aber §. 187. } (II)$$

$$\partial\lg(1-x) = \frac{-1}{1-x} \text{ daher}$$

$$\partial S = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\lg(1-x)}{x^2}, \text{ folglich}$$

$$U = -\frac{a\lg(1-x)}{x} + bx\left(\frac{1}{x(1-x)} + \frac{\lg(1-x)}{x^2}\right),$$

oder man findet die gesuchte ganze Summe

$$U = \frac{b}{1-x} + \frac{b-a}{x} lg (1 - x), \text{ oder}$$

$$U = {}^1\!\!\int \frac{a + nb}{1 + n} x^n.$$

Für eine Reihe mit abwechselnden Zeichen erhält man, wenn $-x$ statt x gesetzt wird

$$\int \frac{a + nb}{1 + n} (-x)^n = \frac{b}{x+1} + \frac{a-b}{x} lg (x + 1).$$

3. **Beispiel.** Bedeutet α jede mögliche positive oder negative Zahl und α_n einen Binomialkoeffizienten, so ist §. 382. (I)

$${}^1\!\!\int \alpha_n x^n = (1 + x)^\alpha. \quad [I] \quad \text{Setzt man nun}$$

$$S = (1 + x)^\alpha, \text{ so wird } \partial S = \alpha (1 + x)^{\alpha-1} \text{ daher}$$

$${}^1\!\!\int (a + nb) \alpha_n x^n = a(1 + x)^\alpha + \alpha b x (1 + x)^{\alpha-1}, \text{ oder}$$

$$(I) \quad {}^1\!\!\int (a + nb) \alpha_n x^n = (a + ax + \alpha b x) (1 + x)^{\alpha-1}.$$

Wird α eine positive ganze Zahl $= m$, so hat $\int m_n$ nicht mehr als $m + 1$ Glieder, daher wird in diesem Falle

$$(II) \quad {}^m\!\!\int (a + nb) m_n x^n = (a + ax + mbx) (1 + x)^{m-1}.$$

§. 425.

2. **Zusatz.** Aus der bekannten Summe der Reihe

$$S = a + (a+b) x + (a+2b) x^2 + (a+3b) x^3 + \ldots . + (a + nb) x^n$$

läßt sich nun die Summe U der Reihe

$$U = ac + (a+b)(c+e) x + (a+2b)(c+2e) x^2 + \ldots . + (a+nb)(c+ne) x^n$$

finden, wenn man aus $S = \frac{(a + nb) x^{n+1} - a}{x - 1} - \frac{bx(x^n - 1)}{(x - 1)^2}$ den Werth von ∂S sucht und alsdann $U = cS + ex\partial S$ entwickelt.

Ist hienach das Summenglied S' der Reihe

$$S' = ac + (a + b)(c + e) x + \ldots . + (a + nb) (c + ne) x^n$$

bekannt, so kann man auf eben diese Weise das Summenglied der Reihe

$$U' = acg + (a + b) (c + e) (g + h) x + \ldots . + (a + nb) (c + ne) (g + nh) x^n$$

und für jede noch so große Zahl von Faktoren finden.

§. 426.

Bei der Anwendung der Zurückleitungen der Funkzionen auf die Summirung der Reihen, kommt es vorzüglich darauf an, daß man zuvörderst die Summe einer Reihe kennt, deren Glieder Faktoren der gegebenen Reihe sind. Ist man alsdann im Stande zwischen der bekannten und unbekannten Summe eine Gleichung zu finden, in welcher zugleich die Ableitungen der unbekannten Summe vorkommen, so darf man nur die Zurückleitung dieser Ableitungen nehmen, um die unbekannte Summe zu finden. Durch die folgenden Aufgaben wird das hiebei zu beobachtende Verfahren erläutert.

§. 427.

Aufgabe. Die Reihe $S = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$ nebst dem Summengliede S ist gegeben; man soll daraus das Summenglied U der Reihe

$$U = \frac{A}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha+\beta} x + \frac{A_2}{\alpha+2\beta} x^2 + \frac{A_3}{\alpha+3\beta} x^3 + \ldots + \frac{A_n}{\alpha+n\beta} x^n \text{ finden.}$$

Auflösung. Man setze $\frac{A_n}{\alpha+n\beta} = K_n$, so wird $\alpha K_n + n\beta K_n = A_n$, daher §. 360.

$$\alpha \int K_n x^n + \beta \int n K_n x^n = \int A_n x^n.$$

Nun ist $\int A_n x^n = S$; $\int K_n x^n = U$ und $\int n K_n x^n = x \partial U$ (§. 420. I.), daher wird $\alpha U + \beta x \partial U = S$ [I]; wo U und S Funkzionen von x sind.

Hieraus den Werth von U zu entwickeln, bemerke man, daß

$\partial(\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} U) = \alpha x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} U + \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \partial U$. Hievon die Zurückleitung genommen, giebt (§. 213. I.)

$$\partial^{-1}\left(\alpha x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} U + \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \partial U\right) = \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} U \ [II]$$

wo noch eine näher zu bestimmende beständige Größe hinzuzufügen ist. Wird nun die Gleichung [I] mit $x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}$ multiplizirt, so erhält man

$$\alpha x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} U + \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \partial U = x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} S.$$ Hievon die Zurückleitung, giebt

$$\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} U = \partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} S\right), \text{ folglich}$$

$$U = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} S\right) + C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}, \text{ oder auch}$$

$$(I) \int \frac{A_n}{\alpha+n\beta} x^n = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \int A_n x^n\right) + C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

wo C so zu bestimmen ist, daß $U = \frac{A}{\alpha}$ für $x = 0$ wird.

Weil dieser Ausdruck eben so für unendliche Reihen abgeleitet werden kann, so erhält man auch

$$(II) \ {}^1\!\!\int \frac{A_n}{\alpha+n\beta} x^n = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot {}^1\!\!\int A_n x^n\right) + C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Hienach kann in allen den Fällen, wo man im Stande ist die Zurückleitung von $x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} S$ anzugeben, die Summe U gefunden werden. Ist man nun gleich noch nicht vermögend von jeder gegebenen Funkzion die Zurückleitung zu bestimmen, so wird es doch angemessen seyn hier die Un-

tersuchung, über die Summirung der Reihen durch Zurückleitungen, weiter auszuführen, weil sich alsdann am besten übersehen läßt, wie weit durch Anwendung des hier beobachteten Verfahrens, die Summen gegebener Reihen gefunden werden können oder nicht, und wie weit diese Summirungen von gewissen Zurückleitungen abhängig sind.

§. 428.

1. Zusatz. Für $A_n = 1$ wird das Summenglied $S = \int x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (§. 365.) daher

$$\int \frac{x^n}{\alpha + n\beta} = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \int x^n\right)}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)+C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}, \text{ oder auch}$$

$$(I) \int \frac{x^n}{\alpha + n\beta} = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}+n} - x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{x-1}\right)+C\right],$$

und für $\alpha = \beta = 1$ wird

$$(II) \int \frac{x^n}{1+n} = \frac{1}{x}\left[\partial^{-1}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)+C\right].$$

Sucht man die ganze Summe, so wird $S = {}^{t}\!\int x^n = \frac{1}{1-x}$ (§. 382.), daher

$$(III) \; {}^{t}\!\int \frac{x^n}{\alpha + n\beta} = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{1-x}\right)+C\right].$$

1. Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$U = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7} + \ldots$ zu finden, wird hier $\alpha = \beta = 1$ und

$U = \frac{1}{x}\left[\partial^{-1}\frac{1}{1-x} + C\right]$, daher §. 218. (*II*)

$U = \frac{1}{x}\left[C - lg(1-x)\right]$, oder $xU = C - lg(1-x)$.

Für $x = 0$ wird $U = 1$, daher $0 = C - 0$, also $C = 0$, folglich U, oder

$${}^{t}\!\int \frac{x^n}{1+n} = -\frac{lg(1-x)}{x}.$$

Diesen Ausdruck hätte man auch sogleich nach §. 164. (*V*) finden können.

2. Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$U = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^5}{11} + \frac{x^6}{13} + \ldots$

zu finden, wird hier $\alpha = 1$; $\beta = 2$ und

$$U = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\left[\partial^{-1}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)} + C\right],$$ daher §. 218. (V)

$$U = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\left[lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} + C\right],$$ oder auch

$2x^{\frac{1}{2}}\,U = lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} + C.$ Für $x = o$ wird $U = \frac{1}{\alpha} = 1$, daher $o = o + C$ also $C = o$, folglich U oder

$$\int^{1}\frac{x^n}{1+2n} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\,lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}.$$

§. 429.

2. Zusatz. Wäre die Reihe mit abwechselnden Zeichen

$$S = A - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots\ldots \pm A_n x^n$$

gegeben, und man sucht das Summenglied U der Reihe

$$U = \frac{A}{\alpha} - \frac{A_1}{\alpha+\beta}x + \frac{A_2}{\alpha+2\beta}x^2 - \frac{A_3}{\alpha+3\beta}x^3 + \ldots\ldots \pm \frac{A_n}{\alpha+n\beta}x^n,$$

so erhält man, wie §. 427.,

$\alpha\int K_n x^n(-1)^n + \beta\int nK_n x^n(-1)^n = \int A_n x^n(-1)^n$, also für $S = \int A_n x^n(-1)^n$; $U = \int K_n x^n(-1)^n$ und $x\partial U = \int nK_n x^n(-1)^n$ (§. 423.) daher $\alpha U + \beta x\partial U = S$, folglich U oder

$$\int\frac{A_n}{\alpha+n\beta}x^n(-1)^n = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.\,S\right)+C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$ oder auch

$$(I)\ \int\frac{A_n}{\alpha+n\beta}x^n(-1)^n = \frac{\partial^{-1}\left[x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int A_n x^n(-1)^n\right]+C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Für $A_n = 1$ wird $S = \int x^n(-1)^n = \frac{(-1)^n x^{n+1}+1}{x+1}$ (§. 367.) daher

$$(II)\ \int\frac{(-1)^n x^n}{\alpha+n\beta} = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(\frac{(-1)^n x^{\frac{\alpha}{\beta}+n}+x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{x+1}\right)+C\right],$$

und für $\alpha = \beta = 1$ wird

$$(III)\ \int\frac{(-1)^n x^n}{1+n} = \frac{1}{x}\left[\partial^{-1}\left(\frac{(-1)^n x^{n+1}+1}{x+1}\right)+C\right].$$

Weil der Ausdruck (I) auch für die ganze Summe einer Reihe gilt, so erhält man für $A_n = 1$ und wegen ${}^{\prime}\!\int(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$

$$ {}^{\prime}\!\int\frac{(-1)^n x^n}{\alpha+n\beta} = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{x+1}\right)+C\right]. $$

§. 430.

Das Summenglied der Reihe

$U = \frac{a}{\alpha} + \frac{a+b}{\alpha+\beta}x + \frac{a+2b}{\alpha+2\beta}x^2 + \ldots + \frac{a+nb}{\alpha+n\beta}x^n$ zu finden, wird nach §. 425. $S = \int(a+nb)x^n$. Wollte man den entsprechenden Werth nach §. 376. (II) einführen, so entsteht alsdann eine sehr weitläuftige Zurückleitung. Nimmt man aber (§. 360. und 361.) $S = a\int x^n + b\int n x^n = a\int x^n + bx\partial\int x^n$, so wird (§. 427.)

$$ U = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\partial^{-1}\left(a x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int x^n + b x^{\frac{\alpha}{\beta}}\partial\int x^n\right) \text{ oder} $$

$$ U = \frac{a}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int x^n\right) + \frac{b}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\partial\int x^n\right). $$

Die Ableitung in den Klammern wegzuschaffen, setze man $\partial\int x^n = f'x$ und $x^{\frac{\alpha}{\beta}} = Fx$, so wird $\int x^n = fx$ und $\partial x^{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = F'x$, daher §. 216. ($I$)

$$ \partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\partial\int x^n\right) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}\int x^n - \partial^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int x^n\right) \text{ daher} $$

$$ U = \frac{a}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int x^n\right) + \frac{b}{\beta}\int x^n - \frac{\alpha b}{\beta^2 x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int x^n\right) $$

Nach gehöriger Zusammenziehung wird hienach die ganze Summe U oder

$$ (I)\ \int\frac{a+nb}{\alpha+n\beta}x^n = \frac{b}{\beta}\int x + \frac{a\beta-\alpha b}{\beta^2 x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int x^n\right)+C\right], $$

wo C so zu bestimmen ist, daß $U = \frac{a}{\alpha}$ für $x = o$ wird. Auch ist hier (§. 365.)

$$ \int x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}. $$

Sucht man die ganze Summe, so ist ${}^{t}\!\int x^n = \frac{1}{1-x}$, daher wird

$$(II)\quad {}^{t}\!\int \frac{a+nb}{\alpha+n\beta}x^n = \frac{b}{\beta(1-x)} + \frac{a\beta-\alpha b}{\beta^2 x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{1-x}\right)+C\right].$$

Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$$U = \frac{a}{1} + \frac{a+b}{3}x + \frac{a+2b}{5}x^2 + \frac{a+3b}{7}x^3 = \frac{a+4b}{9}x^4 + \ldots\ldots$$

zu finden, wird hier nach (II) $\alpha = 1$ und $\beta = 2$, daher

$$U = \frac{b}{2(1-x)} - \frac{b-2a}{4x^{\frac{1}{2}}}\left[\partial^{-1}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)}+C\right] \text{ also §. 218. } (V)$$

$$U = \frac{b}{2(1-x)} + \frac{2a-b}{4x^{\frac{1}{2}}}\left[lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}+C\right], \text{ oder auch}$$

$$\frac{4x^{\frac{1}{2}}U}{2a-b} - \frac{4bx^{\frac{1}{2}}}{2(2a-b)(1-x)} = lg\,\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Für $x = o$ wird $U = a$, daher $o = o + C$ also $C = o$, folglich U oder

$${}^{t}\!\int \frac{a+nb}{1+2n}x^n = \frac{b}{2(1-x)} + \frac{2a-b}{4\sqrt{x}}\,lg\,\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

§. 431.

Aufgabe. Das Summenglied der Reihe

$$U = \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{x}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} + \frac{x^2}{(\alpha+2\beta)(\gamma+2\delta)} + \ldots + \frac{x^n}{(\alpha+n\beta)(\gamma+n\delta)} \text{ zu finden.}$$

Auflösung. Man setze $\frac{1}{\gamma+n\delta} = A_n$ und $S = \int\frac{x^n}{\gamma+n\delta}$, so wird nach §. 427. das Summenglied U oder

$$\int\frac{x^n}{(\alpha+n\beta)(\gamma+n\delta)} = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\int\frac{x^n}{\gamma+n\delta}\right)+C\right],$$

wo die beständige Größe so zu bestimmen ist, daß $U = \frac{1}{\alpha\gamma}$ für $x = o$ wird.

§. 432.

Zusatz. Sucht man die ganze Summe U' der Reihe

$$U' = \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{x}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} + \frac{x^2}{(\alpha+2\beta)(\gamma+2\delta)} + \frac{x^3}{(\alpha+3\beta)(\gamma+3\delta)} + \ldots\ldots$$

so wird hier

$${}^{t}\!\int\frac{x^n}{(\alpha+n\beta)(\gamma+n\delta)} = \frac{1}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\left[\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\cdot{}^{t}\!\int\frac{x^n}{\gamma+n\delta}\right)+C\right].$$

Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$U' = \frac{1}{1.2} + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \frac{x^4}{5.6} + \frac{x^5}{6.7} + \frac{x^6}{7.8} + \ldots\ldots$ zu finden, von welcher $\frac{x^n}{(1+n)(2+n)}$ das allgemeine Glied ist, setze man $a = 2$ und $\beta = \gamma = \delta = 1$, so wird

$$ {}^{t}\!\int \frac{x^n}{\gamma + n\delta} = {}^{t}\!\int \frac{x^n}{1+n} = -\frac{lg(1-x)}{x} \text{ (§. 382. XXIV.) also}$$

$$U' = \frac{1}{x^2}\left[\partial^{-1} - \frac{x\, lg(1-x)}{x} + C\right], \text{ oder}$$

$$x^2 U' = -\partial^{-1}\, lg(1-x) + C, \text{ daher §. 216.}$$

$$x^2 U' = x + (1-x)\, lg(1-x) + C.$$

Für $x = o$ wird $U' = \frac{1}{2}$, also $C = o$, daher U' oder

$$ {}^{t}\!\int \frac{x^n}{(1+n)(2+n)} = \frac{x + (1-x)\, lg(1-x)}{x^2}.$$

§. 433.

Aufgabe. Das Summenglied der Reihe

$U = \frac{a}{\alpha} + \frac{a(a+b)}{\alpha(\alpha+\beta)}x + \frac{a(a+b)(a+2b)}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}x^2 + \ldots\ldots + \frac{a(a+b)\ldots(a+nb)}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+n\beta)}x^n$ zu finden.

Auflösung. Statt der gegebenen Reihe setze man

$$U = K + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + \ldots\ldots + K_n x^n,$$

so wird $K = \frac{a}{\alpha}$; $K_1 = \frac{a+b}{\alpha+\beta}K$ und überhaupt $K_n = \frac{a+nb}{\alpha+n\beta}K_{n-1}$.

Hienach ist

$$a K_n + n\beta K_n = a K_{n-1} + n b K_{n-1}, \text{ daher auch §. 360.}$$

$$\alpha \int K_n x^n + \beta \int n K_n x^n = a \int K_{n-1} x_n + b \int n K_{n-1} x^n,$$

oder §. 421. (I) (VII) (V) wegen

$$\int K_n x^n = U \text{ und } K_{-1} = 1$$

$$\alpha U + \beta x \partial U = a - a K_n x^{n+1} + a x U + b x U + b x^2 \partial U - b(n+1) K_n x^{n+2},$$

oder auch

$$(\alpha - a x - b x) U + (\beta - b x) x \partial U = a - (a + nb + b) K_n x^{n+1} \quad [I].$$

Hieraus den Werth von U zu finden, bemerke man, daß nach §. 182. (III)

$$\partial\left[x^{\frac{\alpha}{\beta}}(\beta - bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1} U\right] = -\left(\frac{a}{b} - \frac{\alpha}{\beta} + 1\right) b (\beta - bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}} x^{\frac{\alpha}{\beta}} U + \frac{\alpha}{\beta}(\beta - bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1} x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} U$$

$$+ (\beta - bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1} x^{\frac{\alpha}{\beta}} \partial U \text{ ist; oder}$$

$$= x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} (\beta - bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}} \left[(\alpha - ax - bx) U + (\beta - bx) x \partial U\right],$$

daher

daher wird (§. 213. *I.*)

$$\partial^{-1}\left\{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}}[(\alpha-ax-bx)U+(\beta-bx)x\partial U]\right\}=x^{\frac{\alpha}{\beta}}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1}U.$$

Wird daher die Gleichung [*I*] mit $x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}}$ multiplizirt und die Zurückleitung genommen, so findet man hienach

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1}U=\partial^{-1}\left\{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}}[(a+nb+b)K_n x^{n+1}+a]\right\}+C,$$

oder man findet das Summenglied

$$U=\frac{\partial^{-1}\left\{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}}[(a+nb+b)K_n x^{n+1}+a]\right\}+C}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1}}$$

wo man die beständige Größe C so bestimmt, daß $U=\frac{a}{\alpha}$ für $x=0$ wird.

§. 434.

Zusatz. Sucht man die ganze Summe U' der Reihe

$$U'=\frac{a}{\alpha}+\frac{a(a+b)}{\alpha(\alpha+\beta)}x+\frac{a(a+b)(a+2b)}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}x^2+\frac{a(a+b)\ldots(a+3b)}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+3\beta)}x^3+\ldots\ldots$$

so wird hier

$$(\alpha-ax-bx)U'+(\beta-bx)x\partial U'=a,$$

daher findet man die ganze Summe

$$U'=\frac{a\partial^{-1}\left[x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}}\right]+C}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}(\beta-bx)^{\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}+1}}.$$

Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$$U'=\frac{a}{\alpha}+\frac{a(a+b)}{\alpha.2\alpha}x+\frac{a(a+b)(a+2b)}{\alpha.2\alpha.3\alpha}x^2+\frac{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}{\alpha.2\alpha.3\alpha.4\alpha}x^3+\ldots\ldots$$

setze man hier $\beta=\alpha$, so wird

$$U'=\frac{a\partial^{-1}(\alpha-bx)^{\frac{a}{b}-1}+C}{x(\alpha-bx)^{\frac{a}{b}}}.$$ Nach §. 214. (*I*) ist aber

$$\partial^{-1}(\alpha-bx)^{\frac{a}{b}-1}=C-\frac{(\alpha-bx)^{\frac{a}{b}}}{a},\text{ also}$$

$x(\alpha-bx)^{\frac{a}{b}}U'=C-(\alpha-bx)^{\frac{a}{b}}$. Für $x=0$ wird $U'=\frac{a}{\alpha}$ also $0=C-\alpha^{\frac{a}{b}}$,

daher $C=\alpha^{\frac{a}{b}}$ folglich

$$U' = \frac{\alpha^{\frac{a}{b}} - (\alpha - b x)^{\frac{a}{b}}}{x(\alpha - b x)^{\frac{a}{b}}} \text{ oder auch}$$

$$^{1}\!\!\int \frac{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+nb)}{\alpha\ .\ 2\alpha\ .\ 3\alpha\ \ldots\ldots(n+1)\alpha}\, x^n = \frac{\alpha^{\frac{a}{b}} - (\alpha - b x)^{\frac{a}{b}}}{x(\alpha - b x)^{\frac{a}{b}}}.$$

Für $\alpha = 1$ und $b = -1$ wird

$$^{1}\!\!\int a_{n+1} x^n = \frac{1 - (1+x)^{-a}}{x(1+x)^{-a}} = \frac{(1+x)^a - 1}{x}.$$

§. 435.

Aufgabe. Das Summenglied der Reihe

$$U = \frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha+n\beta)}$$

zu finden.

Auflösung. In dem §. 434. gefundenen Ausdruck

$$(\alpha - a x - b x) U + (\beta - b x) x \partial U = a - (a + n b + b) K_n x^{n+1}$$

werde $a = 1$ und $b = 0$ gesetzt, so findet man für die vorstehende Reihe

$$(\alpha - x) U + \beta x \partial U = 1 - K_n x^{n+1} \quad [I]$$

wo hier $K_n = \frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha+n\beta)}$ wird. Nun ist

$$\partial\left(\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} . e^{-\frac{x}{\beta}} . U\right) = \alpha x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\frac{x}{\beta}} U - x^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-\frac{x}{\beta}} U + \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-\frac{x}{\beta}} \partial U = x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\frac{x}{\beta}} [(\alpha - x) U + \beta x \partial U],$$

daher, wenn man die Zurückleitung nimmt:

$$\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} . e^{-\frac{x}{\beta}} U = \partial^{-1} \left\{ x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} . e^{-\frac{x}{\beta}} [(\alpha - x) U + \beta x \partial U] \right\}.$$

Man multiplizire hienach die Gleichung $[I]$ mit $x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} . e^{-\frac{x}{\beta}}$ und nehme die Zurückleitung, so wird

$$\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} . e^{-\frac{x}{\beta}} U = \partial^{-1} \left[x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} . e^{-\frac{x}{\beta}} (1 - K_n x^{n+1}) \right] + C, \text{ oder}$$

$$U = \frac{\partial^{-1} \left[x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} . e^{-\frac{x}{\beta}} (1 - K_n x^{n+1}) \right] + C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} . e^{-\frac{x}{\beta}}}$$

wo $U = \frac{1}{\alpha}$ für $x = 0$ wird.

§. 436.

Zusatz. Für die ganze Summe U' der Reihe

$$U' = \frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} + \frac{x^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)} + \ldots\ldots$$

findet man $(\alpha - x) U' + \beta x \partial U' = 1$, folglich

$$U' = \frac{\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\right) + C}{\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}.$$

Beispiel. Die ganze Summe der Reihe

$$U' = \frac{1}{3} + \frac{x}{3.4} + \frac{x^2}{3.4.5} + \frac{x^3}{3.4.5.6} + \frac{x^4}{3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

zu finden, wird hier $\alpha = 3$ und $\beta = 1$, daher

$$U' = \frac{\partial^{-1}(x^2 e^{-x}) + C}{x^3 e^{-x}} \text{ also §. 218. } (IX)$$

$x^3 e^{-x} U' = C - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$. Für $x = 0$ wird $U' = \frac{1}{3}$ und $e^{-x} = 1$, daher $0 = -2 + C$, also $C = 2$, daher $x^3 e^{-x} U' = 2 - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$, folglich U' oder

$$\int^{t} \frac{x^n}{3.4.5 \ldots (3+n)} = \frac{2e^x - (x^2 + 2x + 2)}{x^3}.$$

§. 437.

Aufgabe. Die ganze Summe U der Reihe

$$U = \frac{a}{\alpha} + \frac{(a+b)x}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{(a+2b)x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} + \frac{(a+3b)x^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)} + \ldots\ldots\ldots$$

zu finden.

Auflösung. Man setze $S = \frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} + \ldots\ldots\ldots$ so wird §. 424.

$U = aS + bx\partial S$. Setzt man nun

$P = x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$ und $Q = \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$, so wird §. 436.

$S = \frac{\partial^{-1} P}{Q}$ also $\partial S = \frac{PQ - \partial Q . \partial^{-1} P}{Q^2}$, daher

$U = \frac{bxP}{Q} + \frac{aQ - bx\partial Q}{Q^2} \partial^{-1} P$. Ferner ist

$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\beta x}$ also $\frac{bxP}{Q} = \frac{b}{\beta}$ und $\partial Q = \alpha x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} - x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$, daher

$$U = \frac{b}{\beta} + \frac{a\beta - \alpha b + bx}{\beta^2 x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}} \partial^{-1} P \text{ oder}$$

$$U = \frac{b}{\beta} + \frac{a\beta - b(\alpha - x)}{\beta^2 x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}} \left[\partial^{-1}\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\right) + C\right].$$

Beispiel. Sucht man die ganze Summe der Reihe

$U = 1 + \frac{3x}{2!} + \frac{5x^2}{3!} + \frac{7x^3}{4!} + \frac{9x^4}{5!} + \frac{11x^5}{6!} + \ldots\ldots$ so wird hier

$\alpha = \beta = a = 1$ und $b = 2$ daher

$$U = 2 + \frac{2x-1}{x e^{-x}} [\partial^{-1} e^{-x} + C],$$ oder weil $\partial^{-1} e^{-x} = - e^{-x}$ (§. 218.),

so wird auch

$$x U = 2x + \frac{2x-1}{e^{-x}} [C - e^{-x}].$$ Für $x = 0$ wird $U = 1$, und $e^{-x} = 1$ daher

$$0 = 0 - [C - 1],$$ also $C = 1$ daher

$$x U = 2x + \frac{2x-1}{e^{-x}} (1 - e^{-x}) = 2x + (2x-1)(e^{x} - 1),$$ folglich

$$U = {}^1\!\!\int \frac{1+2n}{(1+n)!} x^n = \frac{(2x-1) e^{x} + 1}{x}.$$

§. 438.

Das hier beobachtete Verfahren zur Auffindung der Summen gegebener Reihen, mit Hülfe der Zurückleitungsrechnung, ist von demjenigen verschieden, welches **Euler** zuerst (*Commentarii Acad. Scient. Petropolitanae. Tom. VI. ad Ann.* 1732 *et* 1733. *p.* 68. *Methodus generalis summandi Progressiones*) bekannt machte. Auch kann man hiemit *Euleri Institutionum calculi integralis, Vol. II. Petrop.* 1792. *Cap. XI. p.* 256. *etc.* und *Grüson, Récherches sur la sommation des Séries. Mém. de l'acad. de Berlin,* 1804. *p.* 83. vergleichen.

§. 439.

Es lassen sich noch einige allgemeine Ausdrücke für das Summenglied einer Reihe geben, von welchen die nachstehenden (*I*) und (*II*) zwar sehr einfach sind, bei der Anwendung aber, gewöhnlich auf sehr weitläuftige Ausdrücke führen, daher solche hier nur wegen ihres anderweitigen Gebrauchs angeführt werden sollen.

Bedeutet y_n das allgemeine Glied einer Reihe, und man nimmt, bei den nachstehenden Ableitungen, n als veränderlich an, so wird nach §. 363. (*II*)

$$y_n = y_n$$
$$y_{n-1} = y_n - 1 \frac{\partial y_n}{\partial n} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 y_n}{\partial n^4} - \ldots\ldots$$
$$y_{n-2} = y_n - 2 \frac{\partial y_n}{\partial n} + \frac{2^2}{2!} \frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} - \frac{2^3}{3!} \frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} + \frac{2^4}{4!} \frac{\partial^4 y_n}{\partial n^4} - \ldots\ldots$$
$$y_{n-3} = y_n - 3 \frac{\partial y_n}{\partial n} + \frac{3^2}{2!} \frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} - \frac{3^3}{3!} \frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} + \frac{3^4}{4!} \frac{\partial^4 y_n}{\partial n^4} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die über einander stehenden Glieder addirt, so erhält man nach §. 352. das Summenglied

$$(I) \quad \int y_n = (n+1) y_n - \frac{\partial y_n}{1! \partial n} \int n + \frac{\partial^2 y_n}{2! \partial n^2} \int n^2 - \frac{\partial^3 y_n}{3! \partial n^3} \int n^3 + \frac{\partial^4 y_n}{4! \partial n^4} \int n^4 - \ldots\ldots$$

wo die Reihe offenbar abbrechen muß, wenn eine der höhern Ableitungen von y_n gleich 0 wird.

Es ist ferner, wenn man das allgemeine Glied einer Reihe durch $A_n x^n$ bezeichnet,

$$\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n$$
$$\int A_{n-1} x^n = A_{-1} + A x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^n;$$ daher

$$x\int A_n x^n - A_n x^{n+1} = \int A_{n-1} x^n - A_{-1}$$ oder

$$\int A_{n-1} x^n = x\int A_n x^n - A_n x^{n+1} + A_{-1} \quad [I].$$

Nach der vorstehenden Entwickelung erhält man aber, wenn A_n anstatt y_n gesetzt wird, $A_{n-1} = A_n - \frac{\partial A_n}{1!\partial n} + \frac{\partial^2 A_n}{2!\partial n^2} + \frac{\partial^3 A_n}{3!\partial n^3} + \ldots\ldots$ oder mit x^n multiplizirt und dann von jedem Gliede die Summe genommen, giebt

$$\int A_{n-1} x^n = \int A_n x^n - \int x^n \frac{\partial A_n}{\partial n} + \int \frac{x^n \partial^2 A_n}{2!\partial n^2} - \int \frac{x^n \partial^3 A_n}{3!\partial n^3} + \ldots\ldots$$ oder nach [I]

$$x\int A_n x^n - A_n x^{n+1} + A_{-1} = \int A_n x^n - \int x^n \frac{\partial A_n}{\partial n} + \int \frac{x^n \partial^2 A_n}{2!\partial n^2} - \ldots\ldots$$ folglich

$$(II)\ \int A_n x^n = \frac{1}{x-1}\left[A_n x^{n+1} - A_{-1} - \int x^n \frac{\partial A_n}{\partial n} + \int \frac{x^n \partial^2 A_n}{2!\partial n^2} - \int \frac{x^n \partial^3 A_n}{3!\partial n^3} + \int \frac{x^n \partial^4 A_n}{4!\partial n^4} - \ldots\ldots\right].$$

Beispiel. Für $A_n = \alpha + \beta n^2$ wird $\frac{\partial A_n}{\partial n} = 2\beta n$; $\frac{\partial^2 A_n}{\partial n} = 2\beta$; $\frac{\partial^3 A_n}{\partial n^3} = 0$, daher

$$\int(\alpha + \beta n^2) x^n = \frac{(\alpha + \beta n^2) x^{n+1} - \alpha - \beta - 2\beta \int n x^n + \beta \int x^n}{x-1},$$

wo die Werthe von $\int n x^n$ und $\int x^n$ nach §. 375. bekannt sind.

§. 440.

Zur Erlangung eines allgemeinen Ausdrucks, um aus jedem gegebenen allgemeinen Gliede y_n das entsprechende Summenglied in mehrern Fällen zu finden, wenn durch die bisherige Untersuchungen keine angemessene Ausdrücke erlangt werden, setze man $y_n = Fn$, weil y_n eine Funkzion des Stellenzeigers n ist. Daher ist auch $y_{n-1} = F(n-1)$, und man erhält nach §. 194. (II) für $x = n$ und $h = 1$, wenn hier n als veränderlich angenommen wird,

$$y_{n-1} = y_n - F^1 n + \frac{1}{2!}F^2 n - \frac{1}{3!}F^3 n + \frac{1}{4!}F^4 n - \ldots\ldots$$

daher §. 360.

$$\int y_{n-1} = \int y_n - \int F^1 n + \frac{1}{2!}\int F^2 n - \frac{1}{3!}\int F^3 n + \ldots\ldots$$

oder weil $\int y_{n-1} = \int y_n - y_n + y_{-1}$ (§. 359.), so wird

$$\int F^1 n = y_n - y_{-1} + \frac{1}{2!}\int F^2 n - \frac{1}{3!}\int F^3 n + \frac{1}{4!}\int F^4 n - \ldots\ldots$$

Man setze $F^1 n = fn$, so wird $F^2 n = f^1 n$; $F^3 n = f^2 n$; $F^4 n = f^3 n$; …. und $y_n = Fn = f^{-1} n$ (§. 213.). Auch kann man, weil y_{-1} eine beständige, von n unabhängige Größe ist, solche unter dem Ausdruck C begreifen und die Bestimmung derselben noch besonders vorbehalten. Hienach wird

$$(I)\ \int fn = C + f^{-1} n + \frac{1}{2!}\int f^1 n - \frac{1}{3!}\int f^2 n + \frac{1}{4!}\int f^3 n - \frac{1}{5!}\int f^4 n + \ldots\ldots$$

Hievon die aufeinander folgenden Ableitungen genommen und bemerkt, daß $\partial \int fn = \int f^1 n$ ist, weil beide Ausdrücke einerlei Reihe geben, so findet man

$$\int f^1 n = f\,n + \frac{1}{2!}\int f^2 n - \frac{1}{3!}\int f^3 n + \frac{1}{4!}\int f^4 n - \ldots\ldots$$

$$\int f^2 n = f^1 n + \frac{1}{2!}\int f^3 n - \frac{1}{3!}\int f^4 n + \frac{1}{4!}\int f^5 n - \ldots\ldots$$

$$\int f^3 n = f^2 n + \frac{1}{2!}\int f^4 n - \frac{1}{3!}\int f^5 n + \frac{1}{4!}\int f^6 n - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Werthe statt $\int f^1 n$; $\int f^2 n$; $\int f^3 n$; .... in die Reihe (I) gesetzt, so findet man, wenn A; A_1; A_2; .... noch näher zu bestimmende Koeffizienten bezeichnen:

$$\int fn = C + f^{-1}n + Afn + A_1 f^1 n + A_2 f^2 n + A_3 f^3 n + \ldots \quad [I]$$

Hierin die aus den vorstehenden Gleichungen entwickelte Werthe gesetzt, giebt

$$C = C$$

$$f^{-1}n = -C + \int fn - \frac{1}{2!}\int f^1 n + \frac{1}{3!}\int f^2 n - \frac{1}{4!}\int f^3 n + \ldots\ldots$$

$$Afn = \qquad + A\int f^1 n - \frac{A}{2!}\int f^2 n + \frac{A}{3!}\int f^3 n - \ldots\ldots$$

$$A_1 f^1 n = \qquad + A_1\int f^2 n - \frac{A_1}{2!}\int f^3 n + \ldots$$

$$A_2 f^2 n = \qquad + A_2\int f^3 n - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn man die übereinander stehenden Glieder addirt,

$$\int fn = \int fn \begin{array}{r|} -\frac{1}{2!} \\ +A \\ \\ \\ \\ \end{array} \int f^1 n \begin{array}{r|} +\frac{1}{3!} \\ -\frac{A}{2!} \\ +A_1 \\ \\ \\ \end{array} \int f^2 n \begin{array}{r|} -\frac{1}{4!} \\ +\frac{A}{3!} \\ -\frac{A_1}{2!} \\ +A_2 \\ \\ \end{array} \int f^3 n \begin{array}{r|} +\frac{1}{5!} \\ -\frac{A}{4!} \\ +\frac{A_1}{3!} \\ -\frac{A_2}{2!} \\ +A_3 \end{array} \int f^4 n - \ldots\ldots$$

daher nach §. 52.

$$A = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \frac{A}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$A_2 = \frac{A_1}{2!} - \frac{A}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$$A_3 = \frac{A_2}{2!} - \frac{A_1}{3!} + \frac{A}{4!} - \frac{1}{5!}$$

$$A_4 = \frac{A_3}{2!} - \frac{A_2}{3!} + \frac{A_1}{4!} - \frac{A}{5!} + \frac{1}{6!}$$

$$A_5 = \frac{A_4}{2!} - \frac{A_3}{3!} + \frac{A_2}{4!} - \frac{A_1}{5!} + \frac{A}{6!} - \frac{1}{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hienach findet man

$$A = \frac{1}{2}$$
$$A_1 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{6}; \quad A_2 = 0;$$
$$A_3 = -\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{30}; \quad A_4 = 0;$$
$$A_5 = +\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{42}; \quad A_6 = 0;$$
$$A_7 = -\frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{30}; \quad A_8 = 0;$$
$$A_9 = +\frac{1}{10!}\cdot\frac{5}{66}; \quad A_{10} = 0;$$

u. s. w.

Hieraus folgt, daß die Koeffizienten mit geraden Stellenzahlen = o werden. Das Gesetz, nach welchem die übrigen Koeffizienten fortschreiten, wird hienächst (§. 586.) noch besonders entwickelt werden. Die Faktoren $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; . . . . welche auch schon §. 67. in der Reihe für die Cotangente vorgekommen sind, finden eine vielfältige Anwendung in der Analysis, und heißen von ihrem Erfinder Jacob **Bernoulli** die **bernoullischen Zahlen**, welcher zuerst von diesen Zahlen bei Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen Gebrauch machte. M. s. *Jacobi Bernoulli, Ars conjectandi. Basileae* 1713. *Pars II. p.* 97, wo die fünf ersten dieser Zahlen vorkommen. In den *Comment. Petrop. novis T. XIV.* hat **Euler** die ersten 17 und in den hindenburgischen Sammlungen combinatorisch= analytischer Abhandlungen, 2. Samml. S. 336., ist von H. Prof. **Rothe** noch die achtzehnte dieser Zahlen mitgetheilt worden, welcher derselbe hienächst in der allgem. Literaturzeitung vom März 1817. No. 63. noch die übrigen, bis zur fünf und zwanzigsten, hinzufügte.

Wegen ihres häufigen Gebrauchs sind diese Zahlen hier beigefügt, auch hat man für dieselben eine besondere Bezeichnung gewählt, so daß B_1 die erste, B_2 die zweite und überhaupt B_n die $n$te bernoullische Zahl bedeutet.

$$B_1 = \frac{1}{6} = 0,166\ 666\ 666\ 6666$$
$$B_2 = \frac{1}{30} = 0,033\ 333\ 333\ 3333$$
$$B_3 = \frac{1}{42} = 0,023\ 809\ 523\ 8095$$
$$B_4 = \frac{1}{30} = 0,033\ 333\ 333\ 3333$$
$$B_5 = \frac{5}{66} = 0,075\ 757\ 575\ 7575$$
$$B_6 = \frac{691}{2730} = 0,253\ 113\ 553\ 1135$$
$$B_7 = \frac{7}{6} = 1,166\ 666\ 666\ 6666$$
$$B_8 = \frac{3617}{510} = 7,092\ 156\ 862\ 7451$$

$$B_9 = \frac{43867}{798} = 54,973\ 684\ \ 210\ 5263$$

$$B_{10} = \frac{174611}{330} = 529,124\ 242\ \ 424\ 2424$$

$$B_{11} = \frac{854513}{138} = 6192,123\ 188\ \ 405\ 7971.$$

$$B_{12} = \frac{236364091}{2730} = 86580,253\ 113\ \ 553\ 1135$$

$$B_{13} = \frac{8553103}{6} = 1425517,166\ 666\ \ 666\ 6666$$

$$B_{14} = \frac{23749\ 461029}{870} = 27298231,067\ 816\ \ 091\ 9540$$

$$B_{15} = \frac{8\ 615841\ 276005}{14322};\quad B_{16} = \frac{7\ 709321\ 041217}{510}$$

$$B_{17} = \frac{2\ 577687\ 858367}{6};\quad B_{18} = \frac{26\ 315271\ 553053\ 477373}{1919190}$$

$$B_{19} = \frac{2929\ 993913\ 841559}{6};\quad B_{20} = \frac{261\ 082718\ 496449\ 122051}{13530}$$

$$B_{21} = \frac{1520\ 097643\ 918070\ 802691}{1806}$$

$$B_{22} = \frac{27833\ 269579\ 301024\ 235023}{690}$$

$$B_{23} = \frac{596451\ 111593\ 912163\ 277961}{282}$$

$$B_{24} = \frac{5609\ 403368\ 997817\ 686249\ 127547}{46410}$$

$$B_{26} = \frac{495\ 057205\ 241079\ 648212\ 477525}{66}.$$

Hienach wird $A = \frac{1}{2}$; $A_1 = \frac{1}{2!} B_1$; $A_3 = \frac{-1}{4!} B_2$; $A_5 = \frac{1}{6!} B_3$; $A_7 = -\frac{1}{8!} B_4$; u. s. w., daher findet man nach [I]

$$(II)\ \int fn = C + f^{-1}n + \tfrac{1}{2} fn + \frac{B_1}{2!} f^1 n - \frac{B_2}{4!} f^3 n + \frac{B_3}{6!} f^5 n - \frac{B_4}{8!} f^7 n$$
$$+ \frac{B_5}{10!} f^9 n - \frac{B_6}{12!} f^{11} n + \ldots \mp \frac{B_r}{(2r)!} f^{2r-1} n \pm \ldots$$

Diese Reihe muß abbrechen, wenn eine von den Ableitungen $= 0$ wird, und es kann alsdann nach derselben das Summenglied jeder Reihe gefunden werden, deren allgemeines Glied $y_n = fn$ nebst den Ableitungen und der Zurückleitung von fn bekannt sind.

Setzt man $fn = y_n$, so wird $f^1 n = \frac{\partial y_n}{\partial n}$ u. s. w., daher erhält man auch

$$(III)\ \int y_n = C + \partial^{-1} y_n + \tfrac{1}{2} y_n + \frac{B_1}{2!} \frac{\partial y_n}{\partial n} - \frac{B_2}{4!} \frac{\partial^3 y_n}{\partial n^3} + \frac{B_3}{6!} \frac{\partial^5 y_n}{\partial n^5} - \ldots$$

Noch folgen hier die gemeinen Logarithmen der bernoullischen Zahlen

$Lg\, B_1 = 0,221\ 8487\ 496 - 1$
$Lg\, B_2 = 0,522\ 8787\ 453 - 2$
$Lg\, B_3 = 0,376\ 7507\ 096 - 2$

Lg

$Lg\, B_4$	$=$	0, 522 8787 453 — 2
$Lg\, B_5$	$=$	0, 879 4260 688 — 2
$Lg\, B_6$	$=$	0, 403 3154 004 — 1
$Lg\, B_7$	$=$	0, 066 9467 896
$Lg\, B_8$	$=$	0, 850 7783 387
$Lg\, B_9$	$=$	1, 740 1350 433
$Lg\, B_{10}$	$=$	2, 723 5576 597
$Lg\, B_{11}$	$=$	3, 791 8359 878
$Lg\, B_{12}$	$=$	4, 937 4188 514
$Lg\, B_{13}$	$=$	6, 153 9724 516
$Lg\, B_{14}$	$=$	7, 436 1345 055
$Lg\, B_{15}$	$=$	8, 779 2940 212
$Lg\, B_{16}$	$=$	10, 179 4459 554
$Lg\, B_{17}$	$=$	11, 633 0790 754
$Lg\, B_{18}$	$=$	13, 137 0898 829.

§. 441.

Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe sey $(a+nh)^r$; man soll das Summenglied derselben finden.

Auflösung. Man setze $fn = (a+nh)^r$, so wird §. 190.

$f^1 n = r(a+nh)^{r-1}$; $f^2 n = 2!\, r_2 (a+nh)^{r-2}$; $f^3 n = 3!\, r_3 (a+nh)^{r-3}$; ......
und (§. 214. *I.*)

$$f^{-1} n = \frac{(a+nh)^{r+1}}{(r+1)h}, \text{ daher nach §. 440.}$$

$$\int (a+nh)^r$$
$$= C + \frac{(a+nh)^{r+1}}{(r+1)h} + \frac{(a+nh)^r}{2} + \tfrac{1}{2} B_1 r (a+nh)^{r-1} - \tfrac{1}{4} B_2 r_3 (a+nh)^{r-3} + \tfrac{1}{6} B_3 r_5 (a+nh)^{r-5} - \ldots\ldots$$

Um C zu bestimmen bemerke man, daß für $n = 0$ (§. 352.) ${}^0\!\int (a+nh)^r = a^r$ wird. Setzt man nun in vorstehenden Ausdruck $n = 0$, so wird

$$a^r = C + \frac{a^{r+1}}{(r+1)h} + \frac{a^r}{2} + \tfrac{1}{2} B_1 r a^{r-1} - \tfrac{1}{4} B_2 r_3 a^{r-3} + \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$C = -\frac{a^{r+1}}{(r+1)h} + \frac{a^r}{2} - \tfrac{1}{2} B_1 r a^{r-1} + \tfrac{1}{4} B_2 r_3 a^{r-3} - \tfrac{1}{6} B_3 r_5 a^{r-5} + \ldots\ldots$$

Diesen Werth statt C in den vorstehenden Ausdruck gesetzt und abgekürzt, giebt

$$(I)\ \int (a+nh)^r = \frac{(a+nh)^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)h} + \frac{(a+nh)^r + a^r}{2}$$
$$+ \frac{(a+nh)^r}{2}\left[\frac{B_1 r h}{a+nh} - \frac{B_2 r_3 h^3}{2(a+nh)^3} + \frac{B_3 r_5 h^5}{3(a+nh)^5} - \frac{B_4 r_7 h^7}{4(a+nh)^7} + \ldots\ldots\right]$$
$$- \frac{a^r}{2}\left[\frac{B_1 r h}{1a} - \frac{B_2 r_3 h^3}{2a^3} + \frac{B_3 r_5 h^5}{3a^5} - \frac{B_4 r_7 h^7}{4a^7} + \frac{B_5 r_9 h^9}{5a^9} - \ldots\ldots\right]$$

Hierin 1, 2, 3 . . . . statt r gesetzt, giebt

$$\int(a+nh) = \frac{(a+nh)^2-a^2}{2h} + \frac{2a+nh}{2}$$

$$\int(a+nh)^2 = \frac{(a+nh)^3-a^3}{3h} + \frac{(a+nh)^2+a^2}{2} + B_1 nh$$

$$\int(a+nh)^3 = \frac{(a+nh)^4-a^4}{4h} + \frac{(a+nh)^3+a^3}{2} + \tfrac{3}{2} B_1 nh\,(2a+nh) \text{ u. s. w.}$$

Anstatt der Reihe (I) erhält man auch

$$(II)\ \int(a+nh)^r = \frac{(a+nh)^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)h} + \frac{(a+nh)^r+a^r}{2} + B_1 rh\frac{(a+nh)^{r-1}-a^{r-1}}{2} - B_2 r_3 h^3 \frac{(a+nh)^{r-3}-a^{r-3}}{4}$$
$$+ B_3 r_5 h^5 \frac{(a+nh)^{r-5}-a^{r-5}}{6} - B_4 r_7 h^7 \frac{(a+nh)^{r-7}-a^{r-7}}{8} + \ldots\ldots$$

Für $h = -1$ findet man

$$(III)\ \int(a-n)^r = \frac{(a-n)^r+a^r}{2} - \frac{(a-n)^{r+1}-a^{r+1}}{r+1} - B_1 r\frac{(a-n)^{r-1}-a^{r-1}}{2} + B_2 r_3 \frac{(a-n)^{r-3}-a^{r-3}}{4}$$
$$- B_3 r_5 \frac{(a-n)^{r-5}-a^{r-5}}{6} + B_4 r_7 \frac{(a-n)^{r-7}-a^{r-7}}{8} - \ldots\ldots$$

Diese Reihen brechen ab, wenn r eine positive ganze Zahl ist.

§. 442.

Zusatz. Für $q = h = 1$ wird nach (II)

$$\int(n+1)^r = \frac{(n+1)^{r+1}-1}{r+1} + \frac{(n+1)^r+1}{2} + B_1 r\frac{(n+1)^{r-1}-1}{2} - B_2 r_3 \frac{(n+1)^{r-3}-1}{4} + B_3 r_5 \frac{(n+1)^{r-5}-1}{6} - \ldots$$

und für $a = 0$ und $h = 1$ wird

$$\int n^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + B_1 r\frac{n^{r-1}-0^{r-1}}{2} - B_2 r_3 \frac{n^{r-3}-0^{r-3}}{4} + B_3 r_5 \frac{n^{r-5}-0^{r-5}}{6} - B_4 r_7 \frac{n^{r-7}-0^{r-7}}{8} + \ldots$$

Die Ausdrücke 0^{r-1}; 0^{r-3}; . . . . müssen hier beibehalten werden, weil $0^0 = 1$ ist.

Um bestimmt anzugeben, bei welchen Gliedern diese Reihen abbrechen müssen und die Bezeichnung mit Nullen zu vermeiden, unterscheide man die geraden von den ungeraden Exponenten; alsdann wird

$$(I)\ \int(n+1)^{2r} = \frac{(n+1)^{2r+1}-1}{2r+1} + \frac{(n+1)^{2r}+1}{2}$$
$$+ B_1 2r\frac{(n+1)^{2r-1}-1}{2} - B_2(2r)_3 \frac{(n+1)^{2r-3}-1}{4} + B_3(2r)_5 \frac{(n+1)^{2r-5}-1}{6} - \ldots \mp B_r(2r)_{2r-1}\frac{(n+1)-1}{2r}$$

$$(II)\ \int(n+1)^{2r+1} = \frac{(n+1)^{2r+2}-1}{2r+2} + \frac{(n+1)^{2r+1}+1}{2}$$
$$+ B_1(2r+1)\frac{(n+1)^{2r}-1}{2} - B_2(2r+1)_3 \frac{(n+1)^{2r-2}-1}{4} + B_3(2r+1)_5 \frac{(n+1)^{2r-4}-1}{6} - \ldots$$
$$\ldots \mp B_r(2r+1)_{2r-1}\frac{(n+1)^2-1}{2r}$$

$$(III)\ \int n^{2r} = \frac{n^{2r+1}}{2r+1} + \frac{n^{2r}}{2} + B_1 2r\frac{n^{2r-1}}{2} - B_2(2r)_3 \frac{n^{2r-3}}{4} + B_3(2r)_5 \frac{n^{2r-5}}{6}$$
$$- B_4(2r)_7 \frac{n^{2r-7}}{8} + \ldots \mp B_r(2r)_{2r-1}\frac{n}{2r}$$

$$(IV)\ \int n^{2r+1} = \frac{n^{2r+2}}{2r+2} + \frac{n^{2r+1}}{2} + B_1(2r+1)\,\frac{n^{2r}}{2} - B_2(2r+1)_3\,\frac{n^{2r+2}}{4} + B_3(2r+1)_5\,\frac{n^{2r+4}}{6}$$
$$- B_4(2r+1)_7\,\frac{n^{2r-6}}{8} + \ldots\ldots \mp B_r(2r+1)_{2r-1}\,\frac{n^2}{2r}$$

wo durchgängig die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades r gelten.

Setzt man 1, 2, 3 .... statt r, so wird

$$\int n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$
$$\int n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + 2B_1\,\frac{n}{2}$$
$$\int n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + 3B_1\,\frac{n^2}{2}$$
$$\int n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + 4B_1\,\frac{n^3}{2} - 4B_2\,\frac{n}{4}$$
$$\int n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + 5B_1\,\frac{n^4}{2} - 10B_2\,\frac{n^2}{4} \text{ u. s. w.}$$

Hienach lassen sich die Summenglieder von den Potenzen der natürlichen Zahlen leichter als nach §. 364. finden.

Die Summenglieder von den Potenzen der natürlichen Zahlen, mit abwechselnden Zeichen, findet man §. 588.

§. 443.

Zur Vergleichung der bernoullischen Zahlen unter einander, setze man $n = 1$, §. 442. (III), so wird

$$^1\int n^{2r} = \frac{1}{2r+1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(2r)B_1 - \tfrac{1}{4}(2r)_3 B_2 + \tfrac{1}{6}(2r)_5 B_3 - \ldots\ldots$$

oder weil $^1\int n^{2r} = 1$ ist (§. 352. V.), so wird

$$\frac{2r-1}{2(2r+1)} = \frac{2r}{2}B_1 - \frac{(2r)_3}{4}B_2 + \frac{(2r)_5}{6}B_3 - \ldots$$

oder durchgängig mit $2r+1$ multiplizirt

$$\frac{2r-1}{2} = (2r+1)_2 B_1 - (2r+1)_4 B_2 + (2r+1)_6 B_3 - \ldots\ldots \mp (2r+1)_{2n} B_n \pm \ldots\ldots$$

oder, wenn n statt r gesetzt wird, so muß die Reihe abbrechen, wenn n eine positive ganze Zahl ist, und man findet:

$$\frac{2n-1}{2} = (2n+1)_2 B_1 - (2n+1)_4 B_2 + (2n+1)_6 B_3 - \ldots \mp (2n+1)_{2n} B_n,$$

und wenn mit ∓ 1 durchgängig multiplizirt wird,

$$(I)\quad (2n+1)_1 B_n = (2n+1)_3 B_{n-1} - (2n+1)_5 B_{n-2} + (2n+1)_7 B_{n-3} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \mp (2n+1)_{2n-3} B_2 \pm (2n+1)_{2n-1} B_1 \mp \frac{2n-1}{2},$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Hierin nach einander 1, 2, 3 . . . statt n gesetzt, giebt:

$$3B_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$5B_2 = 5_3 B_1 - \tfrac{1}{2}$$
$$7B_3 = 7_3 B_2 - 7_5 B_1 + \tfrac{1}{2}$$
$$9B_4 = 9_3 B_3 - 9_5 B_2 + 9_7 B_1 - \tfrac{1}{2}$$
$$11B_5 = 11_3 B_4 - 11_5 B_3 + 11_7 B_2 - 11_9 B_1 + \tfrac{1}{2}$$

u. s. w.

Einen für die Berechnung bequemen Ausdruck findet man §. 847.

Wegen anderer die bernoullischen Zahlen betreffenden allgemeinen Ausdrucke s. m. §. 505. 586. und 846.

Elftes Kapitel.

Von den wiederkehrenden Reihen.

---

§. 444.

Für jede gebrochene Funkzion läßt sich nach §. 54. die entsprechende Reihe bilden, und man erhält z. B.

$$\frac{3+2x}{5+7x} = \frac{3}{5} - \frac{11}{5.5}x + \frac{7.11}{5^3}x^2 - \frac{7^2.11}{5^4}x^3 + \ldots.$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^2 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Diejenige gebrochene Funkzion, durch deren Entwickelung eine Reihe entsteht, heißt der **erzeugende** oder **Urbruch** (*fraction génératrice*) dieser Reihe, welcher mit der ganzen Summe derselben einerlei ist (§. 355.).

Um zu übersehen, wie die Koeffizienten des erzeugenden Bruches, mit den Koeffizienten der entsprechenden Reihe zusammenhängen, setze man, weil jeder gebrochenen Funkzion leicht die Gestalt gegeben werden kann, daß das erste Glied im Nenner = 1 wird

$$\frac{a'+b'x}{1-ax-bx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

so findet man (§. 56.)

$$A = a'$$
$$B = aA + b'$$
$$C = aB + bA$$

$$D = aC + bB$$
$$E = aD + bC$$
$$F = aE + bD$$
u. s. w.

Aus dieser Folge der Koeffizienten übersieht man leicht, daß hier jeder derselben, vom dritten an, auf einerlei Art aus den beiden unmittelbar vorhergehenden entsteht, wenn diese einzeln in umgekehrter Ordnung mit den Größen a; b; multiplizirt werden. Diese Bildung der Koeffizienten einer Reihe, mit Hülfe der unmittelbar vorhergehenden, hat veranlaßt dergleichen Reihen **wiederkehrende, rücklaufende** oder **recurrente Reihen** zu nennen, weil in jedem Koeffizient die vorhergehenden wiederkehren.

Es ist daher eine wesentliche Eigenschaft der wiederkehrenden Reihen, daß die einzelnen Koeffizienten derselben, aus den vorhergehenden gebildet werden. Auch gehören hierher alle diejenigen Reihen, welche aus der Entwickelung einer gebrochenen Funkzion entstehen.

Wäre ganz allgemein

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \ldots + q'x^{n-1}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - \ldots\ldots - qx^n}$$

der erzeugende Bruch und

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n + \ldots$$

die entsprechende Reihe, so findet man (§. 62.)

$$A = a'$$
$$A_1 = aA + b'$$
$$A_2 = aA_1 + bA + c'$$
$$A_3 = aA_2 + bA_1 + cA + d'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-1} = aA_{n-2} + bA_{n-3} + \ldots + pA + q'$$
$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2} + cA_{n-3} + \ldots + pA_1 + qA$$
$$A_{n+1} = aA_n + bA_{n-1} + cA_{n-2} + \ldots + pA_2 + qA_1$$
$$A_{n+2} = aA_{n+1} + bA_n + cA_{n-1} + \ldots + pA_3 + qA_2$$
$$A_{n+3} = aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n + \ldots + pA_4 + qA_3$$
u. s. w.

Hieraus folgt, daß der Koeffizient A_n und alle folgende A_{n+1}; A_{n+2}; .... auf einerlei Weise dadurch erhalten werden, daß eine bestimmte Anzahl von den unmittelbar vorhergehenden, in umgekehrter Ordnung, einzeln mit den Größen

$$a;\ b;\ c;\ d;\ \ldots\ p;\ q;$$

multiplizirt werden.

Dieser Ausdruck heißt das **Beziehungsmaaß** oder die **Relationsscale** der wiederkehrenden Reihe, und wird gefunden, wenn man die Koeffizienten der veränderlichen Größen x im Nenner des Urbruchs, nach ihrer Folge, mit entgegengesetzten Zeichen, neben einander schreibt.

Auch folgt ferner hieraus, daß, wenn der Nenner des erzeugenden Bruchs aus $m+1$ Gliedern besteht, so hat das Beziehungsmaaß ein Glied weniger, also m Glieder. Alle auf dieses

$m$te Glied der wiederkehrenden Reihe folgende Koeffizienten, werden auf einerlei Weise aus den vorhergehenden und dem Beziehungsmaaße bestimmt; die m ersten Glieder der Reihe sind aber zugleich von den Koeffizienten im Zähler des Urbruchs abhängig.

Sind einzelne Glieder im Nenner des Urbruchs $= 0$, so werden diese ebenfalls im Beziehungsmaaße mit 0 bemerkt. So ist z. B. von dem Urbruch

$$\frac{1 - 5x}{1 - 3x + 4x^2 - 6x^4 + x^6}$$

das Beziehungsmaaß

$$3;\ -4;\ 0;\ 6;\ 0;\ -1.$$

Unter der Voraussetzung, daß die höchste Potenz der veränderlichen Größe im Nenner des erzeugenden Bruches wenigstens um eine Einheit größer ist, als in dem zugehörigen Zähler, heißt die entsprechende Reihe eine **gemeine** oder **einfache wiederkehrende Reihe**, um sie von denjenigen zu unterscheiden, welche noch auf andere Weise gebildet werden können.

§. 445.

Sind eben so viel erste Glieder einer Reihe gegeben, als das gegebene Beziehungsmaaß Glieder enthält, so läßt sich alsdann jeder folgende Koeffizient der Reihe finden, wenn man die nächst vorhergehenden Koeffizienten in umgekehrter Folge mit den Gliedern des Beziehungsmaaßes einzeln multiplizirt und diese Produkte addirt. So erhält man die Koeffizienten der Reihe:

$$1 - x + 7x^2 - 24x^3 + 87x^4 - 316x^5 + 1146x^6 - \ldots$$

aus den drei ersten Gliedern

$$1;\ -x;\ +7x^2;\ \text{und dem Beziehungsmaaße}\ -3;\ +2;\ -1;$$

durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
-3\ .\ 7 + 2\,.(-1) - 1\ .\ 1 &= -24;\\
-3\,.(-24) + 2\ .\ 7 - 1(-1) &= 87;\\
-3\ .\ 87 + 2\,(-24) - 1\ .\ 7 &= -316;\\
-3\,.(-316) + 2\ .\ 87 - 1\,(-24) &= 1146;
\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 446.

Besteht das Beziehungsmaaß einer wiederkehrenden Reihe nur aus einem Gliede, so heißt sie eine Reihe der **ersten Ordnung**; aus zwei Gliedern, eine Reihe der **zweiten Ordnung**, und wenn das Beziehungsmaaß aus m Gliedern besteht, so ist die wiederkehrende Reihe von der **$m$ten Ordnung**.

Hieraus folgt ferner, mit Rücksicht auf die vorhergegangene Auseinandersetzung, daß, wenn die Potenzen der veränderlichen Größen nach den natürlichen Zahlen fortschreiten, allemal eine Reihe der $m$ten Ordnung entsteht, wenn im Nenner des erzeugenden Bruchs die höchste Potenz der veränderlichen Größe x^m ist. Dies gilt noch, wenn einer oder mehrere Koeffizienten von den $m+1$ Gliedern des Nenners $= 0$ werden, weil alsdann im Beziehungsmaaße die entsprechenden Glieder ebenfalls $= 0$ gesetzt und mit aufgeführt werden. So ist

$a' + b'x - ba'x^2 - bb'x^3 + b^2a'x^4 + b^2b'x^5 - b^3a'x^6 - b^3b'x^7 + \ldots$
eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung und ihr Beziehungsmaaß

$$- o; - b; \text{ weil}$$
$$\begin{aligned} -o \cdot b \quad - b \cdot a' \quad &= -ba'; \\ -o(-ba') - b \cdot b' \quad &= -bb'; \\ -o(-bb') - b(-ba') &= +b^2a'; \\ -o \cdot b^2a' - b(-bb') &= +b^2b'; \\ -o \cdot b^2b' - b \cdot b^2a' &= -b^3a'; \end{aligned}$$
u. s. w.

Wäre in irgend einem Falle bekannt, daß eine wiederkehrende Reihe zur $m$ten Ordnung gehört, so weiß man auch, daß der erzeugende Bruch derselben die $m$te Potenz der unbekannten Größe im Nenner enthalten muß, weil nur unter dieser Bedingung das Beziehungsmaaß aus m Gliedern bestehen kann.

Auch folgt ferner, daß bei einer Reihe der ersten Ordnung, aus dem ersten Gliede und dem Beziehungsmaaße, die folgenden; bei einer Reihe der zweiten Ordnung, aus den beiden ersten Gliedern der Reihe und dem Beziehungsmaaße, die übrigen Glieder bestimmt werden können, und daß überhaupt zur Bestimmung der Glieder einer Reihe der $m$ten Ordnung, die m ersten Glieder der Reihe, nebst dem Beziehungsmaaße derselben bekannt seyn müssen.

I. Von den wiederkehrenden Reihen der ersten Ordnung.

§. 447.

Bezeichnet $S = A + Bx + Cx^2 + \ldots$ eine wiederkehrende Reihe der ersten Ordnung, so erhält man, nach §. 446., als die allgemeinste Darstellung derselben

$$\frac{a'}{1-ax} = a' + a'ax + a'a^2x^2 + a'a^3x^3 + a'a^4x^4 + \ldots$$

und es ist

$$\begin{aligned} A &= a' \\ B &= aA \\ C &= aB \\ D &= aC; \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Das **Beziehungsmaaß** dieser Reihe ist $= a$.

Weil hier jedes Glied gefunden wird, indem man das unmittelbar vorhergehende mit einerlei Factor multiplizirt, so ist jede wiederkehrende Reihe der ersten Ordnung eine geometrische Reihe (§. 348.).

Sobald von einer wiederkehrenden Reihe der ersten Ordnung das erste Glied A, nebst dem Beziehungsmaaße a, gegeben sind, so kann man daraus leicht den **erzeugenden Bruch** der Reihe finden, wenn man das gegebene erste Glied zum Zähler, zum Nenner aber die positive Einheit als

erstes Glied und das Beziehungsmaaß mit entgegengesetzten Zeichen, als Koeffizienten des zweiten Gliedes annimmt. Denn es ist der erzeugende Bruch

$$\frac{a'}{1-ax} = \frac{A}{1-ax}.$$

Wäre z. B. die Reihe

$$S = 3 + 6x + 12x^2 + 24x^3 + 48x^4 + \ldots$$

gegeben, so ist das Beziehungsmaaß $= + 2$; also $a = 2$ und $A = 3$ daher

$$S = \frac{A}{1-ax} = \frac{3}{1-2x} \text{ oder}$$

$$\frac{3}{1-2x} = 3 + 6x + 12x^2 + 24x^3 + \ldots\ldots$$

Auch aus dem ersten Gliede A, und zweiten Gliede B, kann der erzeugende Bruch gefunden werden. Denn es ist $B = aA$ also $a = \frac{B}{A}$. Diesen Werth statt a in die vorstehende Gleichung gesetzt, und Zähler und Nenner mit A multiplizirt, giebt den erzeugenden Bruch

$$S = \frac{A^2}{A-Bx}.$$

Von der Reihe $S = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \ldots$ ist $A = 1$; $B = -\frac{1}{2}$, daher der erzeugende Bruch

$$S = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x} = \frac{2}{2+x}.$$

§. 448.

Um zu erkennen, ob eine gegebene Reihe A; Bx; Cx^2; ...... eine wiederkehrende Reihe der ersten Ordnung sey, dividire man jedes Glied derselben durch das unmittelbar vorhergehende; kommen alsdann durchgängig gleiche Quotienten mit einerlei Zeichen, so ist die Reihe von der ersten Ordnung, weil nur unter dieser Bedingung das entsprechende Beziehungsmaaß gefunden wird.

§. 449.

Wäre der Bruch 0, 7777 .... gegeben, und man sucht dessen Werth oder den erzeugenden Bruch, so kann man denselben folgender Reihe gleich setzen

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$S = \frac{7}{10} + \frac{7}{100}x + \frac{7}{1000}x^2 + \ldots\ldots \text{ also (§. 447.)}$$

$$S = \frac{A^2}{A - Bx} = \frac{\frac{49}{100}}{\frac{7}{10} - \frac{7}{100}x} = \frac{49}{70 - 7x} = \frac{7}{10 - x}.$$

Für $x = 1$ wird S oder 0,7777 .... $= \frac{7}{9}$.

Aus diesem Verfahren kann man überhaupt die Regel ableiten, daß, wenn Reihen gegeben sind, welche nur aus beständigen Größen bestehen, zur Auffindung des erzeugenden Bruches, diese Reihe, nachdem sie zuvor geordnet ist, vom zweiten Gliede an, mit den aufeinander folgenden Potenzen von x multiplizirt werden muß. Setzt man dann in den gefundenen erzeugenden Bruch $x = 1$, so erhält man den erzeugenden Bruch für die gegebene Reihe.

Wäre

Wäre die Reihe 1; $-\frac{2}{3}$; $+\frac{4}{9}$; $-\frac{8}{27}$; $+\frac{16}{81}$; $- \ldots\ldots$ gegeben, so schreibe man

$$1;\ -\tfrac{2}{3}x;\ +\tfrac{4}{9}x^2;\ -\tfrac{8}{27}x^3;\ +\ldots\ldots$$

Hier ist $A = 1$; $B = -\frac{2}{3}$, daher der erzeugende Bruch

$$\frac{A^2}{A - Bx} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}x} = \frac{3}{3 + 2x}, \text{ also für } x = 1;$$

$$\tfrac{3}{5} = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{8}{27} + \tfrac{16}{81} - \tfrac{32}{243} + \ldots\ldots$$

§. 450.

Es bezeichne y_n das allgemeine, oder $n + 1$ste Glied einer wiederkehrenden Reihe der ersten Ordnung, so ist überhaupt

$$\frac{a'}{1 - ax} = a' + a'ax + a'a^2x^2 + a'a^3x^3 + a'a^4x^4 + \ldots\ldots$$

daher erhält man das allgemeine Glied dieser Reihe oder

$$y_n = a'a^n x^n,$$

und daher nach §. 355. ${}^1\!\int y_n$ oder

$$a'\,{}^1\!\int a^n x^n = \frac{a'}{a - ax}.$$

Hiernach hat es keine Schwierigkeiten, für Reihen der ersten Ordnung aus dem Urbruch das allgemeine Glied, und umgekehrt, aus dem allgemeinen Gliede den Urbruch zu finden, oder wenn $\frac{a'}{1 - ax}$ der Urbruch ist, so entspricht demselben $a'a^n$ als allgemeiner Koeffizient.

1. **Beispiel.** Der erzeugende Bruch $\frac{8}{4 - 3x}$ einer Reihe ist gegeben, man soll das allgemeine Glied derselben finden.

Damit der erzeugende Bruch die Form $\frac{a'}{1 - ax}$ erhalte, dividire man Zähler und Nenner desselben durch 4, so ist

$$\frac{8}{4 - 3x} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}x}.$$

Vergleicht man diesen Bruch mit $\frac{a'}{1 - ax}$ und dem dazu gehörigen allgemeinen Gliede $y_n = a'a^n x^n$, so wird $a' = 2$ und $a = \frac{3}{4}$, daher findet man das allgemeine Glied:

$$y_n = 2 \cdot (\tfrac{3}{4})^n x^n,$$

und die demselben entsprechende Reihe:

$$S = 2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{8}x^2 + \tfrac{27}{32}x^3 + \tfrac{81}{128}x^4 + \ldots\ldots$$

Das 13te Glied dieser Reihe findet man mittelst des allgemeinen Gliedes $= \frac{531441}{8388608}x^{12}$.

2. **Beispiel.** Aus dem gegebenen allgemeinen Gliede $-2(-9)^{n+1}x^n$ den erzeugenden Bruch zu finden.

Zur Vergleichung des allgemeinen Gliedes mit dem erzeugenden Bruch, war

$$y_n = a'a^n x^n.$$

Damit nun das gegebene allgemeine Glied eben diese allgemeinen Exponenten erhalte, so bemerke man, daß $(-9)^{n+1} = -9(-9)^n$ ist, daher

$$-2(-9)^{n+1}x^n = 2 \cdot 9(-9)^n x^n = 18(-9)^n x^n.$$

Vergleicht man dies mit

$$y_n = a' a^n x^n$$

und dem zugehörigen erzeugenden Bruch

$$^t\!\!\int y_n = \frac{a'}{1 - ax},$$

so wird $a' = 18$ und $a = -9$, daher ist der gesuchte erzeugende Bruch

$$\frac{18}{1+9x}.$$

§. 451.

Zusatz. Es ist $\frac{a'}{1-ax} = a' + a'ax + a'a^2x^2 + a'a^3x^3 + \ldots\ldots$

Vergleicht man diese Reihe mit

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots \text{ so wird}$$

$$A = a' \text{ und } B = a'a, \text{ also}$$

$$a' = A \text{ und } a = \frac{B}{A}.$$

Nun ist das allgemeine Glied der vorstehenden Reihe $y_n = a'a^nx^n$, daher auch

$$y_n = A\left(\frac{B}{A}\right)^n x^n.$$

Wenn daher von einer Reihe der ersten Ordnung

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

die beiden ersten Glieder A und Bx gegeben sind, so kann man daraus das allgemeine Glied y_n der Reihe finden.

§. 452.

Von der Reihe $S = a' - a'ax + a'a^2x^2 - a'a^3x^3 + \ldots\ldots + a'(-ax)^n$ ist das allgemeine Glied $y_n = a'(-ax)^n$, daher das Summenglied

$$\int y_n = a'\int(-ax)^n.$$

Setzt man ax statt a in (I) §. 367., so erhält man

$$\int(-ax)^n = -\frac{(-ax)^{n+1} - 1}{ax + 1},$$

daher findet man von der vorstehenden Reihe das Summenglied

$$a'\int(-a)^n x^n = -\frac{a'(-a)^{n+1}x^{n+1} - a'}{ax+1} \text{ oder}$$

$$(I)\quad a'\int(-a)^n x^n = a'\left[\frac{a(-a)^n x^{n+1} + 1}{ax+1}\right],$$

und wenn man das Zeichen vor a umkehrt

$$(II)\quad a'\int a^n x^n = a'\left[\frac{a^{n+1}x^{n+1} - 1}{ax - 1}\right].$$

Beispiel. Das allgemeine Glied einer Reihe sey $\frac{4}{5}(-3)^n x^n$; man soll die Summe der $n+1$ ersten Glieder dieser Reihe, oder das Summenglied derselben finden.

Hier ist das Summenglied $= \frac{2}{5} f(-3)^n x^n$. Vergleicht man dies mit

$$a' f(-a)^n x^n = a' \left(\frac{a(-a)^n x^{n+1} + 1}{ax + 1}\right),$$

so wird $a' = \frac{8}{5}$ und $a = 3$; daher findet man das Summenglied

$$\tfrac{8}{5} f(-3)^n x^n = \tfrac{8}{5} \cdot \frac{3(-3)^n x^{n+1} + 1}{3x + 1}.$$

Die Reihe welche dem allgemeinen Gliede entspricht, ist:

$$S = \frac{8}{5} - \frac{24}{5} x + \frac{72}{5} x^2 - \frac{216}{5} x^3 + \ldots\ldots$$

Setzt man $n = 3$ und $x = 1$, so erhält man die Summe der vier ersten Koeffizienten der vorstehenden Reihe $= \frac{8}{5} \cdot \frac{3(-3)^3 + 1}{3 + 1} = -32$.

§. 453.

Setzt man die Summe der Glieder, welche auf das $n+1$ste Glied einer Reihe folgen, $= R$, so heißt R die **Ergänzung** der Reihe. Nun ist nach §. 450.

$$\frac{a'}{1 - ax} = a' + a' a x + a' a^2 x^2 + a' a^3 x^3 + \ldots + a' a^n x^n + R,$$

daher wird nach §. 452. (*II*)

$$\frac{a'}{1 - ax} = a' \left(\frac{a^{n+1} x^{n+1} - 1}{ax - 1}\right) + R,$$

und man findet, wenn eine unendliche Reihe der ersten Ordnung beim $n+1$sten Gliede abbrechen soll, die Summe der folgenden Glieder oder die Ergänzung

$$R = \frac{a' a^{n+1} x^{n+1}}{1 - ax}.$$

Hiermit vergleiche man §. 356.

§. 454.

Bezeichnet S eine jede Reihe der ersten Ordnung, so kann ihr erzeugender Bruch leicht auf die Form $\frac{1}{p + qx}$ gebracht werden, und man erhält alsdann $\frac{1}{p + qx} = S$, woraus folgt:

$$\frac{1}{S} = p + qx.$$

Wird daher mit einer wiederkehrenden Reihe der ersten Ordnung in die Einheit dividirt, so muß der Quotient die Form $p + qx$ erhalten, welches außer dem §. 448. angegebenen, ein zweites Kennzeichen für Reihen der ersten Ordnung ist.

II. Von den einfachen wiederkehrenden Reihen der zweiten Ordnung.

§. 455.

Wäre $S = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$ eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung, wo $A_n x^n$ das $n+1$ste oder allgemeine Glied

derselben, also A_n den Koeffizienten des allgemeinen Gliedes bezeichnet, so ist die allgemeinste Gestalt ihres Urbruchs

$$S = \frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2},$$

in welchem die einzelnen Koeffizienten positiv oder negativ seyn mögen; auch kann $b' = 0$ oder $a = 0$, oder auch beide zugleich $= 0$ seyn.

Aus $\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2} = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$ erhält man nach §. 444. die Koeffizientengleichungen

$$A = a'$$
$$A_1 = b' + aA$$
$$A_2 = aA_1 + bA$$
$$A_3 = aA_2 + bA_1$$
$$A_4 = aA_3 + bA_2$$

und überhaupt

$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}.$$

Hienach wird $a; b;$ das **Beziehungsmaaß** der vorstehenden Reihe.

Sind daher von einer Reihe der zweiten Ordnung die beiden ersten Glieder A und $A_1 x$ nebst dem Beziehungsmaaße gegeben, so können daraus die übrigen Glieder bestimmt werden.

Wäre z. B. das erste Glied $A = 1$, das zweite $A_1 x = 2x$ und das Beziehungsmaaß: $-3; +10$ gegeben, so erhält man für den dritten und die folgenden Koeffizienten der Reihe:

$$A_2 = -3 \,.\, 2 + 10 \,.\, 1 = 4$$
$$A_3 = -3 \,.\, 4 + 10 \,.\, 2 = 8$$
$$A_4 = -3 \,.\, 8 + 10 \,.\, 4 = 16$$
$$A_5 = -3 \,.\, 16 + 10 \,.\, 8 = 32$$

u. s. w. Die entsprechende Reihe ist daher:

$$1;\ 2x;\ 4x^2;\ 8x^3;\ 16x^4;\ 32x^5;\ \ldots\ldots$$

§. 456.

Aufgabe. Aus den beiden ersten Gliedern A und Bx einer Reihe der zweiten Ordnung und dem Beziehungsmaaße $+a; +b;$ den erzeugenden Bruch S der Reihe zu finden.

Auflösung. Mit Rücksicht auf das gegebene Beziehungsmaaß, ist die allgemeinste Form des erzeugenden Bruches

$$\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2}.$$

Nach §. 455. ist aber, wenn $A_1 = B$ gesetzt wird $a' = A$ und $b' = B - aA$, daher findet man, wenn A und Bx die beiden ersten Glieder der Reihe und $b; a;$ das Beziehungsmaaß, gegeben sind, den **erzeugenden Bruch**

$$S = \frac{A + (B - aA)x}{1 - ax - bx^2}.$$

Beispiel. Von einer Reihe sey das erste Glied $= 1$, das zweite $= 4x$ und das Beziehungsmaaß $-6; +5;$ so wird hier $A = 1;\ B = 4;\ a = +5;\ b = -6;$ daher

findet man den erzeugenden Bruch

$$S = \frac{1 + (4 - 5)x}{1 - 5x - (-6)x^2} = \frac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2}.$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$S = 1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + 146x^4 + 454x^5 + \ldots\ldots$$

§. 457. *a.*

Aufgabe. Aus den vier ersten Koeffizienten einer Reihe der zweiten Ordnung, den erzeugenden Bruch S der Reihe zu finden.

Auflösung. Bezeichnet $S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$ die Reihe, deren vier erste Koeffizienten A, B, C, D gegeben sind, und man setzt den erzeugenden Bruch $S = \frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2}$, so ist nach §. 455.

$$A = a';$$
$$B = b' + aA;$$
$$C = aB + bA;$$
$$D = aC + bB.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$a = \frac{BC - AD}{B^2 - AC} \text{ und } b = \frac{C^2 - BD}{AC - B^2}.$$

Ferner ist

$$a' = A \text{ und } b' = B - aA,$$

daher lassen sich die Glieder des erzeugenden Bruches $\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2}$ aus den Koeffizienten A, B, C, D finden.

1. Beispiel. Die vier ersten Koeffizienten einer Reihe der zweiten Ordnung sind:

$A = 1$; $B = 4$; $C = 14$; $D = 46$, daher ist

$$a = \frac{4.14 - 1.46}{4.4 - 1.14} = 5$$
$$b = \frac{14.14 - 4.46}{1.14 - 4.4} = -6$$
$$a' = 1 \text{ und } b' = 4 - 5.1 = -1,$$

daher ist der erzeugende Bruch

$$\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2} = \frac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2}.$$

2. Beispiel. Die gegebene Koeffizienten sind

$A = 0$; $B = 1$; $C = 2$; $D = 3$; also

$$a = \frac{1.2}{1} = 2; \quad b = \frac{2.2. - 1.3}{-1} = -1$$
$$a' = 0 \text{ und } b' = 1, \text{ daher}$$

$$S = \frac{x}{1 - 2x + x^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + \ldots\ldots$$

§. 457. *b*.

Aufgabe. Aus den **drei** ersten Koeffizienten einer Reihe der zweiten Ordnung, den erzeugenden Bruch S derselben unter der Voraussetzung zu finden, daß der Nenner des erzeugenden Bruchs ein Quadrat sey.

Auflösung. Vergleicht man den Bruch $\frac{a'+b'x}{(1+ax)^2} = \frac{a'+b'x}{1+2ax+a^2x^2}$ mit dem allgemeinen Ausdruck $\frac{a'+b'x}{1-ax-bx^2}$ (§. 457. *a.*) für den erzeugenden Bruch einer Reihe der zweiten Ordnung, und setzt

$$\frac{a'+b'x}{(1+ax)^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

so erhält man, wenn $2a$ mit $-a$ und a^2 mit $-b$ vertauscht wird,

$$A = a'$$
$$B = b' - 2aA$$
$$C = -a^2A - 2aB$$
$$D = -a^2B - 2aC$$

und aus $C = -a^2A - 2aB$ findet man

$$a = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$$
$$a' = A$$
$$b' = 2aA + B.$$

Man kann daher aus den gegebenen drei ersten Koeffizienten A, B, C den erzeugenden Bruch

$$S = \frac{a'+b'x}{(1+ax)^2}$$

finden.

Hiebei ist zu bemerken, daß man für S zwei verschiedene Werthe erhält, welche beide der Bedingung genügen, weil $\sqrt{(B^2 - AC)}$ einmal positiv und dann negativ in Rechnung gebracht werden kann.

1. **Beispiel.** Die drei ersten Koeffizienten einer Reihe der zweiten Ordnung sind: $A = 1$; $B = 2$; $C = 3$; so wird, wenn der Nenner des erzeugenden Bruchs dieser Reihe ein Quadrat ist,

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{1} = \begin{cases}-1\\-3\end{cases}$$

$$a' = 1 \text{ und } b' = \begin{cases}-2\\-6\end{cases} + 2 = \begin{cases}0\\-4\end{cases}$$

Für $a = -1$ und $b' = 0$ ist daher der erzeugende Bruch $S =$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots\ldots$$

und für $a = -3$ und $b' = -4$ wird der erzeugende Bruch $S =$

$$\frac{1-4x}{(1-3x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + * - 27x^4 - 162x^5 - 729x^6 - \ldots\ldots$$

welche beide den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

2. Beispiel. Die drei ersten Koeffizienten einer Reihe der zweiten Ordnung sind: $A = 1$; $B = 4$; $C = 14$; so wird $a = -4 \pm \sqrt{2}$; $a' = 1$ und $b' = -4 \pm 2\sqrt{2}$, also der erzeugende Bruch:

$$S = \frac{1-(4 \mp 2\sqrt{2})x}{[1-(4 \mp \sqrt{2})x]^2} = 1 + 4x + 14x^2 + 4\,(10 \pm \sqrt{2})\,x^3 + \ldots\ldots$$

§. 458.

Das allgemeine Glied $A_n x^n$, oder, worauf es vorzüglich ankommt, der Koeffizient A_n des allgemeinen Gliedes wird nach §. 455. nur mittelst der Koeffizienten der vorhergehenden Glieder bestimmt. Verlangt man einen solchen Ausdruck für A_n, welcher von den vorhergehenden Gliedern unabhängig ist, so muß dieser mittelst des erzeugenden Bruches gesucht werden. Man setze daher

$$\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

so erhält man, wenn mit $1 - ax - bx^2$ in 1 dividirt wird,

$$\frac{1}{1-ax-bx^2} = 1 + ax + \begin{array}{r} a^2 \\ b \end{array}\Bigg|\, x^2 + \begin{array}{r} a^3 \\ 2ab \end{array}\Bigg|\, x^3 + \begin{array}{r} a^4 \\ 3a^2 b \\ a^2 \end{array}\Bigg|\, x^4 + \begin{array}{r} a^5 \\ 4a^3 b \\ 3ab^2 \end{array}\Bigg|\, x^5 + \begin{array}{r} a^6 \\ 5a^4 b \\ 6a^2 b^2 \\ b^3 \end{array}\Bigg|\, x^6 + \begin{array}{r} a^7 \\ 6a^5 b \\ 10a^3 b^2 \\ 4ab^3 \end{array}\Bigg|\, x^7 + \ldots$$

oder, wenn man

$$\frac{1}{1-ax-bx^2} = B + B_1 x + B_2 x + \ldots\ldots + B_n x^n + \ldots \quad [I]$$

setzt, so findet man

$$\begin{aligned}
B &= 1;\ B_1 = a;\ B_2 = a^2 + b;\ B_3 = a^3 + 2ab \\
B_4 &= a^4 + 3a^2 b + a^2 \\
B_5 &= a^5 + 4a^3 b + 3ab^2 \\
B_6 &= a^6 + 5a^4 b + 6a^2 b^2 + b^3 \\
B_7 &= a^7 + 6a^5 b + 10a^3 b^2 + 4ab^3 \\
B_8 &= a^8 + 7a^6 b + 15a^4 b^2 + 10a^2 b^3 + b^4 \\
B_9 &= a^9 + 8a^7 b + 21a^5 b^2 + 20a^3 b^3 + 5ab^4
\end{aligned}$$

u. s. w.

Wird die Rechnung noch weiter fortgesetzt, so übersieht man leicht, daß der allgemeine Koeffizient

$$B_n = a^n + (n-1)\,a^{n-2} b + (n-2)_2\, a^{n-4} b^2 + (n-3)_3\, a^{n-6} b^3 + \ldots$$

ist. Der vollständige Beweis, für die Richtigkeit dieses Ausdrucks, wird im neunzehnten Kapitel §. 810. folgen.

Die Gleichung [I] mit $a' + b'x$ multiplizirt, giebt:

$$\frac{a' + b'x}{1-ax-bx^2} = a'B + \begin{array}{r} a'B_1 \\ b'B \end{array}\Bigg|\, x + \begin{array}{r} a'B_2 \\ b'B_1 \end{array}\Bigg|\, x^2 + \ldots + \begin{array}{r} a'B_n \\ b'B_{n-1} \end{array}\Bigg|\, x^n + \ldots$$

Hiemit die Reihe A; $A_1 x$; $A_2 x^2$; ... $A_n x^n$ ..... verglichen, so findet man

$$A_n = a'B_n + b'B_{n-1}.$$

Nun ist

$$B_n = a^n + (n-1)a^{n-2}b + (n-2)_2 a^{n-4}b^2 + \ldots\ldots$$

Hierin $n-1$ statt n gesetzt, giebt

$$B_{n-1} = a^{n-1} + (n-2)a^{n-3}b + (n-3)_2 a^{n-5}b^2 + \ldots.$$

Man findet daher, unabhängig von den vorhergehenden Koeffizienten, den Koeffizienten des allgemeinen Gliedes einer Reihe der zweiten Ordnung, oder den allgemeinen Koeffizienten

$$A_n = a'\,[a^n + (n-1)\,a^{n-2}\,b + (n-2)_2\,a^{n-4}\,b^2 + (n+3)_3\,a^{n-6}\,b^3 + \ldots.]$$
$$+\, b'[a^{n-1} + (n-2)a^{n-3}b + (n-3)_2 a^{n-5}b^2 + (n-4)_3 a^{n-7}b^3 + \ldots.]$$

und hieraus, wenn nach einander 0, 1, 2, 3 .... statt n gesetzt und bei demjenigen Gliede abgebrochen wird, wo die Exponenten von a negativ werden,

$$A = a'$$
$$A_1 = a'a + b'$$
$$A_2 = a'(a^2 + b) + b'a$$
$$A_3 = a'(a^3 + 2ab) + b'(a^2 + b)$$
$$A_4 = a'(a^4 + 3a^2b + b^2) + b'(a^3 + 2ab)$$

u. s. w.

Hätte der Urbruch lauter positive Glieder im Nenner, so findet man für den Urbruch $\frac{a' + b'x}{1 + ax + bx^2}$ die Koeffizienten der entsprechenden Reihe,

$$A = a'$$
$$A_1 = -\,a'a + b'$$
$$A_2 = a'\,(a^2 - b) - b'a$$
$$A_3 = -\,a'\,(a^3 - 2ab) + b'\,(a^2 - b)$$
$$A_4 = a'\,(a^4 - 3a^2b + b^2) - b'\,(a^3 - 2ab)$$

u. s. w.

§. 459.

Der für A_n gefundene allgemeine Ausdruck, läßt sich in den meisten Fällen noch vereinfachen, wenn man aus dem Urbruch $\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2}$ den Werth von $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)}$ bestimmt und auf folgende Weise verfährt. Es sey

$$(I)\ \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b)} = C,$$

so erhält man nach §. 48.

$$\frac{(\frac{1}{2}a + c)^n - (\frac{1}{2}a - c)^n}{2c} = a^{n-1} + (n-2)a^{n-3}b + (n-3)_2 a^{n-5}b^2 + \ldots\ldots$$

und wenn hierin $n+1$ statt n gesetzt wird,

$$\frac{(\frac{1}{2}a + c)^{n+1} - (\frac{1}{2}a - c)^{n+1}}{2c} = a^n + (n-1)a^{n-2}b + (n-2)_2 a^{n-4}b^2 + \ldots.$$

Man findet daher, der Voraussetzung (I) gemäß,

$$A_n = a'\,\frac{(\frac{1}{2}a + c)^{n+1} - (\frac{1}{2}a - c)^{n+1}}{2c} + b'\,\frac{(\frac{1}{2}a + c)^n - (\frac{1}{2}a - c)^n}{2c}\ \ [I]$$

oder

oder zusammengezogen:

$$(II)\quad A_n = \frac{a'(\frac{1}{2}a + c) + b'}{2c}(\tfrac{1}{2}a + c)^n - \frac{a'(\frac{1}{2}a - c) + b'}{2c}(\tfrac{1}{2}a - c)^n.$$

Dieser Ausdruck für den allgemeinen Koeffizienten erleichtert die Berechnung weit mehr, als der im vorigen §. gefundene, wenn man aus demselben die irrationalen Größen wegschaffen kann. Es ist daher auch beim Aufsuchen des allgemeinen Gliedes aus einem gegebenen Urbruch zuvor zu versuchen, ob sich dasselbe hiernach finden läßt.

Für $\frac{1}{4}a^2 + b = 0$ also $c = 0$ wird $A_n = \frac{0}{0}$ ein noch näher zu bestimmender Ausdruck (§. 11.).

Man bemerke daher, daß (§. 27.)

$$(\tfrac{1}{2}a + c)^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n + n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} c + n_2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} c^2 + \dots$$

$$(\tfrac{1}{2}a - c)^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n - n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} c + n_2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} c^2 - \dots$$

daher wird

$$\frac{(\frac{1}{2}a + c)^n - (\frac{1}{2}a - c)^n}{2c} = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + n_3\left(\frac{a}{2}\right)^{n-3} c^2 + \dots$$

und eben so

$$\frac{(\frac{1}{2}a + c)^{n+1} - (\frac{1}{2}a - c)^{n+1}}{2c} = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n + (n+1)_3\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} c^2 + \dots$$

Diese Werthe in [I] gesetzt, so erhält man für $c = 0$

$$A_n = a'(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n + b'n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$$

oder, wenn der erzeugende Bruch

$$\frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2}$$

so beschaffen ist, daß

$$(III)\quad \tfrac{1}{4}a^2 + b = 0 \text{ wird},$$

so erhält man den allgemeinen Koeffizienten, nach gehöriger Zusammenziehung,

$$(IV)\quad A_n = \frac{(n+1)aa' + 2nb'}{2^n} a^{n-1},$$

daher

$$A = a'$$
$$A_1 = aa' + b'$$
$$A_2 = \frac{3aa' + 4b'}{2^2} a$$
$$A_3 = \frac{4aa' + 6b'}{2^3} a^2$$
$$A_4 = \frac{5aa' + 8b'}{2^4} a^3$$
$$A_5 = \frac{6aa' + 10b'}{2^5} a^4$$

u. s. w.

In allen den Fällen, wenn der Koeffizient b des Urbruches negativ ist, wird $c = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b)}$ eine mögliche Größe; wenn aber b positiv und $a^2 < 4b$ ist, wird c eine unmögliche Größe.

§. 460.

Zusatz. Für $a = 0$ in (II) wird

$$A_n = \frac{a'c + b'}{2c}\, c^n + \frac{a'c - b'}{2c}\, (-c)^n \text{ oder}$$

$$A_n = \frac{a'c + b'}{2c}\, c^n \pm \frac{a'c - b'}{2c}\, c^n$$

wo das obere Zeichen, für ein gerades, das untere, für ein ungerades n gilt.

Entwickelt man die beiden verschiedenen Werthe für A_n, so wird

$A_n = a'c^n$ für ein gerades n, und

$A_n = b'c^{n-1}$ für ein ungerades n.

Nun ist $c = \sqrt{b}$, daher wird

$$(I)\quad A_n = \begin{cases} a' b^{\frac{n}{2}} & \text{für ein gerades } n \\ b' b^{\frac{n-1}{2}} & \text{für ein ungerades } n, \end{cases}$$

wenn $\frac{a' + b'x}{1 - bx^2}$ der gegebene Urbruch ist.

Hienach wird

$A = a'$	$A_5 = b'b^2$
$A_1 = b'$	$A_6 = a'b^3$
$A_2 = a'b$	$A_7 = b'b^3$
$A_3 = b'b$	$A_8 = a'b^4$
$A_4 = a'b^2$	u. s. w.

§. 461.

Wäre $\frac{a' + b'x}{(1-ax)(1-bx)}$ der gegebene Urbruch, so läßt sich für denselben die entsprechende Reihe finden, wenn man den Nenner $(1 - ax)(1 - bx) = 1 - (a+b)x + abx^2$ mit $1 - ax - bx^2$ nach §. 459. vergleicht und daselbst $a + b$ statt a und $-ab$ statt b setzt. Dies giebt

$$c = \sqrt{[\tfrac{1}{4}(a+b)^2 - ab]} = \tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b) + c = a$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b) - c = b, \text{ folglich §. 459. } [I]$$

$$(I)\quad A_n = a'\,\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} + b'\,\frac{a^n - b^n}{a-b},$$

wo der Divisor $a - b$ in den zugehörigen Zähler nach §. 60. aufgehen muß. Auch erhält man hieraus

$$(II)\quad A_n = \frac{(a'a + b')a^n - (a'b + b')b^n}{a-b},$$

daher

$$A = \frac{a'a - a'b}{a-b} = a'$$

$$A_1 = \frac{(a'a+b')a - (a'b+b')b}{a-b} = a'(a+b) + b'$$

$$A_2 = \frac{(a'a+b')a^2 - (a'b+b')b^2}{a-b}$$

$$A_3 = \frac{(a'a+b')a^3 - (a'b+b')b^3}{a-b}$$

u. s. w.

§. 462.

Zusatz. Für $a = b$ wird $A_n = \frac{0}{0}$. Wegen §. 60. erhält man aber nach (*I*)

$$A_n = a'(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n) + b'(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}),$$

wo in den ersten Klammern, $n+1$, und in den letzten, n Glieder enthalten sind. Man findet daher für $a = b$

$$A_n = a'(n+1)a^n + b'.na^{n-1},$$

oder es wird für den Urbruch

$$\frac{a' + b'x}{(1-ax)^2}$$

der allgemeine Koeffizient

$$A_n = [(n+1)aa' + nb']a^{n-1},$$

daher

$$A = a'$$

$$A_1 = 2aa' + b'$$

$$A_2 = (3aa' + 2b')a$$

$$A_3 = (4aa' + 3b')a^2$$

$$A_4 = (5aa' + 4b')a^3$$

u. s. w.

§. 463.

Sucht man das allgemeine Glied aus dem Urbruch $\frac{a'+b'x}{1-ax+bx^2}$ nach §. 459. auszudrucken, wenn $a^2 < 4b$ ist, so enthält der Nenner unmögliche Faktoren. Diese zu vermeiden setze man $a = 2g\cos\alpha$ und $b = g^2$, so wird $\cos\alpha = \frac{a}{2g}$; $\cos\alpha^2 = \frac{a^2}{4g^2} = \frac{a^2}{4b}$;
$\sin\alpha = \sqrt{(1-\cos\alpha^2)} = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4b}\right)}$ und $c = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} = g\sqrt{(\cos\alpha^2 - 1)}$ oder $c = g\sin\alpha.\sqrt{-1}$, also auch $\frac{1}{2}a + c = g(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$ und $\frac{1}{2}a - c = g(\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{-1})$, daher nach §. 459.

$$A_n = \frac{a'g^{n+1}}{2g\sin\alpha.\sqrt{-1}}[(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^{n+1} - (\cos\alpha - \sin\alpha.\sqrt{-1})^{n+1}]$$

$$+ \frac{b'g^n}{2g\sin\alpha.\sqrt{-1}}[(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^n - (\cos\alpha - \sin\alpha.\sqrt{-1})^n]$$

Nun ist $(\cos\alpha \pm \sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos n\alpha \pm \sin n\alpha.\sqrt{-1}$ (§. 147.) also

$$A_n = \frac{a'g^n}{2\sin\alpha.\sqrt{-1}}.2\sin(n+1)\alpha.\sqrt{-1} + \frac{b'g^{n-1}}{2\sin\alpha.\sqrt{-1}}.2\sin n\alpha.\sqrt{-1}.$$

Wenn daher der erzeugende Bruch $\frac{a'+b'x}{1-ax+bx^2}$ gegeben ist, und man will A_n nicht durch eine Reihe entwickeln, so erhält man für $a^2 < 4b$, und wenn in vorstehenden Ausdruck $g = \sqrt{b}$ gesetzt wird, den allgemeinen Koeffizienten:

$$A_n = \frac{a'\sqrt{b} \, . \, \sin(n+1)\alpha + b' \sin n\alpha}{\sin\alpha} b^{\frac{n-1}{2}},$$

wo hier $\sin\alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4b}\right)}$ und $\cos\alpha = \frac{a}{2\sqrt{b}}$ ist.

§. 464.

Aufgabe. Aus dem erzeugenden Bruch $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$ das allgemeine Glied zu finden.

1. Auflösung. Hier ist für $a' = 1$; $b' = -1$; $a = 5$ und $b = -6$ nach §. 459. (I) und (II)

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)} = \sqrt{(\frac{25}{4} - 6)} = \frac{1}{2} = c$ also $\frac{1}{2}a + c = 3$ und $\frac{1}{2}a - c = 2$, daher wird der allgemeine Koeffizient

$$A_n = 2 \, . \, 3^n - 2^n$$

und das allgemeine Glied

$$y_n = (2 \, . \, 3^n - 2^n)x^n.$$

Die entsprechende Reihe ist

$$1;\ 4x;\ 14x^2;\ 46x^3;\ 146x^4;\ 146x^5;\ \ldots\ldots$$

2. Auflösung. Sucht man den allgemeinen Koeffizienten nach §. 458., so wird

$$A_n = B_n - B_{n-1} \text{ und}$$

$$B_n = 5^n - (n-1)\, 5^{n-2} 6 + (n-2)_2 5^{n-4} 6^2 - (n-3)_3 5^{n-6} 6^3 + \ldots\ldots$$

also $B = 1$; $B_1 = 5$; $B_2 = 19$; $B_3 = 65$; $B^4 = 211$; ..... daher findet man

$$A = B = 1$$
$$A_1 = B_1 - B = 4$$
$$A_2 = B_2 - B_1 = 14$$
$$A_3 = B_3 - B_2 = 46$$
$$A_4 = B_4 - B_3 = 146$$

u. s. w.

§. 465.

Aufgabe. Aus dem Urbruch $\frac{1-10x}{1+4x-7x^2}$ das allgemeine Glied zu finden.

1. Auflösung. Hier ist für $a' = 1$; $b' = -10$; $a = -4$ und $b = 7$ nach §. 459.

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)} = \sqrt{(\frac{16}{4} + 7)} = \sqrt{11} = c$, also

$\frac{1}{2}a + c = -2 + \sqrt{11}$ und $\frac{1}{2}a - c = -2 - \sqrt{11}$ daher

$$A_n = \frac{-12+\sqrt{11}}{2\sqrt{11}}(-2+\sqrt{11})^n + \frac{12+\sqrt{11}}{2\sqrt{11}}(-2-\sqrt{11})^n.$$

Da sich dieser Ausdruck nicht leicht einfacher darstellen läßt, so verdient die folgende Auflösung den Vorzug.

2. **Auflösung.** Nach §. 458. wird hier

$$A_n = B_n - 10 B_{n-1} \text{ und}$$

$$B_n = (-4)^n + (n-1)(-4)^{n-2}7 + (n-2)_2(-4)^{n-4}7^2 + \ldots$$
$$= \pm [4^n + (n-1)\,4^{n-2}7 + (n-2)_2\,4^{n-4}7^2 + (n-3)_3\,4^{n-6}7^3 + \ldots]$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten. Hienach wird $B = +1$; $B_1 = -4$; $B_2 = +23$; $B_3 = -120$; $B_4 = +641$; ...... daher

$$A = B = 1$$
$$A_1 = B_1 - 10B = - \ 14$$
$$A_2 = B_2 - 10B_1 = + \ 63$$
$$A_3 = B_3 - 10B_2 = - \ 350$$
$$A_4 = B_4 - 10B_3 = + \ 1841$$

u. s. w.

Die entsprechende Reihe ist:

$+1;\ -14x;\ +63x^2;\ -350x^3;\ +1841x^4;\ \ldots\ldots$

§. 466.

Aufgabe. Das allgemeine Glied für den Urbruch $\frac{1-5x}{1+x-6x^2}$ zu finden.

Auflösung. Man setze $a' = 1$; $b' = -5$; $a = -1$ und $b = 6$, so wird nach §. 459.

$$c = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 6)} = \tfrac{5}{2} \text{ also}$$
$$\tfrac{1}{2}a + c = 2;\ \tfrac{1}{2}a - c = -3, \text{ folglich}$$
$$A_n = \frac{-3}{5}\,2^n - \frac{-8}{5}\,(-3)^n \text{ oder}$$
$$A_n = \frac{1}{5}\,(\pm 8 \, . \, 3^n - 3 \, . \, 2^n),$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten.

Die hiezu gehörige Reihe ist:

$+1;\ -6x;\ +12x^2;\ -48x^3;\ +120x^4;\ -408x^5;\ \ldots\ldots$

Zusatz. Wäre hingegen der Urbruch $\frac{1-5x}{(1-2x)(1+3x)}$ gegeben, so ist hier, nach §. 461. (*II*)

$$a' = 1;\ b' = -5;\ a = 2;\ b = -3, \text{ daher}$$
$$A_n = \frac{(2-5)\,2^n - (-3-5)\,(-3)^n}{2+3}.$$

Dieser Ausdruck ist mit dem oben gefundenen einerlei, weil beide Urbrüche einander gleich sind.

§. 467.

Aufgabe. Das allgemeine Glied für den Urbruch $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ zu finden.

Auflösung. Hier ist für $a' = 1$; $b' = 2$; $a = 1$; $b = 1$ nach §. 459.

$c = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 1)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$; $\tfrac{1}{2}a + c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\tfrac{1}{2}a - c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, daher

$$A_n = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$ oder §. 44. (Beisp.)

$$A_n = \frac{1}{2^n}\,[1 + (n+1)_2\, 5 + (n+1)_4\, 5^2 + (n+1)_6\, 5^3 + (n+1)_8\, 5^4 + \ldots\ldots].$$

Die entsprechende Reihe ist:

$1;\ 3x;\ 4x^2;\ 7x^3;\ 11x^4;\ 18x^5;\ 29x^6;\ \ldots\ldots$

§. 468.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{2+x}{1+x+x^2}$ das entsprechende allgemeine Glied zu finden.

1. **Auflösung.** Hier ist $a' = 2;\ b' = 1;\ a = -1;\ b = -1$ also §. 459. $c = \sqrt{(\frac{1}{4}-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{-3};\ \frac{1}{2}a + c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3};\ \frac{1}{2}a - c = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, daher

$$A_n = \frac{2(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})+1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n - \frac{2(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})+1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n$$ oder

$$A_n = \frac{1}{2^n}\,[(-1+\sqrt{-3})^n + (-1-\sqrt{-3})^n]$$ oder §. 44. (*II*)

$$= \frac{2(-1)^n}{2^n}\,[1 - n_2\, 3 + n_4\, 3^2 - n_6\, 3^3 + n_8\, 3^4 - \ldots]$$ oder

$$A_n = \pm\frac{1}{2^{n-1}}\,[1 - n_2\, 3 + n_4\, 3^2 - n_6\, 3^3 + n_8\, 3^4 - \ldots.]$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten.

Die entsprechende Reihe ist:

$+2;\ -x;\ -x^2;\ +2x^3;\ -x^4;\ -x^5;\ +2x^6;\ -x^7;\ \ldots\ldots$

2. **Auflösung.** Will man A_n nicht durch eine Reihe darstellen, so kann man nach §. 463. verfahren. Hienach wird $a' = 2;\ b' = 1;\ a = -1;\ b = 1$, daher $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi$ also $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, daher das allgemeine Glied

$$A_n = \frac{2\sin\frac{2}{3}(n+1)\pi + \sin\frac{2}{3}n\pi}{\sin\frac{2}{3}\pi},$$

oder weil $\sin\frac{2}{3}\pi = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist

$$A_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,[2\sin\tfrac{2}{3}(n+1)\pi + \sin\tfrac{2}{3}n\pi].$$

Hierin nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt n gesetzt, und bemerkt, daß $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin\frac{6}{3}\pi = \sin 2\pi = 0$; $\sin\frac{8}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin\frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; .... so wird

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{3}.\,2\sin\tfrac{2}{3}\pi = 2$$

$$A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2\sin\tfrac{4}{3}\pi + \sin\tfrac{2}{3}\pi) = -1$$

$$A_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2\sin 2\pi + \sin\tfrac{4}{3}\pi) = -1$$

$$A_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2\sin\tfrac{8}{3}\pi + \sin 2\pi) = 2$$

u. s. w.

§. 469.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{x}{1+3x+2x^2}$ den allgemeinen Koeffizienten zu finden.

Auflösung. Hier ist für $a' = 0$; $b' = 1$; $a = -3$; $b = -2$ nach §. 459. $c = \sqrt{(\frac{9}{4} - 2)} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}a + c = -1$; $\frac{1}{2}a - c = -2$ folglich

$$A_n = \mp (2^n - 1),$$

wo das obere Zeichen, für ein gerades, das untere, für ein ungerades n gilt.

Die entsprechende Reihe ist:

$$+x;\ -3x^2;\ +7x^3;\ -15x^4;\ +31x^5;\ \ldots\ldots$$

§. 470.

Aufgabe. Den allgemeinen Koeffizienten zu finden, welcher dem Urbruch $\frac{1}{1-2x+10x^2}$ entspricht.

1. Auflösung. Hier ist $a' = 1$; $b' = 0$; $a = 2$; $b = -10$, daher §. 459. $c = 3\sqrt{-1}$. Die Rechnung wird aber hienach weitläuftig, weshalb man um so mehr nach §. 458. verfahren kann, weil der Zähler des Urbruchs nur aus einem Gliede besteht. Man erhält daher nach §. 458.

$$A_n = 2^n - (n-1)2^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4} 10^2 - (n-3)_3 2^{n-6} 10^3 + \ldots\ldots$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$1;\ 2x;\ -6x^2;\ -32x^3;\ -4x^4;\ +312x^5;\ \ldots\ldots$$

2. Auflösung. Wird das allgemeine Glied nach §. 463. gesucht, so ist hier $a' = 1$; $b' = 0$; $a = 2$ und $b = 10$, also $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $\sin\alpha = \sqrt{(1 - \frac{1}{10})} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Hienach kann man aber nicht wie §. 468. α als einen Theil vom halben Umfange π ausdrucken, daher muß α in dem Ausdruck für das allgemeine Glied beibehalten werden, und man findet

$$A_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{10^n},$$

oder weil $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ist

$$A_n = \tfrac{1}{3}\sin(n+1)\alpha \cdot \sqrt{10^{n+1}}.$$

Hienach erhält man (§. 199.)

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$; $\sin 3\alpha = \frac{-9}{5\sqrt{10}}$; $\sin 4\alpha = \frac{-24}{25}$; $\sin 5\alpha = \frac{-3}{25\sqrt{10}}$; $\sin 6\alpha = \frac{117}{125}$; u. s. w.

§. 471.

Aufgabe. Das allgemeine Glied für den Urbruch $\frac{1+x}{1+x^2}$ zu finden.

Auflösung. Hier ist $a' = 1$; $b' = 1$; $b = -1$, daher nach §. 460. der allgemeine Koeffizient

$$A_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für ein gerades } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für ein ungerades } n. \end{cases}$$

Die entsprechende Reihe wird hienach:

$$+1;\ +x;\ -x^2;\ -x^3;\ +x^4;\ +x^5;\ -x^6;\ -x^7;\ +x^8;\ \ldots\ldots$$

Zusatz. Für den Urbruch $\frac{1-x}{1+x^2}$ findet man

$$A_n = \begin{cases} +(-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für ein gerades } n, \\ -(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für ein ungerades } n. \end{cases}$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$+1;\ -x;\ -x^2;\ +x^3;\ +x^4;\ -x^5;\ -x^6;\ +x^7;\ +x^8;\ \ldots\ldots$$

§. 472.

Aufgabe. Aus dem Urbruch $\frac{2-9x}{(3+x)^2}$ das allgemeine Glied zu finden.

Auflösung. Weil das erste Glied des Nenners $= 1$ seyn soll, so erhält man, statt des gegebenen Urbruchs, den Bruch

$$\frac{\frac{2}{9}-x}{(1+\frac{1}{3}x)^2}.$$

Für diesen wird $a' = \frac{2}{9}$; $b' = -1$; $a = -\frac{1}{3}$, daher nach §. 462.

$$A_n = [-(n+1)\tfrac{2}{27} - n](-\tfrac{1}{3})^{n-1} = -\frac{29n+2}{27(-3)^{n-1}} = \pm\frac{29n+2}{3^3 3^{n-1}} \text{ oder}$$

$$A_n = \pm\frac{29n+2}{3^{n+2}};$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten.

Die entsprechende Reihe ist:

$$+\tfrac{2}{9};\ -\tfrac{31}{27}x;\ +\tfrac{60}{81}x^2;\ -\tfrac{89}{243}x^3;\ +\tfrac{118}{729}x^4;\ \ldots\ldots$$

§. 473.

Für den erzeugenden Bruch $\frac{x \sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ wird (§. 463.) $a' = 0$; $b' = \sin\alpha$; $a = 2\cos\alpha$ und $b = 1$, daher das allgemeine Glied $A_n = \sin n\alpha$, welches auch schon aus §. 388. (V) bekannt ist.

Nach §. 458. findet man auch für den vorstehenden erzeugenden Bruch

$$A_n = \sin\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1} - (n-2)(2\cos\alpha)^{n-3} + (n-3)_2(2\cos\alpha)^{n-5} - \ldots\ldots].$$

Hieraus folgt, wegen der Gleichheit vorstehender Ausdrücke,

$$(I)\ \sin n\alpha$$
$$= \sin\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1} - (n-2)(2\cos\alpha)^{n-3} + (n-3)_2(2\cos\alpha)^{n-5} - (n-4)_3(2\cos\alpha)^{n-7} + (n-5)_4(2\cos\alpha)^{n-9} - \ldots\ldots]$$

Weil n der Stellenzeiger der Reihe A; $A_1 x$; $A_2 x^2$; .... ist, so gilt der vorstehende Satz nur dann, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Für jeden Werth von n findet man $\sin n\alpha$, nach §. 199.

Wäre der erzeugende Bruch $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ gegeben, so wird (§. 463.) $a' = 1$; $b' = -\cos\alpha$; $a = 2\cos\alpha$ und $b = 1$, daher $A_n = \frac{\sin(n+1)\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}$. Es ist aber

aber §. 146. [29] $\sin(n+1)\alpha = \sin\alpha \cos n\alpha + \cos\alpha \sin n\alpha$, daher
$\frac{\sin(n+1)\alpha - \cos\alpha \sin n\alpha}{\sin\alpha} = \cos n\alpha$, folglich

$$A_n = \cos n\alpha.$$

Auch erhält man nach §. 458.

$$A_n = (2\cos\alpha)^n - (n-1)(2\cos\alpha)^{n-2} + (n-2)_2 (2\cos\alpha)^{n-4} - (n-3)_3 (2\cos\alpha)^{n-6} + \ldots$$
$$- \cos\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1} - (n-2)(2\cos\alpha)^{n-3} + (n-3)_2 (2\cos\alpha)^{n-5} - (n-4)_3 (2\cos\alpha)^{n-7} + \ldots]$$

oder, wenn man die unter einander stehenden Glieder addirt

$$A_n = \tfrac{1}{2}\left[(2\cos\alpha)^n - \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 (2\cos\alpha)^{n-6} + \ldots\right]$$

Wegen der Gleichheit vorstehender Ausdrücke findet man

$$(II)\ \cos n\alpha = \tfrac{1}{2}\Big[(2\cos\alpha)^n - \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 (2\cos\alpha)^{n-6}$$
$$+ \frac{n}{4}(n-5)_3 (2\cos\alpha)^{n-8} - \frac{n}{5}(n-6)_4 (2\cos\alpha)^{n-10} + \ldots\Big]$$

Hier gelten die Erinnerungen wie bei (*I*).

Für verschiedene Werthe von n erhält man

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$$
$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos\alpha^2 - 1$$
$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = 8\cos\alpha^3 - 4\cos\alpha$$
$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 16\cos\alpha^4 - 12\cos\alpha^2 + 1$$

u. s. w.

§. 474.

Aufgabe. Das Summenglied einer wiederkehrenden Reihe der zweiten Ordnung, aus dem Beziehungsmaaße und den bekannten Gliedern der Reihe zu finden.

Auflösung. Aus den Gleichungen §. 455. erhält man, wenn solche nach ihrer Ordnung mit x^2; x^3; x^4; .... multiplizirt werden

$$A_2 x^2 = ax \cdot A_1 x + bx^2 \cdot A$$
$$A_3 x^3 = ax \cdot A_2 x^2 + bx^2 \cdot A_1 x$$
$$A_4 x^4 = ax \cdot A_3 x^3 + bx^2 \cdot A_2 x^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n x^n = ax \cdot A_{n-1} x^{n-1} + bx^2 \cdot A_{n-2} x^{n-2}.$$

Setzt man nun das Summenglied $\int A_n x^n = S'$ und addirt die übereinander stehenden Glieder der vorstehenden Gleichungen, so wird

$$S' - A - A_1 x = ax(S' - A - A_n x^n) + bx^2 (S' - A_{n-1} x^{n-1} - A_n x^n),$$

hieraus findet man das Summenglied S', oder

$$\int A_n x^n = \frac{A - (aA - A_1)x - (aA_n + bA_{n-1})x^{n+1} - bA_n x^{n+2}}{1 - ax - bx^2}.$$

Beispiel. Von der Reihe §. 469.

$$S = 0 + x - 3x^2 + 7x^3 - 15x^4 + 31x^5 - 63x^6 + 127x^7 - 255x^8 + 511x^9 - 1023x^{10} + 2047x^{11} - 4095x^{12} + \ldots\ldots\ldots$$

die Summe der ersten 13 Glieder zu finden, wird hier $n = 12$; $A = 0$; $A_1 = 1$; $A_{n-1} = 2047$; $A_n = -4095$, und für das Beziehungsmaaß wird $a = -3$ und $b = -2$, folglich

$$S' = \frac{x - 8191x^{13} - 8190x^{14}}{1 + 3x + 2x^2}.$$

Für $x = 1$ findet man

$$S = \frac{-16380}{6} = 2730.$$

§. 475.

Der allgemeinste Ausdruck für den erzeugenden Bruch einer Reihe der zweiten Ordnung ist §. 455.

$$S = \frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Hieraus erhält man

$$\frac{1}{S} = \frac{1 - ax - bx^2}{a' + b'x} = p + qx + \frac{\alpha x^2}{a' + b'x},$$

wo p, qx die gefundenen Quotienten, und α den Koeffizienten des Restes bezeichnen.

Wird mit der Reihe $S = A + Bx + \ldots$ wirklich in die Einheit dividirt, und man sucht nun die beiden ersten Glieder $p + qx$ des Quotienten, so ist der Rest

$$A'x^2 + B'x^3 + \ldots = x^2(A' + B'x + \ldots) = x^2 S',$$

wo S' die in der Parenthese enthaltenen Glieder bezeichnet. Man erhält alsdann

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S} = p + qx + \frac{\alpha x^2}{a' + b'x}, \text{ also}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{\alpha}{a' + b'x} \text{ oder } \frac{S}{S'} = \frac{a'}{\alpha} + \frac{b'}{\alpha}x = p' + q'x,$$

und es muß daher $\frac{S}{S'}$ ohne Rest einen Quotienten von der Form $p' + q'x$ geben, wenn S eine Reihe der zweiten Ordnung ist.

Hieraus folgt ein einfaches Verfahren, um **zu untersuchen, ob eine gegebene Reihe**

$$S = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung ist:

Man dividire die Einheit durch die Reihe S und bestimme im Quotienten die beiden Glieder $p + qx$; den Rest bezeichne man durch $x^2 S'$, und wenn alsdann S' in S dividirt einen Quotienten $p' + q'x$ ohne Rest giebt, oder $\frac{S}{S'} = p' + q'x$ ist, so muß S eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung seyn.

Beispiel. Man soll untersuchen ob

$$S = 1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + 356x^5 + \ldots\ldots$$

eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung ist. Dividirt man mit S in 1, so wird

$$\begin{array}{l} 1 \\ \underline{1 + 2x + 8x^2 + \ldots\ldots} \\ \quad - 2x - 8x^2 - 28x^3 - \ldots \\ \quad \underline{- 2x - 4x^2 - 16x^3 - \ldots} \\ \qquad\quad - 4x^2 - 12x^3 - 44x^4 - \ldots = x^2 S'. \end{array} \left\} \begin{array}{c} 1 + 2x + 8x^2 + 100x^4 + \ldots \\ \hline 1 - 2x = p + qx \end{array} \right.$$

Sucht man ferner $\frac{S}{S'}$, so wird

$$\begin{array}{l} 1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + \ldots \\ \underline{1 + 3x + 11x^2 + 39x^3 + \ldots} \\ - \ x - 3x^2 - 11x^3 - \ldots \\ \underline{- \ x - 3x^2 - 11x^3 - \ldots} \\ \quad 0 \quad\ 0 \quad\ 0 \end{array} \left\} \begin{array}{c} - 4 - 12x - 44x^2 - 156x^3 - \ldots \\ \hline - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x = p' + q'x \end{array} \right.$$

Es ist daher, weil $\frac{S}{S'} = p' + q'x$ ist, die gegebene Reihe von der zweiten Ordnung.

§. 476.

Hat man sich durch das Verfahren nach dem vorigen §. überzeugt, daß eine wiederkehrende Reihe von der zweiten Ordnung ist, so läßt sich alsdann der erzeugende Bruch derselben finden. Denn es war

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S} \text{ und } \frac{S}{S'} = p' + q'x, \text{ daher}$$

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{x^2 S'}{S}} \text{ und } \frac{S'}{S} = \frac{1}{p' + q'x} \text{ also}$$

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{x^2}{p' + q'x}},$$

und man findet daher, wenn die Quotienten $p + qx$ und $p' + q'x$ bekannt sind, die ganze Summe oder den **erzeugenden Bruch** der Reihe

$$S = \frac{p' + q'x}{(p + qx)(p' + q'x) + x^2}.$$

Beispiel. Für die Reihe $1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + \ldots\ldots$ findet man

$$p + qx = 1 - 2x \text{ und } p' + q'x = - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x,$$

daher erhält man den erzeugenden Bruch derselben, oder

$$S = \frac{- \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x}{(1 - 2x)(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}) + x^2} = \frac{1 - x}{1 - 3x - 2x^2}.$$

Auch ist 2; 3; das Beziehungsmaaß der Reihe (§. 455.).

III. Von den einfachen wiederkehrenden Reihen der dritten und der höhern Ordnungen.

§. 477.

Für wiederkehrende Reihen der dritten Ordnung, deren Urbruch allgemein durch

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{1 - ax - bx^2 - cx^3}$$

ausgedrückt werden kann, sey

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

die entsprechende Reihe, so erhält man nach §. 444. die zugehörigen Koeffizientengleichungen

$$\begin{aligned} A &= a' \\ A_1 &= aA + b' \\ A_2 &= aA_1 + bA + c' \\ A_3 &= aA_2 + bA_1 + cA \\ A_4 &= aA_3 + bA_2 + cA_1 \\ A_5 &= aA_4 + bA_3 + cA_2 \end{aligned}$$

und überhaupt

$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2} + cA_{n-3},$$

und es ist $a;\ b;\ c;$ das **Beziehungsmaaß** der vorstehenden Reihe.

Sind daher von einer Reihe der dritten Ordnung die drei ersten Glieder, nebst dem Beziehungsmaaße, gegeben, so können daraus die übrigen Glieder bestimmt werden.

Ist das Beziehungsmaaß einer Reihe unbekannt, dagegen eine hinlängliche Anzahl von den Gliedern der Reihe gegeben, so läßt sich, bei Reihen der ersten Ordnung, aus den beiden ersten Gliedern, bei Reihen der zweiten Ordnung, aus den vier ersten Gliedern, der erzeugende Bruch der Reihe finden (§. 451 und 457.). Eben so könnte man bei Reihen der dritten Ordnung, aus den sechs ersten, und überhaupt bei Reihen der $m$ten Ordnung, aus den $2m$ ersten Gliedern der Reihe, den erzeugenden Bruch finden. Die Entwickelung wird aber so beschwerlich und weitläuftig, daß man hiebei ein anderes Verfahren beobachten muß, welches §. 491. näher aus einander gesetzt ist.

§. 478.

Zur Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten aus dem Urbruch einer Reihe der dritten Ordnung, werde 1 durch den Nenner $1 - ax - bx^2 - cx^3$ dividirt, so findet man

$$\frac{1}{1-ax-bx^2-cx^3} = 1 + ax + \left.\begin{matrix}a^2\\ b\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}a^3\\ 2ab\\ c\end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix}a^4\\ 3a^2b\\ b^2\\ 2ac\end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix}a^5\\ 4\,a^3b\\ 3_2a\,b^2\\ \left.\begin{matrix}1.3\,a^2\\ 2.2_2\,b\end{matrix}\right| c\end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix}a^6\\ 5\,a^4b\\ 4_2a^2b^2\\ 3_3\,b^3\\ \left.\begin{matrix}1.4\,a^3\\ 2.3_2a\,b\end{matrix}\right| c\\ 2_2 2_2\,c^2\end{matrix}\right| x^6$$

$$+\left.\begin{array}{l} a^7 \\ 6\,a^5b \\ 5_2\,a^3b^2 \\ 4_3\,a\,b^3 \\ \left.\begin{array}{l} 1.5\,a^4 \\ 2.4_2\,a^2b \\ 3.3_3\quad b^2 \end{array}\right| c \\ 2_2 3_2\,a\quad c^2 \end{array}\right| x^7 + \left.\begin{array}{l} a^8 \\ 7\,a^6b \\ 6_2\,a^4b^2 \\ 5_3\,a^2b^3 \\ 4_4\quad b^4 \\ \left.\begin{array}{l} 1.6\,a^5 \\ 2.5_2\,a^3b \\ 3.4_3\,a\,b^2 \end{array}\right| c \\ \left.\begin{array}{l} 2_2 4_2\,a^2 \\ 3_2 3_3\quad b \end{array}\right| c^2 \end{array}\right| x^8 + \left.\begin{array}{l} a^9 \\ 8\,a^7b \\ 7_2\,a^5b^2 \\ 6_3\,a^3b^3 \\ 5_4\,a^1b^4 \\ \left.\begin{array}{l} 1.7\,a^6 \\ 2.6_2\,a^4b \\ 3.5_3\,a^2b^2 \end{array}\right| c \\ \left.\begin{array}{l} 2_2 5_2\,a^3 \\ 3_2 4_3\,a\,b \end{array}\right| c^2 \\ 3_3 3_3\quad c^3 \end{array}\right| x^9 + \left.\begin{array}{l} a^{10} \\ 9\,a^8b \\ 8_2\,a^6b^2 \\ 7_3\,a^4b^3 \\ 6_4\,a^2b^4 \\ 5_5\quad b^5 \\ \left.\begin{array}{l} 1.8\,a^7 \\ 2.7_2\,a^5b \\ 3.6_3\,a^3b^2 \\ 4.5_4\,a\,b^3 \end{array}\right| c \\ \left.\begin{array}{l} 2_2 6_2\,a^4 \\ 3_2 5_3\,a^2b \\ 4_2 4_4\quad b^2 \end{array}\right| c^2 \\ 3_3 4_3\,a\quad c^3 \end{array}\right| x^{10} + \text{u. s. w.}$$

Die vorstehende, sehr beschwerliche Division, kann mittelst der combinatorischen Analysis ganz vermieden werden. Auch läßt sich übersehen, daß bei Reihen der vierten und folgenden Ordnungen dies Verfahren, wegen seiner großen Weitläuftigkeit, keine Anwendung findet, weshalb auf das neunzehnte Kapitel §. 806. verwiesen werden muß, wo sich leicht das allgemeine Glied für jede höhere Ordnung darstellen läßt.

Betrachtet man die vorstehende Entwickelung näher, so übersieht man leicht, daß die vorderste übereinander stehende Reihe der Zahlenkoeffizienten in jedem Gliede wiederkehren, daß aber die zweite Reihe der übereinander stehenden Zahlenkoeffizienten vom Exponenten von x abhängt.

Wird daher

$$\frac{1}{1-ax-bx^2-cx^3} = B + B_1x + B_2x^2 + \ldots\ldots + B_nx^n + \ldots\ldots [I]$$

gesetzt, so erhält man

$$\begin{array}{rl} (I)\ B_n = & a^n + (n-1)\,a^{n-2}\,b + (n-2)_2\,a^{n-4}\,b^2 + (n-3)_3\,a^{n-6}b^3 + \ldots\ldots \\ & +[(n-2)\,a^{n-3} + 2(n-3)_2\,a^{n-5}\,b + 3(n-4)_3\,a^{n-7}\,b^2 + 4(n-5)_4\,a^{n-9}b^3 + \ldots]\,c \\ & +[(n-4)_2a^{n-6} + 3(n-5)_3\,a^{n-8}\,b + 6(n-6)_4\,a^{n-10}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots]\,c^2 \\ & +[(n-6)_3a^{n-9} + 4(n-7)_4\,a^{n-11}b + 10(n-8)_5\,a^{n-13}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots]\,c^3 \\ & +[(n-8)_4a^{n-12} + 5(n-9)_5\,a^{n-14}b + 15(n-10)_6\,a^{n-16}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots]\,c^4 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die aufeinander folgenden Zahlenkoeffizienten der mit c; c^2; c^3; .... multiplizirten Reihen, sind

$$\begin{array}{llllllll} 1; & 2; & 3; & 4; & 5; & 6; & 7; & 8; \ldots\ldots \\ 2_2; & 3_2; & 4_2; & 5_2; & 6_2; & 7_2; & 8_2; \ldots\ldots \\ 3_3; & 4_3; & 5_3; & 6_3; & 7_3; & 8_3; \ldots\ldots \\ 4_4; & 5_4; & 6_4; & 7_4; & 8_4; \ldots\ldots \\ 5_5; & 6_5; & 7_5; & 8_5; \ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w.

Wenn daher der erzeugende Bruch $\frac{a'+b'x}{1-ax+bx^2}$ gegeben ist, und man will A_n nicht durch eine Reihe entwickeln, so erhält man für $a^2 < 4b$, und wenn in vorstehenden Ausdruck $g = \sqrt{b}$ gesetzt wird, den allgemeinen Koeffizienten:

$$A_n = \frac{a'\sqrt{b} . \sin(n+1)\alpha + b' \sin n\alpha}{\sin\alpha} b^{\frac{n-1}{2}},$$

wo hier $\sin\alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4b}\right)}$ und $\cos\alpha = \frac{a}{2\sqrt{b}}$ ist.

§. 464.

Aufgabe. Aus dem erzeugenden Bruch $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$ das allgemeine Glied zu finden.

1. Auflösung. Hier ist für $a' = 1$; $b' = -1$; $a = 5$ und $b = -6$ nach §. 459. (I) und (II)
$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)} = \sqrt{(\frac{25}{4} - 6)} = \frac{1}{2} = c$ also $\frac{1}{2}a + c = 3$ und $\frac{1}{2}a - c = 2$, daher wird der allgemeine Koeffizient

$$A_n = 2.3^n - 2^n$$

und das allgemeine Glied

$$y_n = (2.3^n - 2^n)x^n.$$

Die entsprechende Reihe ist

$$1;\ 4x;\ 14x^2;\ 46x^3;\ 146x^4;\ 146x^5;\ \ldots\ldots$$

2. Auflösung. Sucht man den allgemeinen Koeffizienten nach §. 458., so wird

$$A_n = B_n - B_{n-1} \text{ und}$$

$$B_n = 5^n - (n-1)5^{n-2}6 + (n-2)_2 5^{n-4}6^2 - (n-3)_3 5^{n-6}6^3 + \ldots\ldots$$

also $B = 1$; $B_1 = 5$; $B_2 = 19$; $B_3 = 65$; $B^4 = 211$; ..... daher findet man

$$A = B = 1$$
$$A_1 = B_1 - B = 4$$
$$A_2 = B_2 - B_1 = 14$$
$$A_3 = B_3 - B_2 = 46$$
$$A_4 = B_4 - B_3 = 146$$

u. s. w.

§. 465.

Aufgabe. Aus dem Urbruch $\frac{1-10x}{1+4x-7x^2}$ das allgemeine Glied zu finden.

1. Auflösung. Hier ist für $a' = 1$; $b' = -10$; $a = -4$ und $b = 7$ nach §. 459.

$$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)} = \sqrt{(\frac{16}{4} + 7)} = \sqrt{11} = c, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2}a + c = -2 + \sqrt{11} \text{ und } \frac{1}{2}a - c = -2 - \sqrt{11} \text{ daher}$$

$$A_n = \frac{-12+\sqrt{11}}{2\sqrt{11}}(-2+\sqrt{11})^n + \frac{12+\sqrt{11}}{2\sqrt{11}}(-2-\sqrt{11})^n.$$

Da sich dieser Ausdruck nicht leicht einfacher darstellen läßt, so verdient die folgende Auflösung den Vorzug.

2. **Auflösung.** Nach §. 458. wird hier

$$A_n = B_n - 10 B_{n-1} \text{ und}$$

$$B_n = (-4)^n + (n-1)(-4)^{n-2}7 + (n-2)_2(-4)^{n-4}7^2 + \ldots .$$

$$= \pm [4^n + (n-1)\,4^{n-2}7 + (n-2)_2\,4^{n-4}7^2 + (n-3)_3\,4^{n-6}7^3 + \ldots]$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten. Hienach wird $B = +1$; $B_1 = -4$; $B_2 = +23$; $B_3 = -120$; $B_4 = +641$; …… daher

$$\begin{aligned} A &= B = 1 \\ A_1 &= B_1 - 10B = - \ 14 \\ A_2 &= B_2 - 10B_1 = + \ 63 \\ A_3 &= B_3 - 10B_2 = - \ 350 \\ A_4 &= B_4 - 10B_3 = + \ 1841 \end{aligned}$$

u. s. w.

Die entsprechende Reihe ist:

$$+1; \ -14x; \ +63x^2; \ -350x^3; \ +1841x^4; \ \ldots\ldots$$

§. 466.

Aufgabe. Das allgemeine Glied für den Urbruch $\frac{1-5x}{1+x-6x^2}$ zu finden.

Auflösung. Man setze $a' = 1$; $b' = -5$; $a = -1$ und $b = 6$, so wird nach §. 459.

$$c = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 6)} = \tfrac{5}{2} \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}a + c = 2; \ \tfrac{1}{2}a - c = -3, \text{ folglich}$$

$$A_n = \frac{-3}{5}2^n - \frac{-8}{5}(-3)^n \text{ oder}$$

$$A_n = \frac{1}{5}(\pm 8 . 3^n - 3 . 2^n),$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten.

Die hiezu gehörige Reihe ist:

$$+1; \ -6x; \ +12x^2; \ -48x^3; \ +120x^4; \ -408x^5; \ \ldots\ldots$$

Zusatz. Wäre hingegen der Urbruch $\frac{1-5x}{(1-2x)(1+3x)}$ gegeben, so ist hier, nach §. 461. (*II*)

$$a' = 1; \ b' = -5; \ a = 2; \ b = -3, \text{ daher}$$

$$A_n = \frac{(2-5)2^n - (-3-5)(-3)^n}{2+3}.$$

Dieser Ausdruck ist mit dem oben gefundenen einerlei, weil beide Urbrüche einander gleich sind.

§. 467.

Aufgabe. Das allgemeine Glied für den Urbruch $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ zu finden.

Auflösung. Hier ist für $a' = 1$; $b' = 2$; $a = 1$; $b = 1$ nach §. 459.

$$c = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 1)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}; \ \tfrac{1}{2}a + c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \ \tfrac{1}{2}a - c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ daher}$$

$$A_n = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$ oder §. 44. (Beisp.)

$$A_n = \frac{1}{2^n}[1 + (n+1)_2 5 + (n+1)_4 5^2 + (n+1)_6 5^3 + (n+1)_8 5^4 + \ldots\ldots].$$

Die entsprechende Reihe ist:

$1;\ 3x;\ 4x^2;\ 7x^3;\ 11x^4;\ 18x^5;\ 29x^6;\ \ldots\ldots$

§. 468.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{2+x}{1+x+x^2}$ das entsprechende allgemeine Glied zu finden.

1. **Auflösung.** Hier ist $a' = 2;\ b' = 1;\ a = -1;\ b = -1$ also §. 459.
$c = \sqrt{(\frac{1}{4}-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{-3};\ \frac{1}{2}a + c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3};\ \frac{1}{2}a - c = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, daher

$$A_n = \frac{2(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})+1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n - \frac{2(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})+1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n$$ oder

$$A_n = \frac{1}{2^n}[(-1+\sqrt{-3})^n + (-1-\sqrt{-3})^n]$$ oder §. 44. (*II*)

$$= \frac{2(-1)^n}{2^n}[1 - n_2 3 + n_4 3^2 - n_6 3^3 + n_8 3^4 - \ldots]$$ oder

$$A_n = \pm\frac{1}{2^{n-1}}[1 - n_2 3 + n_4 3^2 - n_6 3^3 + n_8 3^4 - \ldots.]$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten.

Die entsprechende Reihe ist:

$+2;\ -x;\ -x^2;\ +2x^3;\ -x^4;\ -x^5;\ +2x^6;\ -x^7;\ \ldots\ldots$

2. **Auflösung.** Will man A_n nicht durch eine Reihe darstellen, so kann man nach §. 463. verfahren. Hienach wird $a' = 2;\ b' = 1;\ a = -1;\ b = 1$, daher
$\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi$ also $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, daher das allgemeine Glied

$$A_n = \frac{2\sin\frac{2}{3}(n+1)\pi + \sin\frac{2}{3}n\pi}{\sin\frac{2}{3}\pi},$$

oder weil $\sin\frac{2}{3}\pi = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist

$$A_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}[2\sin\tfrac{2}{3}(n+1)\pi + \sin\tfrac{2}{3}n\pi].$$

Hierin nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt n gesetzt, und bemerkt, daß $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin\frac{6}{3}\pi = \sin 2\pi = 0$; $\sin\frac{8}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin\frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; .... so wird

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{3}.2\sin\tfrac{2}{3}\pi = 2$$

$$A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2\sin\tfrac{4}{3}\pi + \sin\tfrac{2}{3}\pi) = -1$$

$$A_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2\sin 2\pi + \sin\tfrac{4}{3}\pi) = -1$$

$$A_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2\sin\tfrac{8}{3}\pi + \sin 2\pi) = 2$$

u. s. w.

§. 469.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{x}{1+3x+2x^2}$ den allgemeinen Koeffizienten zu finden.

Auflösung. Hier ist für $a'=0$; $b'=1$; $a=-3$; $b=-2$ nach §. 459. $c=\sqrt{(\frac{9}{4}-2)}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}a+c=-1$; $\frac{1}{2}a-c=-2$ folglich

$$A_n=\mp(2^n-1),$$

wo das obere Zeichen, für ein gerades, das untere, für ein ungerades n gilt.

Die entsprechende Reihe ist:

$$+x;\ -3x^2;\ +7x^3;\ -15x^4;\ +31x^5;\ \ldots\ldots$$

§. 470.

Aufgabe. Den allgemeinen Koeffizienten zu finden, welcher dem Urbruch $\frac{1}{1-2x+10x^2}$ entspricht.

1. **Auflösung.** Hier ist $a'=1$; $b'=0$; $a=2$; $b=-10$, daher §. 459. $c=3\sqrt{-1}$. Die Rechnung wird aber hienach weitläuftig, weßhalb man um so mehr nach §. 458. verfahren kann, weil der Zähler des Urbruchs nur aus einem Gliede besteht. Man erhält daher nach §. 458.

$$A_n=2^n-(n-1)2^{n-2}+(n-2)_2\,2^{n-4}\,10^2-(n-3)_3\,2^{n-6}\,10^3+\ldots\ldots$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$1;\ 2x;\ -6x^2;\ -32x^3;\ -4x^4;\ +312x^5;\ \ldots\ldots$$

2. **Auflösung.** Wird das allgemeine Glied nach §. 463. gesucht, so ist hier $a'=1$; $b'=0$; $a=2$ und $b=10$, also $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $\sin\alpha=\sqrt{(1-\frac{1}{10})}=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Hienach kann man aber nicht wie §. 468. α als einen Theil vom halben Umfange π ausdrucken, daher muß α in dem Ausdruck für das allgemeine Glied beibehalten werden, und man findet

$$A_n=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,.\,\sqrt{10^n},$$

oder weil $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$ ist

$$A_n=\tfrac{1}{3}\sin(n+1)\alpha\,.\,\sqrt{10^{n+1}}.$$

Hienach erhält man (§. 199.)

$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin 3\alpha=\frac{-9}{5\sqrt{10}}$; $\sin 4\alpha=\frac{-24}{25}$; $\sin 5\alpha=\frac{-3}{25\sqrt{10}}$; $\sin 6\alpha=\frac{117}{125}$; u. s. w.

§. 471.

Aufgabe. Das allgemeine Glied für den Urbruch $\frac{1+x}{1+x^2}$ zu finden.

Auflösung. Hier ist $a'=1$; $b'=1$; $b=-1$, daher nach §. 460. der allgemeine Koeffizient

$$A_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für ein gerades } n\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für ein ungerades } n.\end{cases}$$

Die entsprechende Reihe wird hienach:

$$+1;\ +x;\ -x^2;\ -x^3;\ +x^4;\ +x^5;\ -x^6;\ -x^7;\ +x^8;\ \ldots\ldots$$

Zusatz. Für den Urbruch $\frac{1-x}{1+x^2}$ findet man

$$A_n = \begin{cases} +(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ für ein gerades } n, \\ -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ für ein ungerades } n. \end{cases}$$

Die entsprechende Reihe ist:

$$+1;\ -x;\ -x^2;\ +x^3;\ +x^4;\ -x^5;\ -x^6;\ +x^7;\ +x^8;\ \ldots\ldots$$

§. 472.

Aufgabe. Aus dem Urbruch $\frac{2-9x}{(3+x)^2}$ das allgemeine Glied zu finden.

Auflösung. Weil das erste Glied des Nenners $=1$ seyn soll, so erhält man, statt des gegebenen Urbruchs, den Bruch

$$\frac{\frac{2}{9}-x}{(1+\frac{1}{3}x)^2}.$$

Für diesen wird $a'=\frac{2}{9}$; $b'=-1$; $\alpha=-\frac{1}{3}$, daher nach §. 462.

$$A_n = [-(n+1)\tfrac{2}{27}-n]\,(-\tfrac{1}{3})^{n-1} = -\frac{29n+2}{27(-3)^{n-1}} = \pm\frac{29n+2}{3^3 3^{n-1}} \text{ oder}$$

$$A_n = \pm\frac{29n+2}{3^{n+2}};$$

wo die oberen Zeichen, für ein gerades, die unteren, für ein ungerades n gelten.

Die entsprechende Reihe ist:

$$+\tfrac{2}{9};\ -\tfrac{31}{27}x;\ +\tfrac{60}{81}x^2;\ -\tfrac{89}{243}x^3;\ +\tfrac{118}{729}x^4;\ \ldots\ldots$$

§. 473.

Für den erzeugenden Bruch $\frac{x \sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ wird (§. 463.) $a'=0$; $b'=\sin\alpha$; $a=2\cos\alpha$ und $b=1$, daher das allgemeine Glied $A_n=\sin n\alpha$, welches auch schon aus §. 388. (V) bekannt ist.

Nach §. 458. findet man auch für den vorstehenden erzeugenden Bruch

$$A_n = \sin\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1}-(n-2)(2\cos\alpha)^{n-3}+(n-3)_2(2\cos\alpha)^{n-5}-\ldots].$$

Hieraus folgt, wegen der Gleichheit vorstehender Ausdrücke,

$$(I)\quad \sin n\alpha$$
$$=\sin\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1}-(n-2)(2\cos\alpha)^{n-3}+(n-3)_2(2\cos\alpha)^{n-5}-(n-4)_3(2\cos\alpha)^{n-7}+(n-5)_4(2\cos\alpha)^{n-9}-\ldots]$$

Weil n der Stellenzeiger der Reihe A; A_1x; A_2x^2; .... ist, so gilt der vorstehende Satz nur dann, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Für jeden Werth von n findet man $\sin n\alpha$, nach §. 199.

Wäre der erzeugende Bruch $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ gegeben, so wird (§. 463.) $a'=1$; $b'=-\cos\alpha$; $a=2\cos\alpha$ und $b=1$, daher $A_n=\frac{\sin(n+1)\alpha-\cos\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}$. Es ist

aber

aber §. 146. [29] $\sin(n+1)\alpha = \sin\alpha \cos n\alpha + \cos\alpha \sin n\alpha$, daher
$\frac{\sin(n+1)\alpha - \cos\alpha \sin n\alpha}{\sin\alpha} = \cos n\alpha$, folglich

$$A_n = \cos n\alpha.$$

Auch erhält man nach §. 458.

$$A_n = (2\cos\alpha)^n - (n-1)(2\cos\alpha)^{n-2} + (n-2)_2 (2\cos\alpha)^{n-4} - (n-3)_3 (2\cos\alpha)^{n-6} + \ldots$$
$$- \cos\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1} - (n-2)(2\cos\alpha)^{n-3} + (n-3)_2 (2\cos\alpha)^{n-5} - (n-4)_3 (2\cos\alpha)^{n-7} + \ldots]$$

oder, wenn man die unter einander stehenden Glieder addirt

$$A_n = \tfrac{1}{2}\left[(2\cos\alpha)^n - \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 (2\cos\alpha)^{n-6} + \ldots\right]$$

Wegen der Gleichheit vorstehender Ausdrücke findet man

$$(II)\ \cos n\alpha = \tfrac{1}{2}\Big[(2\cos\alpha)^n - \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 (2\cos\alpha)^{n-6}$$
$$+ \frac{n}{4}(n-5)_3 (2\cos\alpha)^{n-8} - \frac{n}{5}(n-6)_4 (2\cos\alpha)^{n-10} + \ldots\Big]$$

Hier gelten die Erinnerungen wie bei (*I*).

Für verschiedene Werthe von n erhält man

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$$
$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos\alpha^2 - 1$$
$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = 8\cos\alpha^3 - 4\cos\alpha$$
$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 16\cos\alpha^4 - 12\cos\alpha^2 + 1$$

u. s. w.

§. 474.

Aufgabe. Das Summenglied einer wiederkehrenden Reihe der zweiten Ordnung, aus dem Beziehungsmaaße und den bekannten Gliedern der Reihe zu finden.

Auflösung. Aus den Gleichungen §. 455. erhält man, wenn solche nach ihrer Ordnung mit x^2; x^3; x^4; .... multiplizirt werden

$$A_2 x^2 = ax \cdot A_1 x + bx^2 \cdot A$$
$$A_3 x^3 = ax \cdot A_2 x^2 + bx^2 \cdot A_1 x$$
$$A_4 x^4 = ax \cdot A_3 x^3 + bx^2 \cdot A_2 x^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n x^n = ax \cdot A_{n-1} x^{n-1} + bx^2 \cdot A_{n-2} x^{n-2}.$$

Setzt man nun das Summenglied $\int A_n x^n = S'$ und addirt die übereinander stehenden Glieder der vorstehenden Gleichungen, so wird

$$S' - A - A_1 x = ax(S' - A - A_n x^n) + bx^2 (S' - A_{n-1} x^{n-1} - A_n x^n),$$

hieraus findet man das Summenglied S', oder

$$\int A_n x^n = \frac{A - (aA - A_1)x - (aA_n + bA_{n-1})x^{n+1} - bA_n x^{n+2}}{1 - ax - bx^2}.$$

Beispiel. Von der Reihe §. 469.

$$S = o + x - 3x^2 + 7x^3 - 15x^4 + 31x^5 - 63x^6 + 127x^7 - 255x^8 + 511x^9 - 1023x^{10} + 2047x^{11} - 4095x^{12} + \ldots\ldots\ldots$$

die Summe der ersten 13 Glieder zu finden, wird hier $n = 12$; $A = o$; $A_1 = 1$; $A_{n-1} = 2047$; $A_n = -4095$, und für das Beziehungsmaaß wird $a = -3$ und $b = -2$, folglich

$$S' = \frac{x - 8191x^{13} - 8190x^{14}}{1 + 3x + 2x^2}.$$

Für $x = 1$ findet man

$$S = \frac{-16380}{6} = 2730.$$

§. 475.

Der allgemeinste Ausdruck für den erzeugenden Bruch einer Reihe der zweiten Ordnung ist §. 455.

$$S = \frac{a' + b'x}{1 - ax - bx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Hieraus erhält man

$$\frac{1}{S} = \frac{1 - ax - bx^2}{a' + b'x} = p + qx + \frac{\alpha x^2}{a' + b'x},$$

wo p, qx die gefundenen Quotienten, und α den Koeffizienten des Restes bezeichnen.

Wird mit der Reihe $S = A + Bx + \ldots\ldots$ wirklich in die Einheit dividirt, und man sucht nun die beiden ersten Glieder $p + qx$ des Quotienten, so ist der Rest

$$A'x^2 + B'x^3 + \ldots = x^2 (A' + B'x + \ldots) = x^2 S',$$

wo S' die in der Parenthese enthaltenen Glieder bezeichnet. Man erhält alsdann

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S} = p + qx + \frac{\alpha x^2}{a' + b'x}, \text{ also}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{\alpha}{a' + b'x} \text{ oder } \frac{S}{S'} = \frac{a'}{\alpha} + \frac{b'}{\alpha} x = p' + q'x,$$

und es muß daher $\frac{S}{S'}$ ohne Rest einen Quotienten von der Form $p' + q'x$ geben, wenn S eine Reihe der zweiten Ordnung ist.

Hieraus folgt ein einfaches Verfahren, um **zu untersuchen, ob eine gegebene Reihe**

$$S = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung ist:

Man dividire die Einheit durch die Reihe S und bestimme im Quotienten die beiden Glieder $p + qx$; den Rest bezeichne man durch $x^2 S'$, und wenn alsdann S' in S dividirt einen Quotienten $p' + q'x$ ohne Rest giebt, oder $\frac{S}{S'} = p' + q'x$ ist, so muß S eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung seyn.

Beispiel. Man soll untersuchen ob

$$S = 1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + 356x^5 + \ldots\ldots$$

eine wiederkehrende Reihe der zweiten Ordnung ist. Dividirt man mit S in 1, so wird

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 + 2x + 8x^2 + 100x^4 + \ldots \\ \underline{1 + 2x + 8x^2 + \ldots\ldots} & \overline{1 - 2x = p + qx} \\ \quad - 2x - 8x^2 - 28x^3 - \ldots & \\ \quad \underline{- 2x - 4x^2 - 16x^3 - \ldots} & \\ \qquad\quad - 4x^2 - 12x^3 - 44x^4 - \ldots = x^2 S'. & \end{array}$$

Sucht man ferner $\frac{S}{S'}$, so wird

$$\begin{array}{l|l} 1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + \ldots & - 4 - 12x - 44x^2 - 156x^3 - \ldots \\ \underline{1 + 3x + 11x^2 + 39x^3 + \ldots} & \overline{- \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x = p' + q'x} \\ - \;x - \;3x^2 - 11x^3 - \ldots & \\ \underline{- \;x - \;3x^2 - 11x^3 - \ldots} & \\ \;\;0 \qquad 0 \qquad 0 & \end{array}$$

Es ist daher, weil $\frac{S}{S'} = p' + q'x$ ist, die gegebene Reihe von der zweiten Ordnung.

§. 476.

Hat man sich durch das Verfahren nach dem vorigen §. überzeugt, daß eine wiederkehrende Reihe von der zweiten Ordnung ist, so läßt sich alsdann der erzeugende Bruch derselben finden. Denn es war

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S} \text{ und } \frac{S}{S'} = p' + q'x, \text{ daher}$$

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{x^2 S'}{S}} \text{ und } \frac{S'}{S} = \frac{1}{p' + q'x} \text{ also}$$

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{x^2}{p' + q'x}},$$

und man findet daher, wenn die Quotienten $p + qx$ und $p' + q'x$ bekannt sind, die ganze Summe oder den erzeugenden Bruch der Reihe

$$S = \frac{p' + q'x}{(p + qx)(p' + q'x) + x^2}.$$

Beispiel. Für die Reihe $1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + \ldots$ findet man

$$p + qx = 1 - 2x \text{ und } p' + q'x = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x,$$

daher erhält man den erzeugenden Bruch derselben, oder

$$S = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x}{(1 - 2x)(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}) + x^2} = \frac{1 - x}{1 - 3x - 2x^2}.$$

Auch ist 2; 3; das Beziehungsmaaß der Reihe (§. 455.).

III. Von den einfachen wiederkehrenden Reihen der dritten und der höhern Ordnungen.

§. 477.

Für wiederkehrende Reihen der dritten Ordnung, deren Urbruch allgemein durch

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{1 - ax - bx^2 - cx^3}$$

ausgedrückt werden kann, sey

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

die entsprechende Reihe, so erhält man nach §. 444. die zugehörigen Koeffizientengleichungen

$$\begin{aligned}
A &= a' \\
A_1 &= aA + b' \\
A_2 &= aA_1 + bA + c' \\
A_3 &= aA_2 + bA_1 + cA \\
A_4 &= aA_3 + bA_2 + cA_1 \\
A_5 &= aA_4 + bA_3 + cA_2
\end{aligned}$$

und überhaupt

$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2} + cA_{n-3},$$

und es ist $a; b; c;$ das **Beziehungsmaaß** der vorstehenden Reihe.

Sind daher von einer Reihe der dritten Ordnung die drei ersten Glieder, nebst dem Beziehungsmaaße, gegeben, so können daraus die übrigen Glieder bestimmt werden.

Ist das Beziehungsmaaß einer Reihe unbekannt, dagegen eine hinlängliche Anzahl von den Gliedern der Reihe gegeben, so läßt sich, bei Reihen der ersten Ordnung, aus den beiden ersten Gliedern, bei Reihen der zweiten Ordnung, aus den vier ersten Gliedern, der erzeugende Bruch der Reihe finden (§. 451 und 457.). Eben so könnte man bei Reihen der dritten Ordnung, aus den sechs ersten, und überhaupt bei Reihen der $m$ten Ordnung, aus den $2m$ ersten Gliedern der Reihe, den erzeugenden Bruch finden. Die Entwickelung wird aber so beschwerlich und weitläuftig, daß man hiebei ein anderes Verfahren beobachten muß, welches §. 491. näher aus einander gesetzt ist.

§. 478.

Zur Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten aus dem Urbruch einer Reihe der dritten Ordnung, werde 1 durch den Nenner $1 - ax - bx^2 - cx^3$ dividirt, so findet man

$$\frac{1}{1-ax-bx^2-cx^3} = 1 + ax + \left.\begin{array}{r} a^2 \\ b \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} a^3 \\ 2ab \\ c \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{r} a^4 \\ 3a^2b \\ b^2 \\ 2ac \end{array}\right| x^4 + \left.\begin{array}{l} a^5 \\ 4\,a^3b \\ 3_2 a\,b^2 \\ \left.\begin{array}{l} 1.3\,a^2 \\ 2.2_2\,b \end{array}\right| c \end{array}\right| x^5 + \left.\begin{array}{l} a^6 \\ 5\,a^4b \\ 4_2 a^2b^2 \\ 3_3\,b^3 \\ \left.\begin{array}{l} 1.4\,a^3 \\ 2.3_2 a\,b \end{array}\right| c \\ 2_2 2_2\quad c^2 \end{array}\right| x^6$$

$+\ a^7$	$x^7 +$	a^8	$x^8 +$	a^9	$x^9 +$	a^{10}	$x^{10} +$ u. s. w.
$6\ a^5b$		$7\ a^6b$		$8\ a^7b$		$9\ a^8b$	
$5_2\ a^3b^2$		$6_2\ a^4b^2$		$7_2\ a^5b^2$		$8_2\ a^6b^2$	
$4_3\ a\ b^3$		$5_3\ a^2b^3$		$6_3\ a^3b^3$		$7_3\ a^4b^3$	
$1.5\ a^4 \mid c$		$4_4\ b^4$		$5_4\ a\ b^4$		$6_4\ a^2b^4$	
$2.4_2\ a^2b$		$1.6\ a^5 \mid c$		$1.7\ a^6 \mid c$		$5_5\ b^5$	
$3.3_3\ b^2$		$2.5_2\ a^3b$		$2.6_2\ a^4b$		$1.8\ a^7 \mid c$	
$2_2 3_2\ a \quad c^2$		$3.4_3\ a\ b^2$		$3.5_3\ a^2b^2$		$2.7_2\ a^5b$	
		$2_2 4_2\ a^2 \mid c^2$		$2_2 5_2\ a^3 \mid c^2$		$3.6_3\ a^3b^2$	
		$3_2 3_3\ b$		$3_2 4_3\ a\ b$		$4.5_4\ a\ b^3$	
				$3_3 3_3 \quad c^3$		$2_2 6_2\ a^4 \mid c^2$	
						$3_2 5_3\ a^2b$	
						$4_2 4_4\ b^2$	
						$3_3 4_3\ a \quad c^3$	

Die vorstehende, sehr beschwerliche Division, kann mittelst der combinatorischen Analysis ganz vermieden werden. Auch läßt sich übersehen, daß bei Reihen der vierten und folgenden Ordnungen dies Verfahren, wegen seiner großen Weitläuftigkeit, keine Anwendung findet, weshalb auf das neunzehnte Kapitel §. 806. verwiesen werden muß, wo sich leicht das allgemeine Glied für jede höhere Ordnung darstellen läßt.

Betrachtet man die vorstehende Entwickelung näher, so übersieht man leicht, daß die vorderste übereinander stehende Reihe der Zahlenkoeffizienten in jedem Gliede wiederkehren, daß aber die zweite Reihe der übereinander stehenden Zahlenkoeffizienten vom Exponenten von x abhängt.

Wird daher

$$\frac{1}{1 - ax - bx^2 - cx^3} = B + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_n x^n + \ldots\ldots [I]$$

gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
(I)\ B_n = \quad & a^n + (n-1)\, a^{n-2} b + (n-2)_2\, a^{n-4} b^2 + (n-3)_3\, a^{n-6} b^3 + \ldots\ldots \\
& + [(n-2)\, a^{n-3} + 2(n-3)_2\, a^{n-5} b + 3(n-4)_3\, a^{n-7} b^2 + 4(n-5)_4\, a^{n-9} b^3 + \ldots]\, c \\
& + [(n-4)_2 a^{n-6} + 3(n-5)_3\, a^{n-8} b + 6(n-6)_4\, a^{n-10} b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots]\, c^2 \\
& + [(n-6)_3 a^{n-9} + 4(n-7)_4\, a^{n-11} b + 10(n-8)_5\, a^{n-13} b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots]\, c^3 \\
& + [(n-8)_4 a^{n-12} + 5(n-9)_5\, a^{n-14} b + 15(n-10)_6\, a^{n-16} b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots]\, c^4 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die aufeinander folgenden Zahlenkoeffizienten der mit c; c^2; c^3; .... multiplizirten Reihen, sind

$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ \ldots\ldots$
$2_2;\ 3_2;\ 4_2;\ 5_2;\ 6_2;\ 7_2;\ 8_2;\ \ldots\ldots$
$3_3;\ 4_3;\ 5_3;\ 6_3;\ 7_3;\ 8_3;\ \ldots\ldots$
$4_4;\ 5_4;\ 6_4;\ 7_4;\ 8_4;\ \ldots\ldots$
$5_5;\ 6_5;\ 7_5;\ 8_5;\ \ldots\ldots$
u. s. w.

Den vorstehenden Ausdruck $[I]$ mit $a' + b'x + c'x^2$ multiplizirt, giebt:

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{1-ax-bx^2-cx^3} = a'B + \begin{array}{c|} a'B_1 \\ b'B \\ \end{array} x + \begin{array}{c|} a'B_2 \\ b'B_1 \\ c'B \end{array} x^2 + \begin{array}{c|} a'B_3 \\ b'B_2 \\ c'B_1 \end{array} x^3 + \ldots + \begin{array}{c|} a'B_n \\ b'B_{n-1} \\ c'B_{n-2} \end{array} x^n + \ldots$$

oder, wenn der erzeugende Bruch

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{1-ax-bx^2-cx^3} = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

gesetzt wird, so erhält man den allgemeinen Koeffizienten

$$(II)\ A_n = a'B_n + b'B_{n-1} + c'B_{n-2},$$

wobei zu bemerken ist, daß B_{n-1} und B_{n-2} aus B_n gefunden wird, wenn man in (I) $n-1$ oder $n-2$ statt n setzt, weßhalb bei der Bestimmung der besondern Werthe für A_n, nur die besondern Werthe für B_n zu berechnen sind.

Man sehe das folgende Beispiel.

§. 479.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{1+x^2}{1+x-\frac{1}{7}x^3}$ das allgemeine Glied zu finden.

Auflösung. Hier ist $a' = 1$; $b' = 0$; $c' = 1$; $a = -1$; $b = 0$; $c = \frac{1}{7}$, daher wird der allgemeine Koeffizient

$$A_n = B_n + B_{n-2}\ [I].$$

Nach §. 478. wird hier

$$B_n = (-1)^n + \frac{(n-2)(-1)^{n-3}}{7} + \frac{(n-4)_2(-1)^{n-4}}{7^2} + \ldots \text{ oder}$$

$$B_n = \pm\left(1 - \frac{n-2}{7} + \frac{(n-4)_2}{7^2} - \frac{(n-6)_3}{7^3} + \frac{(n-8)_4}{7^4} - \frac{(n-10)_5}{7^5} + \ldots\right)$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Hieraus findet man

$B = +1$; $B_1 = -1$; $B_2 = +1$; $B_3 = -\frac{6}{7}$; $B_4 = +\frac{5}{7}$; $B_5 = -\frac{4}{7}$; $B^6 = +\frac{20}{7^2}$; $B_7 = -\frac{17}{7^2}$; .....

Nun ist nach $[I]$

$A = B$	$A_4 = B_4 + B_2$
$A_1 = B_1$	$A_5 = B_5 + B_3$
$A_2 = B_2 + B$	$A_6 = B_6 + B_4$
$A_3 = B_3 + B_1$	u. s. w.

man findet daher

$A = +1$	$A_4 = +\frac{12}{7}$
$A_1 = -1$	$A_5 = -\frac{10}{7}$
$A_2 = +2$	$A_6 = +\frac{55}{7^2}$
$A_3 = -\frac{13}{7}$	u. s. w.

Die dem Urbruch entsprechende Reihe ist daher

$$1;\ -x;\ +2x^2;\ -\frac{13}{7}x^3;\ +\frac{12}{7}x^4;\ -\frac{10}{7}x^5;\ +\frac{55}{7^2}x^6;\ -\frac{45}{7^2}x^7;\ \ldots\ldots$$

§. 480.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ das allgemeine Glied zu finden.

Auflösung. Hier ist $a' = 1$; $b' = c' = 0$; $a = b = 1$; $c = -1$ daher

$$A_n = B_n.$$

Nun ist nach §. 478.

$$\begin{aligned} B_n = 1 &+ (n-1) + (n-2)_2 + (n-3)_3 + (n-4)_4 + (n-5)_5 + \ldots \\ &- (n-2) - 2(n-3)_2 - 3(n-4)_3 - 4(n-5)_4 - 5(n-6)_4 - \ldots \\ &+ (n-4)_2 + 3(n-5)_3 + 6(n-6)_4 + 10(n-7)_5 + \ldots \\ &- (n-6)_3 - 4(n-7)_4 - 10(n-8)_5 - 20(n-9)_6 - \ldots \\ &+ (n-8)_4 + 5(n-9)_5 + 15(n-10)_6 + \ldots \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Hienach findet man die entsprechende Reihe

1; x; $2x^2$; $2x^3$; $3x^4$; $3x^5$; $4x^6$; $4x^7$; $5x^8$; $5x^9$; ......

§. 481.

Aufgabe. Für den Urbruch $\frac{1+4x+x^2}{1+2x-x^2-2x^3}$ das allgemeine Glied zu finden.

Auflösung. Hier ist $a' = 1$; $b' = 4$; $c' = 1$; $a = -2$; $b = 1$; $c = 2$ daher §. 478.

$$A_n = B_n + 4B_{n-1} + B_{n-2} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} B_n = &\pm \quad [2^n + (n-1)2^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4} + (n-3)_3 2^{n-6} + \ldots] \\ &\mp [(n-2) 2^{n-2} + 2(n-3)_2 2^{n-4} + 3(n-4)_3 2^{n-6} + 4(n-5)_4 2^{n-8} + \ldots] \\ &\pm [(n-4)_2 2^{n-4} + 3(n-5)_3 2^{n-6} + 6(n-6)_4 2^{n-8} + \ldots\ldots] \\ &\mp [(n-6)_3 2^{n-6} + 4(n-7)_4 2^{n-8} + \ldots\ldots\ldots] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$B = +1$; $B_1 = -2$; $B_2 = +5$; $B_3 = -10$; $B_4 = +21$; $B_5 = -42$; u. s. w., daher

$$\begin{aligned} A &= B = +1 \\ A_1 &= B_1 + 4B = +2 \\ A_2 &= B_2 + 4B_1 + B = -2 \\ A_3 &= B_3 + 4B_2 + B_1 = +8 \\ A_4 &= B_4 + 4B_3 + B_2 = -14 \\ A_5 &= B_5 + 4B_4 + B_3 = +32 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Die entsprechende Reihe ist:

1; $+2x$; $-2x^2$; $+8x^3$; $-14x^4$; $+32x^5$; $-62x^6$; .....

§. 482.

Die weitläuftige Rechnung zum Auffinden des allgemeinen Koeffizienten einer Reihe der dritten und der höhern Ordnungen, läßt sich dadurch vermeiden, wenn man im Stande ist, den

Nenner des Urbruchs in lauter zwei- oder dreitheilige Faktoren zu zerfällen, weil alsdann die Bestimmung des allgemeinen Gliedes für den gegebenen Urbruch auf die Reihen der ersten und zweiten Ordnung zurückgeführt wird, wenn man den Urbruch in seine Partialbrüche zerlegt, und für jeden derselben den entsprechenden allgemeinen Koeffizienten sucht, da dann die Summe dieser Koeffizienten der gesuchte allgemeine Koeffizient des gegebenen Urbruchs ist (§. 360.).

Nachstehende Beispiele können zur Erläuterung dienen.

1. **Beispiel.** Von dem Urbruch $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)(1+3x+2x^2)}$ das allgemeine Glied zu finden, zerlege man solchen in seine Partialbrüche nach §. 231., so erhält man

$$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)(1+3x+2x^2)} = \frac{x}{1+3x+x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

Dem erzeugenden Bruch

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{entspricht } 1 \quad (\S.\ 450.),$$

$$\frac{x}{1+3x+2x^2} \quad \text{entspricht } \mp(2^n-1) \quad (\S.\ 469.)$$

als allgemeiner Koeffizient, daher findet man den allgemeinen Koeffizienten des gegebenen Urbruchs oder

$$A_n = 1 \mp (2^n - 1),$$

also das allgemeine Glied oder

$$y_n = [1 \mp (2^n - 1)]\, x^n,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Die entsprechende Reihe ist

$$1;\ +2x;\ -2x^2;\ +8x^3;\ -14x^4;\ +32x^5;\ \ldots\ldots$$

eben so wie §. 481., nur daß hier das allgemeine Glied einfacher dargestellt und die Rechnung leichter ausgeführt wird.

2. **Beispiel.** Für den Urbruch $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)(1+2x)(1+x)}$ den allgemeinen Koeffizienten zu finden, werde derselbe nach §. 235. in seine Partialbrüche zerlegt, so wird

$$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)(1+2x)(1+x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+x}.$$

Dem erzeugenden Bruch

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{entspricht } 1,$$

$$\frac{-1}{1+2x} \quad \text{entspricht } -(-2)^n = \mp 2^n,$$

$$\frac{1}{1+x} \quad \text{entspricht } (-1)^n = \pm 1$$

als allgemeiner Koeffizient, daher erhält man für den gegebenen Urbruch

$$A_n = 1 \mp (2^n - 1)$$

wie im ersten Beispiel.

3. **Beispiel.** Den Urbruch $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$ in seine Partialbrüche zerlegt, giebt (§. 231.)

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x}.$$

Dem

Dem erzeugenden Bruch

$$\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{(1-x)^2} \text{ entspricht } \frac{2n+3}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{1+x} \text{ entspricht } \tfrac{1}{4}(-1)^n = \pm\tfrac{1}{4}$$

als allgemeiner Koeffizient, daher findet man den allgemeinen Koeffizienten des vorstehenden Urbruchs oder

$$A_n = \tfrac{1}{4}(2n+3\pm 1),$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt. Die entsprechende Reihe ist

$$1;\ x;\ 2x^2;\ 2x^3;\ 3x^4;\ 3x^5;\ 4x^6;\ 4x^7;\ 5x^8;\ 5x^9;\ \ldots$$

Der vorstehende Koeffizient ist viel einfacher ausgedruckt, als der, für eben diesen Urbruch §. 480. gefundene

4. **Beispiel.** Von dem Urbruch $S = \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)(1+x^2)}$ den allgemeinen Koeffizienten zu finden, werde derselbe in seine Partialbrüche zerlegt. Dies giebt (§. 241. 4. Beisp.)

$$S = \frac{9-3x}{8(1-x)^2} + \frac{1}{8(1+x)} - \frac{1-x}{4(1+x^2)}.$$

Dem erzeugenden Bruch

$$\frac{\frac{9}{8}-\frac{3}{8}x}{(1-x)^2} \text{ entspricht } \tfrac{1}{8}(6n+9) \text{ §. 462.},$$

$$\frac{\frac{1}{8}}{1+x} \text{ entspricht } \pm\tfrac{1}{8} \text{ §. 450.},$$

$$-\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x}{1+x^2} \text{ entspricht } \left\{\begin{matrix} -\tfrac{1}{4}(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ für ein gerades } n \\ +\tfrac{1}{4}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ für ein ungerades } n \end{matrix}\right\} \text{ §. 460.}$$

als allgemeiner Koeffizient, daher wird

$$A_n = \frac{6n+9\pm 1}{8} + \left\{\begin{matrix} -\tfrac{1}{4}(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ für ein gerades } n \\ +\tfrac{1}{4}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ für ein ungerades } n \end{matrix}\right.$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt.

Die entsprechende Reihe ist

$$1;\ 2x;\ 3x^2;\ 3x^3;\ 4x^4;\ 5x^5;\ 6x^6;\ 6x^7;\ 7x^8;\ \ldots$$

Die Verschiedenheit des hier gefundenen allgemeinen Gliedes, von dem, in **Eulers** Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 1. Buch, 13. Kap. §. 233., entsteht dadurch, weil dort der Partialbruch $\frac{1+x}{4(1+x^2)}$ statt $\frac{1-x}{4(1+x^2)}$ gefunden worden.

§. 483.

Für Urbrüche jeder Ordnung, deren Nenner die Potenz einer zweitheiligen Größe ist, den allgemeinen Koeffizienten der entsprechenden Reihe zu finden, setze man, daß der Urbruch der $r$ten Ordnung

$$\frac{a'+b'x+c'x^2+\ldots+q'x^{r-1}}{(1-ax)^r} = S \text{ gegeben sey.}$$

Setzt man ferner $S = A + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$ und multiplizirt diese Reihe mit $(1 - ax)^r$ nach der Entwickelung §. 25., so erhält man

$$a' + b'x + \dots + q'x^{r-1}$$
$$= +A + \left.\begin{array}{r} A_1 \\ -raA \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{r} A_2 \\ -raA_1 \\ +r_2a^2A \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} A_3 \\ -raA_2 \\ +r_2a^2A_1 \\ -r_3a^3A \end{array}\right| x^3 + \dots + \left.\begin{array}{l} A_n \\ -raA_{n-1} \\ +r_2a^2A_{n-2} \\ \dots\dots\dots \\ \mp r_{r-1}a^{r-1}A_{n-r+1} \\ \pm r_r a^r A_{n-r} \end{array}\right| x^n + \dots$$

und man findet hieraus, nach der Lehre von den unbestimmten Koeffizienten §. 52.

$$\begin{array}{l} A = a' \\ A_1 = raA + b' \\ A_2 = raA_1 - r_2a^2A + c' \\ A_3 = raA_2 - r_2a^2A_1 + r_3a^3A + d' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{r-1} = raA_{r-2} - r_2a^2A_{r-5} + \dots\dots \pm r_{r-2}a^{r-2}A_1 \mp r_{r-1}a^{r-1}A + q' \\ A_r = raA_{r-1} - r_2a^2A_{r-2} + \dots\dots \pm r_{r-2}a^{r-2}A_2 \mp r_{r-1}a^{r-1}A_1 \pm r_r a^r A \\ A_{r+1} = raA_r - r_2a^2A_{r-1} + \dots \pm r_{r-2}a^{r-2}A_3 \mp r_{r-1}a^{r-1}A_2 \pm r_r a^r A_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n = raA_{n-1} - r_2a^2A_{n-2} + \dots \pm r_{r-2}a^{r-2}A_{n-r+2} \mp r_{r-1}a^{r-1}A_{n-r+1} \pm r_r a^r A_{n-r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

oder, weil r eine positive ganze Zahl ist, so findet man die allgemeine Koeffizientengleichung

$$A_n = raA_{n-1} - r_2a^2A_{n-2} + \dots \pm r_2a^{r-2}A_{n-r+2} \mp ra^{r-1}A_{n-r+1} \pm a^rA_{n-r}.$$

Außer dieser allgemeinen Koeffizientengleichung müssen daher auch die r ersten Gleichungen gegeben seyn, um sämmtliche Koeffizienten dieser wiederkehrenden Reihe der $r$ten Ordnung zu finden.

Soll ferner der allgemeine Koeffizient A_n unabhängig von den vorhergehenden, und allein durch die Koeffizienten des Urbruchs S bestimmt werden, so entwickle man nach §. 29.

$$\frac{1}{(1-ax)^r} = 1 + r_1 ax + (r+1)_2 a^2x^2 + (r+2)_3 a^3x^3 + \dots\dots$$

multiplizire diese Reihe mit dem Zähler $a' + b'x + \dots + q'x^{r-1}$, so erhält man

$$A + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots$$
$$= a' + \left.\begin{array}{l} ra'a \\ +b' \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{lll} (r+1)_2 & a'a^2 \\ +\ r & b'a \\ + & c' \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{lll} (r+2)_3 & a'a^3 \\ +(r+1)_2 & b'a^2 \\ +\ r & c'a \\ + & d' \end{array}\right| x^3 + \dots + \left.\begin{array}{ll} (r+n-1)_n & a'a^n \\ +(r+n-2)_{n-1} & b'a^{n-1} \\ +(r+n-3)_{n-2} & c'a^{n-2} \\ \dots\dots\dots & \\ +(n+1)_{n-r+2} & p'a^{n-r+2} \\ +\ n_{n-r+1} & q'a^{n-r+1} \end{array}\right| x^n + \dots$$

also nach §. 52.

$A = a'$
$A_1 = r a' a + b'$
$A_2 = (r+1)_2 a' a^2 + r b' a + c'$
$A_3 = (r+2)_3 a' a^3 + (r+1)_2 b' a^2 + r c' a + d'$
$A_4 = (r+3)_4 a' a^4 + (r+2)_3 b' a^3 + (r+1)_2 c' a^2 + r d' a + e'$
. . . .
$A_n = (r+n-1)_n a' a^n + (r+n-2)_{n-1} b' a^{n-1} + (r+n-3)_{n-2} c' a^{n-2} + \ldots \ldots + (n+1)_{n-r+2} p' a^{n-r+2} + n_{n-r+1} q' a^{n-r+1}$,

oder, wegen §. 38. (LIV),

(II) $A_n = (r+n-1)_{r-1} a' a^n + (r+n-2)_{r-1} b' a^{n-1} + (r+n-3)_{r-1} c' a^{n-2} + \ldots \ldots + (n+1)_{r-1} p' a^{n-r+2} + n_{r-1} q' a^{n-r+1}$.

Hierin nach einander 1, 2, 3, ... statt r gesetzt, giebt die allgemeinen Koeffizienten für Reihen der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung. Bezeichnet nun y_n das allgemeine Glied, so wird $y_n = A_n x^n$ daher §. 355. $S = {}^1\!\!\int A_n x^n$, und man findet:

$$\frac{a'}{1-ax} = a' \, {}^1\!\!\int a^n x^n$$
$$\frac{a'+b'x}{(1-ax)^2} = {}^1\!\!\int [(n+1) a' a + n b'] a^{n-1} x^n$$
$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{(1-ax)^3} = {}^1\!\!\int [(n+2)_2 a' a^2 + (n+1)_2 b' a + n_2 c'] a^{n-2} x^n$$
$$\frac{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}{(1-ax)^4} = {}^1\!\!\int [(n+3)_3 a' a^3 + (n+2)_3 b' a^2 + (n+1)_3 c' a + n_3 d'] a^{n-3} x^n.$$

u. s. w.

Für $a' = 1$ und $b' = c' = d' = \ldots = 0$ wird

$$\frac{1}{1-ax} = {}^1\!\!\int a^n x^n$$
$$\frac{1}{(1-ax)^2} = {}^1\!\!\int (n+1) a^n x^n.$$
$$\frac{1}{(1-ax)^3} = {}^1\!\!\int (n+2)_2 a^n x^n$$
$$\frac{1}{(1-ax)^4} = {}^1\!\!\int (n+3)_3 a^n x^n$$

und allgemein

$$\frac{1}{(1-ax)^r} = {}^1\!\!\int (n+r-1)_{r-1} a^n x^n.$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man ferner

$$\frac{1}{1-ax} = {}^1\!\!\int a^n x^n$$
$$\frac{x}{(1-ax)^2} = {}^1\!\!\int n a^{n-1} x^n \text{ oder } \frac{ax}{(1-ax)^2} = {}^1\!\!\int n a^n x^n.$$
$$\frac{x^2}{(1-ax)^3} = {}^1\!\!\int n_2 a^{n-2} x^n \text{ oder } \frac{a^2 x^2}{(1-ax)^3} = {}^1\!\!\int n_2 a^n x^n$$
$$\frac{x^3}{(1-ax)^4} = {}^1\!\!\int n_3 a^{n-3} x^n \text{ oder } \frac{a^3 x^3}{(1-ax)^4} = {}^1\!\!\int n_3 a^n x^n$$

und überhaupt

$$\frac{a^r x^r}{(1-ax)^{r+1}} = {}^t\!\int n_r a^n x^n.$$

§. 484.

Aufgabe. Von dem erzeugenden Bruch $S = \frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}$ den entsprechenden allgemeinen Koeffizienten zu finden.

Auflösung. Nach §. 239. ist

$$S = \frac{1}{6(1-x)^3} + \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{17}{72(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)} + \frac{2+x}{9(1+x+x^2)},$$

und dem erzeugenden Bruch

$\frac{\frac{1}{6}}{(1-x)^3}$ entspricht $\frac{1}{6}(n+2)_2$; §. 483.

$\frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2}$ entspricht $\frac{1}{4}(n+1)$; §. 483.

$\frac{\frac{17}{72}}{1-x}$ entspricht $\frac{17}{72}$; §. 483.

$\frac{\frac{1}{8}}{1+x}$ entspricht $\frac{1}{8}(-1)^n = \pm\frac{1}{8}$; §. 483.

$\frac{2+x}{9(1+x+x^2)}$ entspricht $\frac{\pm 2}{9.2^n}(1 - n_2 3 + n_4 3^2 - n_6 3^3 + \ldots)$ §. 467.

als allgemeiner Koeffizient, daher findet man den allgemeinen Koeffizienten des gegebenen Urbruchs

$$A_n = \frac{6n^2 + 36n + 47 \pm 9}{72} \pm \frac{2}{9.2^n}(1 - n_2 3 + n_4 3^2 - n_6 3^3 + \ldots\ldots)$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Die entsprechende Reihe ist:

$1;\ x;\ 2x^2;\ 3x^3;\ 4x^4;\ 5x^5;\ 7x^6;\ 8x^7;\ 10x^8;\ 12x^9;\ \ldots\ldots$

§. 485.

Aufgabe. Der Nenner des Urbruchs einer Reihe bestehe aus lauter zweitheiligen Faktoren, man soll den allgemeinen Koeffizienten derselben finden.

Auflösung. Der gegebene Urbruch gehöre zu einer Reihe der $r$ten Ordnung und enthalte r verschiedene zweitheilige Faktoren, so ist die allgemeinste Gestalt desselben

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + \ldots + p'x^{r-2} + q'x^{r-1}}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots\ldots(1-px)(1-qx)} = \frac{Fx}{\varphi x}.$$

Man setze

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{G_1}{1-ax} + \frac{G_2}{1-bx} + \ldots + \frac{G_r}{1-qx} = A + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

wo A_n den gesuchten allgemeinen Koeffizienten bezeichnet, so findet man, wenn die Brüche $\frac{1}{1-ax}$; $\frac{1}{1-bx}$; .... in Reihen aufgelöst werden,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{G_1}{1-ax} = G_1[1+ax+a^2x^2+\ldots+a^nx^n+\ldots] \\ +\frac{G_2}{1-bx} = G_2[1+bx+b^2x^2+\ldots+b^nx^n+\ldots] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{G_r}{1-qx} = G_r[1+qx+q^2x^2+\ldots+q^nx^n+\ldots]\end{array}\right\} = A+A_1x+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

Vergleicht man beide Ausdrücke nach §. 52., so erhält man den allgemeinen Koeffizienten

$$A_n = G_1a^n + G_2b^n + G_3c^n + \ldots + G_rq^n,$$

und man findet nach §. 236. (*II*)

$$G_1 = \frac{a'a^{r-1}+b'a^{r-2}+c'a^{r-3}+\ldots+p'a+q'}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-p)(a-q)}$$

$$G_2 = \frac{a'b^{r-1}+b'b^{r-2}+c'b^{r-3}+\ldots+p'b+q'}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-p)(b-q)}$$

$$G_3 = \frac{a'c^{r-1}+b'c^{r-2}+c'c^{r-3}+\ldots+p'c+q'}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-p)(c-q)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_r = \frac{a'q^{r-1}+b'q^{r-2}+c'q^{r-3}+\ldots+p'q+q'}{(q-a)(q-b)(q-c)\ldots(q-o)(q-p)}.$$

Hienach erhält man für Reihen der ersten Ordnung:

$$\frac{a'}{1-ax}; \qquad A_n = a'a^n.$$

Für Reihen der zweiten Ordnung:

$$\frac{a'+b'x}{(1-ax)(1-bx)}; \qquad A_n = G_1a^n + G_2b^n;$$

$$G_1 = \frac{a'a+b'}{a-b}; \qquad G_2 = \frac{a'b+b'}{b-a}.$$

Für Reihen der dritten Ordnung:

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)};$$

$$A_n = G_1a^n + G_2b^n + G_3c^n;$$

$$G_1 = \frac{a'a^2+b'a+c'}{(a-b)(a-c)};$$

$$G_2 = \frac{a'b^2+b'b+c'}{(b-a)(b-c)};$$

$$G_3 = \frac{a'c^2+b'c+c'}{(c-a)(c-b)}.$$

Für Reihen der vierten Ordnung:

$$\frac{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)};$$

$$A_n = G_1a^n + G_2b^n + G_3c^n + G_4d^n;$$

$$G_1 = \frac{a'a^3 + b'a^2 + c'a + d'}{(a-b)(a-c)(a-d)};$$
$$G_2 = \frac{a'b^3 + b'b^2 + c'b + d'}{(b-a)(b-c)(b-d)};$$
$$G_3 = \frac{a'c^3 + b'c^2 + c'c + d'}{(c-a)(c-b)(c-d)};$$
$$G_4 = \frac{a'd^3 + b'd^2 + c'd + d'}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$
u. s. w.

§. 486.

Die vorstehende Auflösung ist nur so lange anwendbar, als die Größen $a, b, c, \ldots$ von einander verschieden sind. Wären zwei oder mehrere derselben einander gleich, dann kann hienach A_n nicht gefunden werden. So ist z. B. für $a = b$; $G_1 = \infty$. In dergleichen Fällen muß der gegebene Urbruch in zwei andere zerlegt werden, wovon der erste Partialbruch, die Potenz der gleichen Faktoren, und der zweite Partialbruch, die übrigen Faktoren zum Nenner hat. Für den ersten dieser Brüche findet man den allgemeinen Koeffizienten nach §. 483., und für den zweiten nach §. 485., und wenn man alsdann beide zusammen addirt, so erhält man den allgemeinen Koeffizienten des Urbruches.

Wäre z. B. der Urbruch $\frac{a' + b'x + c'x + \ldots}{(1-ax)^3(1-bx)\ldots(1-qx)}$ gegeben, so zerlege man denselben in die Partialbrüche $\frac{N}{(1-ax)^3}$ und $\frac{P}{(1-bx)\ldots(1-qx)}$, wo N und P nach den Lehren des achten Kapitels gefunden werden. Ist nun A'_n der allgemeine Koeffizient für den ersten, und A''_n für den zweiten Partialbruch, so erhält man den allgemeinen Koeffizienten des Urbruches, oder $A_n = A'_n + A''_n$.

§. 487.

Es läßt sich nun auch für jeden andern Urbruch von der Form

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + \ldots + q'x^{r-1}}{1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + qx^r}$$

der allgemeine Koeffizient der entsprechenden Reihe finden, wenn man den Nenner desselben in zwei- oder dreitheilige Faktoren zerfällen kann. Diese Faktoren lassen sich finden, wenn man den Nenner $= 0$ setzt, und von der Gleichung

$$x^r + \frac{p}{q}x^{r-1} + \ldots + \frac{a}{q}x + \frac{1}{q} = 0$$

die Wurzeln sucht. Wären diese $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ so sind $(x-\alpha)$; $(x-\beta)$; $(x-\gamma)\ldots$ Faktoren des Nenners. Enthalten einige dieser Faktoren unmögliche Größen, so müssen solche paarweise vorhanden seyn, und man kann, zur Vermeidung der Rechnung mit denselben, den entsprechenden dreitheiligen Faktor von der Form $x^2 + nx + m$ einführen, weil für diesen Faktor, als Nenner eines Urbruches, der allgemeine Koeffizient nach §. 458. gefunden werden kann, wenn gleich die Wurzeln der Gleichung $x^2 + nx + m = 0$ unmögliche Größen enthalten.

Aber auch dann, wenn man die unmöglichen Wurzeln in Rechnung bringen will, kann man doch den Ausdruck für das allgemeine Glied in möglichen Größen darstellen. Wäre z. B. der Urbruch $\frac{a' + b'x}{1 + ax + bx^2}$ gegeben, und man fände durch Auflösung der Gleichung $x^2 + \frac{a}{b} x + \frac{1}{b} = 0$ die beiden unmöglichen Wurzeln α und β, welche man durch

$\alpha = g + h\sqrt{-1}$ und

$\beta = g - h\sqrt{-1}$ ausdrucken kann, so wird §. 461. (*II*) der allgemeine Koeffizient $A_n = \frac{a'\alpha + b'}{\alpha - \beta}\alpha^n - \frac{a'\beta + b'}{\alpha - \beta}\beta^n$, also durch unmögliche Größen ausgedruckt. Man kann aber auch den Werth für A_n auf folgende Weise darstellen:

$$A_n = \frac{a'(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\alpha - \beta} + \frac{b'(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}.$$

Nun ist $\alpha - \beta = 2h\sqrt{-1}$

$$\alpha^n - \beta^n = (g + h\sqrt{-1})^n - (g - h\sqrt{-1})^n \text{ und}$$
$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = (g + h\sqrt{-1})^{n+1} - (g - h\sqrt{-1})^{n+1};$$

daher erhält man nach (*II*) §. 45., wenn die Glieder, welche dort in den Klammern enthalten sind, durch N und N' bezeichnet werden,

$$\alpha^n - \beta^n = 2g^n N\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = 2g^{n+1} N'\sqrt{-1}, \text{ folglich}$$
$$A_n = \frac{2a'g^{n+1}N'\sqrt{-1}}{2h\sqrt{-1}} + \frac{2b'g^n N\sqrt{-1}}{2h\sqrt{-1}} \text{ oder}$$
$$A_n = \frac{a'g^{n+1}N' + b'g^n N}{h},$$

wodurch das allgemeine Glied ohne unmögliche Größen ausgedruckt ist. Auch wird hier

$$N = n\frac{h}{g} - n_3\frac{h^3}{g^3} + n_5\frac{h^5}{g^5} - n_7\frac{h^7}{g^7} + \ldots\ldots \text{ und}$$
$$N' = (n+1)\frac{h}{g} - (n+1)_3\frac{h^3}{g^3} + (n+1)_5\frac{h^5}{g^5} - \ldots\ldots$$

§. 488.

Aufgabe. Die ganze Summe, oder den Urbruch, einer wiederkehrenden Reihe der *r*ten Ordnung zu finden, wenn das allgemeine Glied nebst dem Beziehungsmaaße derselben bekannt ist.

Auflösung. Von der gegebenen Reihe

$$S_r = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

sey $a_1; a_2; a_3; \ldots\ldots a_r$ das Beziehungsmaaß, so erhält man nach §. 444., wenn in den dortigen Gleichungen r statt n gesetzt, und nach einander mit $x^r; x^{r+1}; x^{r+2}; \ldots.$ multiplizirt wird,

$$A_r x^r = a_1 x . A_{r-1} x^{r-1} + a_2 x^2 . A_{r-2} x^{r-2} + \ldots\ldots + a_r x^r . A$$
$$A_{r+1} x^{r+1} = a_1 x . A_r x^r + a_2 x^2 . A_{r-1} x^{r-1} + \ldots\ldots + a_r x^r . A_1 x$$
$$A_{r+2} x^{r+2} = a_1 x . A_{r+1} x^{r+1} + a_2 x^2 . A_r x^r + \ldots\ldots + a_r x^r . A_2 x^2$$
$$A_{r+3} x^{r+3} = a_1 x . A_{r+2} x^{r+2} + a_2 x^2 . A_{r+1} x^{r+1} + \ldots\ldots + a_r x^r . A_3 x^3$$

. . . .

Diese Gleichungen ohne Ende fortgesetzt, und die übereinander stehenden Glieder derselben zusammen addirt, giebt

$$S_r - A - A_1 x - A_2 x^2 - \ldots - A_{r-1} x^{r-1} = \left\{ \begin{array}{l} + a_1 x (S_r - A - A_1 x - A_2 x^2 - \ldots - A_{r-2} x^{r-2}) \\ + a_2 x^2 (S_r - A - A_1 x - \ldots - A_{r-3} x^{r-3}) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + a_{r-2} x^{r-2} (S_r - A - A_1 x) \\ + a_{r-1} x^{r-1} (S_r - A) \\ + a_r x^r S_r \end{array} \right\}$$

Hieraus S_r entwickelt und die Glieder nach den Potenzen von x geordnet, giebt den Urbruch

$$S_r = \frac{A + (A_1 - a_1 A) x + (A_2 - a_1 A_1 - a_2 A) x^2 + \ldots + (A_{r-1} - a_1 A_{r-2} - \ldots - a_{r-1} A) x^{r-1}}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \ldots - a_r x^r}$$

Für eine Reihe der ersten Ordnung wird $r = 1$, also

$$S_1 = \frac{A}{1 - a_1 x}.$$

Für eine Reihe der zweiten Ordnung wird $r = 2$, also

$$S_2 = \frac{A + (A_1 - a_1 A) x}{1 - a_1 x - a_2 x^2} \text{ wie §. 456.}$$

Für eine Reihe der dritten Ordnung wird

$$S_3 = \frac{A + (A_1 - a_1 A) x + (A_2 - a_1 A_1 - a_2 A) x^2}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3}$$

u. s. w.

§. 489.

Die allgemeinste Gestalt, unter welcher das allgemeine Glied einer jeden wiederkehrenden Reihe vorgestellt werden kann, ist

$$\begin{aligned} y_n = & (A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \ldots) \alpha^n x^n \\ & + (A' + B'n + C'n^2 + D'n^3 + \ldots) \beta^n x^n \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Wäre nun das Beziehungsmaaß einer wiederkehrenden Reihe unbekannt, und man soll allein aus dem gegebenen allgemeinen Gliede den entsprechenden Urbruch S finden, so kommt es darauf an, ${}^1\!\int y_n = S$ zu entwickeln. Nun ist (§. 360.)

$${}^1\!\int y_n = A \,.\, {}^1\!\int \alpha^n x^n + B \,.\, {}^1\!\int n \alpha^n x^n + C \,.\, {}^1\!\int n^2 \alpha^n x^n + \ldots$$

Wenn daher die Werthe von ${}^1\!\int \alpha^n x^n$; ${}^1\!\int n \alpha^n x^n$; ${}^1\!\int n^2 \alpha^n x^n$ und überhaupt ${}^1\!\int n^r \alpha^n x^n$ bekannt sind, so kann daraus der Urbruch S gefunden werden. Mittelst der Sätze §. 483. könnte man zwar den Werth von ${}^1\!\int n^r \alpha^n x^n$ erhalten; die Rechnung wird aber sehr weitläuftig, weshalb auf die Entwickelung in der Lehre von den Differenz-Reihen §. 580. verwiesen wird.

Die folgenden Beispiele enthalten nur solche Aufgaben, welche mittelst der Entwickelungen §. 483. leicht aufgelöst werden können.

1. **Beispiel.** Für das allgemeine Glied $y_n = (a + nb) x^n$ den Urbruch S zu finden, setze

setze man $S = {}^t\!\!\int y_n = a\,{}^t\!\!\int x^n + b\,{}^t\!\!\int n x^n$. Nun ist §. 483. ${}^t\!\!\int x^n = \frac{1}{1-x}$ und ${}^t\!\!\int n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, also $S = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{1-x^2} = \frac{a-(a-b)x}{(1-x)^2}$.

Für $x = 1$ wird

$$S = {}^t\!\!\int(a + nb) = \frac{b}{0} = \infty.$$

2. **Beispiel.** Für das allgemeine Glied $y_n = \pm \frac{2+29n}{3^{n+2}} x^n$ den zugehörigen Urbruch S zu finden, setze man

$$y_n = \frac{2+29n}{(-1)^n 3^{n+2}} x^n = \frac{2+29n}{9\,(-3)^n} x^n, \text{ also}$$

$$S = {}^t\!\!\int y_n = \frac{2}{9} {}^t\!\!\int \frac{x^n}{(-3)^n} + \frac{29}{9} {}^t\!\!\int \frac{n x^n}{(-3)^n},$$

daher wird nach §. 483., wenn daselbst $a^n = \frac{1}{(-3)^n}$ gesetzt wird,

$${}^t\!\!\int \frac{x^n}{(-3)^n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{-3}} = \frac{3}{3+x} \text{ und}$$

$${}^t\!\!\int \frac{n x^n}{(-3)^n} = \frac{\frac{x}{-3}}{\left(1 - \frac{x}{-3}\right)^2} = \frac{-3x}{(3+x)^2}, \text{ also}$$

$$S = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{3+x} - \frac{29}{9} \cdot \frac{3x}{(3+x)^2} = \frac{2-9x}{(3+x)^2}.$$

§. 490.

Aufgabe. Das Summenglied einer wiederkehrenden Reihe der $r$ten Ordnung, aus dem Beziehungsmaaße und dem allgemeinen Gliede dieser Reihe zu finden.

Auflösung. Mit Beibehaltung der §. 488. angenommenen Bezeichnung und wenn S_r die Summe der $n+1$ ersten Glieder der gegebenen Reihe oder das Summenglied bezeichnet, findet man auf eine ähnliche Weise wie §. 488.

$$\begin{array}{l} A_r\, x^r = a_1 x \,.\, A_{r-1} x^{r-1} + a_2 x^2 \,.\, A_{r-2} x^{r-2} + \ldots\ldots + a_r x^r \,.\, A \\ A_{r+1} x^{r+1} = a_1 x \,.\, A_r\, x^r + a_2 x^2 \,.\, A_{r-1} x^{r-1} + \ldots\ldots + a_r x^r \,.\, A_1 x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n\, x^n = a_1 x \,.\, A_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 \,.\, A_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_r x^r \,.\, A_{n-r} x^{n-r} \end{array}$$

Die übereinander stehenden Glieder zusammen addirt, geben:

$$S_r - A - A_1 x - A_2 x^2 - \ldots\ldots - A_{r-1} x^{r-1}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} + a_1 x\ (S_r - A - A_1 x - A_2 x^2 - \ldots\ldots - A_{r-2} x^{r-2} - A_n x^n) \\ + a_2 x^2\ (S_r - A - A_1 x - \ldots\ldots - A_{r-3} x^{r-3} - A_{n-1} x^{n-1} - A_n x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{r-1} x^{r-1} (S_r - A - A_{n-r} x^{n-r} - A_{n-r+1} x^{n-r+1} - \ldots\ldots - A_n x^n) \\ + a_r x^r\ (S_r - A_{n-r+1} x^{n-r+1} - A_{n-r+2} x^{n-r+2} - \ldots\ldots - A_n x^n) \end{array}\right\}$$

Hieraus S'_r entwickelt und die Glieder nach den Potenzen von x geordnet, giebt das Summenglied für die $n+1$ ersten Glieder einer Reihe der $r$ten Ordnung, oder

$$S'_r = \frac{+\left\{\begin{matrix} A \\ (A_1 - a_1 A)x \\ (A_2 - a_1 A_1 - a_2 A)x^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (A_{r-1} - a_1 A_{r-2} - \ldots - a_{r-1} A)x^{r-1} \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} (a_1 A_n + a_2 A_{n-1} + \ldots + a_r A_{n-r+1})x^{n+1} \\ (a_2 A_n + a_3 A_{n-1} + \ldots + a_r A_{n-r+2})x^{n+2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (a_{r-1} A_n + a_r A_{n-1})x^{n+r-1} \\ (a_r A_n)x^{n+r} \end{matrix}\right\}}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - \ldots\ldots - a_r x^r}$$

Für eine Reihe der ersten Ordnung wird $r = 1$, also

$$S'_1 = \frac{A - a_1 A_n x^{n+1}}{1 - a_1 x}.$$

Für $r = 2$ wird

$$S'_2 = \frac{A + (A_1 - a_1 A)x - (a_1 A_n + a_2 A_{n-1})x^{n+1} - a_2 A_n x^{n+2}}{1 - a_1 x - a_2 x^2}$$

u. s. w.

§. 491.

Es sey $S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ eine Reihe der dritten Ordnung, so ist der allgemeinste Ausdruck für den erzeugenden Bruch derselben

$$S = \frac{a' + b'x + c'x^2}{1 - ax - bx^2 - cx^3}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1 - ax - bx^2 - cx^3}{a' + b'x + c'x^2}.$$

Verrichtet man die angezeigte Division, und bestimmt zwei Glieder im Quotienten, so sind solche von der Form $p + qx$, und der Rest ist von der Form $\alpha x^2 + \beta x^3 = (\alpha + \beta x)x^2$. Hieraus folgt, daß wenn man die Einheit durch die Reihe $S = A + Bx + Cx^2 + \ldots$ dividirt und zwei Glieder des Quotienten von der Form $p + qx$ bestimmt, so muß der Rest durch x^2 theilbar seyn. Man kann daher diesen Rest durch $x^2 S'$ bezeichnen, wo S' eine Reihe von der Form $A' + B'x + C'x^2 + \ldots$ seyn wird. Man hat also

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S} = p + qx + \frac{\alpha x^2 + \beta x^3}{a' + b'x + c'x^2}, \text{ daher}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{\alpha + \beta x}{a' + b'x + c'x^2} \text{ oder auch } \frac{S}{S'} = \frac{a' + b'x + c'x^2}{\alpha + \beta x}.$$

Werden wieder zwei Glieder im Quotienten durch die angezeigte Division bestimmt, so sind solche von der Form $p' + q'x$ und der Rest $\alpha' x^2$, also

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{\alpha' x^2}{\alpha + \beta x},$$

daher muß auch, wenn die Reihe $S = A + Bx + \ldots$ durch $S' = A' + B'x + \ldots$ dividirt wird und zwei Glieder $p' + q'x$ im Quotienten bestimmt werden, der Rest durch x^2 theilbar seyn, weshalb man solchen durch $x^2 S''$ vorstellen kann, wo S'' eine Reihe von der Form $A'' + B''x + C''x^2 + \ldots$ bildet. Man hat daher

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{x^2 S''}{S'} = p' + q'x + \frac{\alpha' x^2}{\alpha + \beta x}, \text{ oder}$$
$$\frac{S''}{S'} = \frac{\alpha'}{\alpha + \beta x}, \text{ daher } \frac{S'}{S''} = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha'} = p'' + q''x.$$

Hieraus folgt, daß die Division ohne Rest aufgehen muß, wenn man die Reihe S' durch S'' dividirt, und die Reihe $S = A + Bx + \ldots\ldots$ von der dritten Ordnung ist. Die Form des Quotienten ist $p'' + q''x$, wo aber auch ein Glied $= 0$ seyn kann.

Um daher zu untersuchen, **ob eine gegebene Reihe S von der dritten Ordnung ist**, suche man durch wirkliche Division der Reihe

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S}. \text{ Ferner}$$
$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{x^2 S''}{S'}; \text{ erhält man dann}$$
$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x \text{ ohne Rest,}$$

so ist die Reihe von der dritten Ordnung.

Auf eben die Art erhält man für Reihen der **vierten** Ordnung

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{x^2 S'}{S}$$
$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{x^2 S''}{S'}$$
$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x + \frac{x^2 S'''}{S''}$$
$$\frac{S''}{S'''} = p''' + q'''x \text{ ohne Rest,}$$

u. s. w.

Man setze die Quotienten

$$p + qx = Q \quad \text{also} \quad \frac{1}{S} = Q + \frac{x^2 S'}{S}$$
$$p' + q'x = Q' \qquad \frac{S}{S'} = Q' + \frac{x^2 S''}{S'}$$
$$p'' + q''x = Q'' \qquad \frac{S'}{S''} = Q'' + \frac{x^2 S'''}{S''}$$

u. s. w. u. s. w.

so erhält man, wenn die Quotienten $Q, Q', Q'', \ldots\ldots$ bekannt sind, die ganze Summen oder die erzeugenden Brüche von den Reihen aller Ordnungen durch die Entwickelung aus den vorstehenden Gleichungen. Es ist alsdann:

für Reihen der ersten Ordnung:

$$S = \frac{1}{Q} \quad (\text{§. } 454.);$$

für Reihen der zweiten Ordnung:

$$S = \frac{Q'}{QQ' + x^2} \quad (\text{§. } 476.);$$

für Reihen der dritten Ordnung:

$$S = \frac{Q'Q'' + x^2}{Q(Q'Q'' + x^2) + Q''x^2};$$

für Reihen der vierten Ordnung:

$$S = \frac{Q(Q''Q''' + x^2) + Q'''x^2}{(QQ' + x^2)(Q''Q''' + x^2) + QQ'''x^2};$$

u. s. w.

Wenn daher irgend eine Reihe

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots .$$

gegeben wird, und man will untersuchen, ob solche eine wiederkehrende Reihe und welches ihr erzeugender Bruch ist, so bestimme man:

$$\frac{1}{S} = p + q\,x + \frac{x^2 S'}{S} = Q + \frac{x^2 S'}{S}$$

$$\frac{S}{S'} = p' + q'\,x + \frac{x^2 S''}{S'} = Q' + \frac{x^2 S''}{S'}$$

$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x + \frac{x^2 S'''}{S''} = Q'' + \frac{x^2 S'''}{S''}$$

u. s. w.

geht die Division zuletzt auf, so gehören die gegebenenen Glieder zu einer wiederkehrenden Reihe, und die höchste Potenz von x im Nenner des erzeugenden Bruches, bestimmt die Ordnung der Reihe. Aus den Werthen von Q, Q', Q'', ... findet man alsdann den erzeugenden Bruch S.

Wäre eine Reihe

$$S = A + B + C + D + \ldots .$$

gegeben, so kann man derselben durch Hinzusetzung der Faktoren x, x^2, x^3, ... die obige Gestalt geben, und am Ende der Rechnung $x = 1$ setzen.

§. 492.

Zusatz. Aus den gefundenen Ausdrücken für $\frac{1}{S}$, $\frac{S}{S'}$, $\frac{S'}{S''}$, ... erhält man

$$S = \frac{1}{Q + \frac{x^2 S'}{S}};\quad \frac{S'}{S} = \frac{1}{Q' + \frac{x^2 S''}{S'}};\quad \frac{S''}{S'} = \frac{1}{Q'' + \frac{x^2 S'''}{S''}};\ \ldots\ldots$$

und wenn man jeden folgenden Werth in den vorhergehenden Ausdruck setzt, so findet man ganz allgemein die ganze Summe oder den erzeugenden Bruch von einer wiederkehrenden Reihe der $m$ten Ordnung durch folgenden Kettenbruch ausgedrückt

$$S = \frac{1}{Q} + \frac{x^2}{Q'} + \frac{x^2}{Q''} + \frac{x^2}{Q'''} + \frac{x^2}{Q''''} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^2}{Q^{(m-1)}} + \frac{x^2}{Q^{(m)}}$$

§. 493.

Beispiel. Es sey die Reihe

$$1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - 14x^4 + 32x^5 - 62x^6 + 128x^7 - 254x^8 + \ldots$$

gegeben; man soll untersuchen:

1) ob sie eine wiederkehrende Reihe ist, und wenn dies der Fall wäre,

2) welches der entsprechende erzeugende Bruch ist?

Verfährt man hiebei nach §. 491., so entsteht folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - \ldots = S \\ \underline{1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - \ldots} & 1 - 2x = Q \\ -2x + 2x^2 - 8x^3 + 14x^4 - \ldots & \\ \underline{-2x - 4x^2 + 4x^3 - 16x^4 - \ldots} & \\ \quad + 6x^2 - 12x^3 + 30x^4 + \ldots = x^2 S'. & \end{array}$$

Sucht man ferner $\frac{S}{S'}$, so wird

$$\begin{array}{l|l} 1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - \ldots & 6 - 12x + 30x^2 - 60x^3 + \ldots = S' \\ \underline{1 - 2x + 5x^2 - 10x^3 + \ldots} & \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x = Q' \\ + 4x - 7x^2 + 18x^3 - 35x^4 + \ldots & \\ \underline{+ 4x - 8x^2 + 20x^3 - 40x^4 + \ldots} & \\ \quad + 1x^2 - 2x^3 + 5x^4 - 10x^5 + 21x^4 + \ldots = x^2 S''. & \end{array}$$

Sucht man hieraus $\frac{S'}{S''}$, so wird

$$\begin{array}{l|l} 6 - 12x + 30x^2 - 60x^3 + 126x^4 - \ldots & 1 - 2x + 5x^2 - 10x^3 + \ldots = S'' \\ \underline{6 - 12x + 30x^2 - 60x^3 + 126x^4 - \ldots} & 6 = Q'' \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Es ist daher die gegebene Reihe $S = 1 + 2x - 2x^2 + \ldots$ eine wiederkehrende Reihe, bei welcher $Q = 1 - 2x$; $Q' = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x$ und $Q'' = 6$ ist. Man findet hieraus den erzeugenden Bruch derselben (§. 491.) oder

$$S = \frac{(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}x)6 + x^2}{(1-2x)[(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}x)6 + x^2] + 6x^2} = \frac{1 + 4x + x^2}{1 + 2x - x^2 - 2x^3},$$

woraus hervorgeht, daß die Reihe zur dritten Ordnung gehört.

§. 494.

Zusatz. In den Fällen, wo ein Rest von der Form $A'x^r + B'x^{r+1} + C'x^{r+2} + \ldots$ bleibt und $r > 2$ ist, wird der neue Divisor $= A'x^{r-2} + B'x^{r-1} + \ldots$ statt $A' + B'x + \ldots$; weshalb auch der Quotient Q nicht mehr unter der Form $p + qx$ vorkommt. In diesem Falle bleibt aber das fortgesetzte Verfahren nach den Gründen §. 491. ungeändert, bis man zum Rest $= 0$ kommt. Man bestimmt alsdann nach der Ordnung des zuletzt gefundenen Quotienten Q den Werth des erzeugenden Bruches S, dem zugehörigen Ausdruck §. 491. gemäß, nur ist alsdann zu bemerken, daß die Ordnung der Reihe, nicht wie vorhin, nach der Anzahl der Quotienten beurtheilt werden kann.

1. **Beispiel.** Es sey die Reihe

$S = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \ldots$ gegeben, man soll untersuchen, ob sie wiederkehrend ist, und alsdann ihren erzeugenden Bruch bestimmen.

Die auszuführende Rechnung ist folgende:

$$\begin{array}{l}
1 \\
1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7 \ldots
\end{array}\left\} \begin{array}{l}
1 + x + x^2 + 2x^3 \ldots = S \\
\hline
1 - x = Q
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}
-x - x^2 - 2x^3 - 4x^4 - 6x^5 - 7x^6 - 7x^7 \ldots \\
-x - x^2 - x^3 - 2x^4 - 4x^5 - 6x^6 - 7x^7 \ldots \\
\hline
\quad - x^3 - 2x^4 - 2x^5 - x^6 \quad \ldots = x^2 S'
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7 \ldots \\
1 + 2x + 2x^2 + x^3 \qquad + x^6 + 2x^7 \ldots
\end{array}\left\} \begin{array}{l}
-x - 2x^2 - 2x^3 \ldots = S' \\
\hline
-\frac{1}{x} + 1 = Q'
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}
- x - x^2 + x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 5x^7 \ldots \\
- x - 2x^2 - 2x^3 - x^4 \qquad - x^7 \ldots \\
\hline
\quad x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 6x^7 \ldots = x^2 S''
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-x - 2x^2 - 2x^3 - x^4 \qquad - x^7 \ldots \\
-x - 3x^2 - 5x^3 - 6x^4 - 6x^5 - 6x^6 - 7x^7 \ldots
\end{array}\left\} \begin{array}{l}
1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 \ldots = S'' \\
\hline
- x + x^2 = Q''
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}
x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 6x^7 \ldots \\
x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 6x^7 \ldots \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Wird nun aus Q, Q', Q'' der erzeugende Bruch

$$S = \frac{Q' Q'' + x^2}{Q(Q' Q'' + x^2) + Q'' x^2}$$ bestimmt, so erhält man

$$S = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4}.$$

Die gegebenen Reihenglieder gehören daher zu einer wiederkehrenden Reihe von der vierten Ordnung.

2. **Beispiel.** Es sey die Reihe $S = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 9x^7 + \ldots$ gegeben; man soll untersuchen, ob sie wiederkehrend ist, und alsdann ihren erzeugenden Bruch bestimmen.

Die Rechnung erhält folgende Gestalt:

$$\begin{array}{l}
1 \\
1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 9x^7 \ldots
\end{array}\left\} \begin{array}{l}
1 + x + x^2 + 2x^3 \ldots = S \\
\hline
1 - x = Q
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}
-x - x^2 - 2x^3 - 3x^4 - 4x^5 - 6x^6 - 9x^7 \ldots \\
-x - x^2 - x^3 - 2x^4 - 3x^5 - 4x^6 - 6x^7 \ldots \\
\hline
\quad - x^3 - x^4 - x^5 - 2x^6 - 3x^7 \ldots = x^2 S'
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 \ldots \\
1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 \ldots \\
\hline
\quad 0
\end{array}\left\} \begin{array}{l}
-x - x^2 - x^3 - 2x^4 - 3x^5 \ldots = S' \\
\hline
-\frac{1}{x} = Q'
\end{array}\right.$$

Aber $S = \frac{Q'}{QQ' + x^2}$ (§. 491.) daher

$$S = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

§. 495.

Eben so wie man untersucht, ob eine gegebene Reihe eine wiederkehrende ist, so kann man auch zu einer jeden Anzahl erster Glieder, welche gegeben sind, einen erzeugenden Bruch finden, welcher diesen gegebenen Reihengliedern entspricht, wenn man ganz auf ähnliche Art wie §. 493. verfährt. Der ganze Unterschied besteht darin, daß hier die Reihe nur eine bestimmte Anzahl Glieder hat, weshalb man auch bei der fortgesetzten Division in jedem neuen Dividend nur eine eben so große Anzahl Glieder aufnehmen darf, als der zugehörige Divisor enthält. Sobald man zum Rest $= 0$ gelangt, wird aus den gefundenen Quotienten Q, Q', Q'', ... der erzeugende Bruch S eben so wie §. 493. bestimmt.

1. **Beispiel.** Es sind die fünf Reihenglieder $1;\ +2x;\ -2x^2;\ +8x^3;\ -14x^4$ gegeben; man soll den zugehörigen erzeugenden Bruch bestimmen.

Setzt man $S = 1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - 14x^4 + \ldots$ und verfährt nach §. 493., so entsteht folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - 14x^4 = S \\
1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - 14x^4 & 1 - 2x = Q \\
\hline
-2x + 2x^2 - 8x^3 + 14x^4 & \\
-2x - 4x^2 + 4x^3 - 16x^4 & \\
\hline
6x^2 - 12x^3 + 30x^4 = x^2 S' &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + 2x - 2x^2 + \ldots & 6 - 12x + 30x^2 = S' \\
1 - 2x + 5x^2 & \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x = Q' \\
\hline
4x - 7x^2 & \\
4x - 8x^2 & \\
\hline
x^2 = x^2 S'' &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
6 - \ldots & 1 = S'' \\
6 & 6 = Q'' \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Es ist daher $Q = 1 - 2x;\ Q' = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x;\ Q'' = 6$, daher der erzeugende Bruch

$$S = \frac{Q'Q'' + x^2}{Q(Q'Q'' + x^2) + Q''x^2} = \frac{1 + 4x + x^2}{1 + 2x - x^2 - 2x^3}.$$

2. **Beispiel.** Es sind die sechs ersten Reihenglieder oder $S = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5$ gegeben; man soll den entsprechenden erzeugenden Bruch finden.

Hier entsteht folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots = S \\
1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 & 1 - x = Q \\
\hline
-x - 2x^2 - 2x^3 - 3x^4 - 3x^5 & \\
-x - x^2 - 2x^3 - 2x^4 - 3x^5 & \\
\hline
-x^2 + 0 - x^4 + 0 = x^2 S' &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots \\ 1 \qquad + \; x^2 \\ \hline \quad x + \; x^2 + 2x^3 \\ \quad x + \quad\; + \; x^3 \\ \hline \qquad x^2 + \; x^3 = x^2 S'' \end{array} \left\} \begin{array}{l} -1 + 0 - x^2 + 0 = S' \\ \hline -1 - x = Q' \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} -1 + 0 - \ldots \\ -1 - x \\ \hline \qquad\; x \\ \qquad\; x \\ \hline \qquad\; 0 \end{array} \left\} \begin{array}{l} 1 + x = S'' \\ \hline -1 + x = Q'' \end{array} \right.$$

Daher ist $Q = 1 - x$; $Q' = -1 - x$; $Q'' = -1 + x$, also der erzeugende Bruch

$$S = \frac{1}{1 - x - x^2 + x^3}.$$

3. **Beispiel.** Die acht ersten Reihenglieder oder

$$S = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7$$

sind gegeben; man soll den entsprechenden erzeugenden Bruch finden.

Hier wird

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7 \\ \hline \quad - x - x^2 - 2x^3 - 4x^4 - 6x^5 - 7x^6 - 7x^7 \\ \quad - x - x^2 - \; x^3 - 2x^4 - 4x^5 - 6x^6 - 7x^7 \\ \hline \qquad\quad - \; x^3 - 2x^4 - 2x^5 - \; x^6 + \; 0 = x^2 S' \end{array} \left\} \begin{array}{l} 1 + x + x^2 + \ldots = S \\ \hline 1 - x = Q \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1 + \; x + \; x^3 + 2x^3 + 4x^4 + \ldots \\ 1 + 2x + 2x^2 + \; x^3 \\ \hline \quad - \; x - x^2 + \; x^3 + 4x^4 \\ \quad - \; x - 2x^2 - 2x^3 - \; x^4 \\ \hline \qquad\quad x^2 + 3x^3 + 5x^4 = x^2 S'' \end{array} \left\} \begin{array}{l} - x - 2x^2 - 2x^3 - x^4 + 0 = S' \\ \hline -\frac{1}{x} + 1 = Q'. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} - x - 2x^2 - 2x^3 - \ldots \\ - x - 3x^2 - 5x^3 \\ \hline \qquad x^2 + 3x^3 \\ \qquad x^2 + 3x^2 \\ \hline \qquad 0 \qquad 0 \end{array} \left\} \begin{array}{l} 1 + 3x + 5x^2 = S'' \\ \hline - x + x^2 = Q'' \end{array} \right.$$

Aus Q, Q', Q'' erhält man

$$S = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4}.$$

§. 496.

§. 496.

Zur bessern Uebersicht der Koeffizientengleichungen, für wiederkehrende Reihen der aufeinander folgenden Ordnungen, erhält man nach einer mehr allgemeinen Bezeichnung, für die Reihen der ersten Ordnung:

$$\frac{a}{b+b_1x} = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
o &= bA - a \\
o &= bA_1 + b_1 A \\
o &= bA_2 + b_1 A_1 \\
o &= bA_3 + b_1 A_2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
o &= bA_n + b_1 A_{n-1} \quad [I]
\end{aligned}$$

Für Reihen der zweiten Ordnung wird:

$$\frac{a+a_1x}{b+b_1x+b_2x^2} = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
o &= bA - a \\
o &= bA_1 + b_1 A - a_1 \\
o &= bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A \\
o &= bA_3 + b_1 A_2 + b_2 A_1 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
o &= bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} \quad [II]
\end{aligned}$$

Für Reihen der dritten Ordnung erhält man

$$\frac{a+a_1x+a_2x^2}{b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3} = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
o &= bA - a \\
o &= bA_1 + b_1 A - a_1 \\
o &= bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A - a_2 \\
o &= bA_3 + b_1 A_2 + b_2 A_1 + b_3 A \\
o &= bA_4 + b_1 A_3 + b_2 A_2 + b_3 A_1 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
o &= bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + b_3 A_{n-3} \quad [III]
\end{aligned}$$

und überhaupt für Reihen der rten Ordnung:

$$\frac{a+a_1x+\ldots+a_{r-1}x^{r-1}}{b+b_1x+\ldots\ldots+b_rx^r} = A + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
o &= bA - a \\
o &= bA_1 + b_1 A - a_1 \\
o &= bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A - a_2 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$0 = bA_{r-1} + b_1 A_{r-2} + b_2 A_{r-3} + \ldots + b_{r-1} A - a_{r-1}$$
$$0 = bA_r + b_1 A_{r-1} + b_2 A_{r-2} + \ldots + b_{r-1} A_1 + b_r A$$
$$0 = bA_{r+1} + b_1 A_r + b_2 A_{r-1} + \ldots + b_{r-1} A_2 + b_r A_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + \ldots + b_{r-1} A_{n-r+1} + b_r A_{n-r}$$

Die Gleichungen [I] [II] [III] u. s. w., in welchen b; b_1; b_2; b_3; ... b_r beständige Größen und A_n; A_{n-1}; A_{n-2}; .... Funkzionen der veränderlichen Größe n sind, heißen **allgemeine Koeffizientengleichungen.** Aus der Anzahl ihrer Glieder läßt sich die Ordnung derjenigen wiederkehrende Reihe erkennen, zu welcher sie gehören, man kann aber, wenn nur die allgemeine Koeffizientengleichung allein gegeben ist, eine unzählige Menge wiederkehrender Reihen angeben, welche der entsprechenden Ordnung zugehören, weil man die Größen a; a_1; a_2; .... willkührlich annehmen kann. Sollen daher Koeffizientengleichungen nur einer bestimmten Reihe entsprechen, oder sucht man den erzeugenden Bruch der Reihe, so müssen außer der allgemeinen Gleichung auch noch die besondern Werthe a; a_1; a_2; .... gegeben seyn, welche die **vollständigen** Koeffizientengleichungen

$$0 = bA - a$$
$$0 = bA_1 + b_1 A - a_1$$
$$0 = bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A - a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bilden, oder welches einerlei ist, es müssen zur Bildung einer bestimmten Reihe der $r$ten Ordnung, außer der allgemeinen Koeffizientengleichung, auch noch die r ersten Koeffizienten dieser Reihe gegeben seyn.

Diejenigen Ausdrücke, durch welche die Koeffizienten einer Reihe aus den unmittelbar vorhergehenden bestimmt werden können, heißen **wiederkehrende** oder **zurücklaufende Koeffizientengleichungen**; ist aber der allgemeine Koeffizient unabhängig von den unmittelbar vorhergehenden ausgedrückt, so entsteht eine **unabhängige Koeffizientengleichung.**

So ist z. B. nach §. 483., wenn man die hier angenommene Bezeichnung einführt, für den Urbruch

$$\frac{a + a_1 x + a^2 x^2 + \ldots + a_{r-1} x^{r-1}}{(1 - bx)^r} = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

die entsprechende wiederkehrende Koeffizientengleichung

$$0 = A_n - rbA_{n-1} + r_2 b^2 A_{n-2} - r_3 b^3 A_{n-3} + \ldots \pm rb^{r-1} A_{n-r+1} \mp b^r A_{n-r}$$

und die unabhängige Koeffizientengleichung

$$A_n = (r + n - 1)_{r-1}\, a b^n + (r + n - 2)_{r-1}\, a_1 b^{n-1} + (r + n - 3)_{r-1}\, a_2 b^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (n + 1)_{r-1}\, a_{r-2} b^{n-r+2} + n_{r-1}\, a_{r-1} b^{n-r+1}.$$

Wie in jedem besondern Falle die unabhängige Koeffizientengleichung einer wiederkehrenden Reihe aus der wiederkehrenden Koeffizientengleichung gefunden werden kann, wird in der Folge im neunzehnten und zwanzigsten Kapitel gelehrt werden.

§. 497.

Sind die beiden Koeffizientengleichungen

$$o = bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + \ldots + b_{n-1} A_1 + b_n \text{ und}$$
$$o = bC_n + b_1 C_{n-1} + b_2 C_{n-2} + \ldots + b_{n-1} C_1 + b_n$$

für zwei Reihen gegeben, so haben beide Reihen einerlei erzeugenden Bruch (§. 488.), daher sind auch die Reihen einander gleich, und man erhält:

$$A_n = C_n.$$

IV. Von den übrigen wiederkehrenden Reihen.

§. 498.

Bezeichnet allgemein $\frac{P}{Q}$ den erzeugenden Bruch einer wiederkehrenden Reihe, und es wird vorausgesetzt, daß P und Q Reihen sind, welche nach den Potenzen von x fortschreiten, so kann man vorzüglich vier verschiedene Fälle unterscheiden:

I. wenn P und Q endliche Reihen sind, und die höchste Potenz von x in Q wenigstens um eine Einheit größer, als in P ist;

II. wenn P eine endliche, und Q eine unendliche Reihe ist;

III. wenn P eine unendliche, und Q eine endliche, und

IV. wenn P und Q unendliche Reihen sind.

Von diesen Fällen ist bereits der erste bisher abgehandelt worden. Die übrigen sollen hier noch kurz berührt werden.

§. 499.

Zur Erläuterung des zweiten Falles §. 498. setze man:

$$(I)\quad \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r}{b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots .$$

so wird nach §. 52.

$$\begin{aligned}
a &= bA \\
a_1 &= bA_1 + b_1 A \\
a_2 &= bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_r &= bA_r + b_1 A_{r-1} + b_2 A_{r-2} + \ldots + b_r A \\
o &= bA_{r+1} + b_1 A_r + b_2 A_{r-1} + \ldots + b_r A_1 + b_{r+1} A \\
o &= bA_{r+2} + b_1 A_{r+1} + b_2 A_r + \ldots + b_r A_2 + b_{r+1} A_1 + b_{r+2} A \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(II)\quad o &= bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + b_3 A_{n-3} + \ldots + b_{n-1} A_1 + b_n A
\end{aligned}$$

Nach dieser allgemeinen wiederkehrenden Koeffizientengleichung (II), kann jedes Glied der entsprechenden Reihe mittelst **aller** vorhergehenden Glieder dieser Reihe gefunden werden, weshalb die vorstehende Reihe (I) eine **wiederkehrende Reihe der höchsten Ordnung** heißt.

Sind die vollständigen Koeffizientengleichungen gegeben, so kann man daraus leicht den erzeugenden Bruch finden.

Wäre nur die allgemeine Koeffizientengleichung (II) gegeben, so kann man die $r+1$ ersten Glieder $A, A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_r$ der Reihe, entweder willkührlich annehmen, oder sie sind auch gegeben, und alsdann erhält man hieraus mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen die Werthe $a, a_1, a_2 \ldots a_r$, wodurch die Glieder des erzeugenden Bruches bekannt werden.

Wegen der Berechnung der einzelnen aufeinander folgenden Glieder der, dem erzeugenden Bruche entsprechenden Reihe, gelten eben dieselben Bemerkungen.

Beispiel. Sind die allgemeine Koeffizientengleichung

$$o = A_n + 3A_{n-1} + 5A_{n-2} + 7A_{n-3} + 9A_{n-5} + \ldots\ldots + (1+2n)A$$

einer wiederkehrenden Reihe der höchsten Ordnung nebst den 4 ersten Glieder derselben $A = 2$, $A_1 = 3$, $A_2 = 1$ und $A_3 = 4$ gegeben, so wird hier $b = 1$; $b_1 = 3$; $b_2 = 5$; $b_3 = 7$; ... daher

$$a = 1.2 = 2$$
$$a_1 = 1.3 + 3.2 = 9$$
$$a_2 = 1.1 + 3.3 + 5.2 = 20$$
$$a_3 = 1.4 + 3.1 + 5.3 + 7.2 = 36.$$

Ferner erhält man

$$A_4 = -3A_3 - 5A_2 - 7A_1 - 9A = -56$$
$$A_5 = -3A_4 - 5A_3 - 7A_2 - 9A_1 - 11A = +92$$
$$A_6 = -3A_5 - 5A_4 - 7A_3 - 9A_2 - 11A_1 - 13A = -92$$
u. s. w.

Auch findet man den erzeugenden Bruch

$$\frac{2 + 9x + 20x^2 + 36x^3}{1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + (1+2n)x^n + \ldots} = 2 + 3x + x^2 + 4x^3 - 56x^4 + \ldots\ldots$$

§. 500.

Zusatz. Man setze $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_r = o$, so wird wegen $a = bA$

$$(I)\quad \frac{bA}{b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_nx^n+\ldots} = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$$

und man erhält

$$o = bA_1 + b_1A$$
$$o = bA_2 + b_1A_1 + b_2A$$
$$o = bA_3 + b_1A_2 + b_2A_1 + b_3A$$
$$o = bA_4 + b_1A_3 + b_2A_2 + b_3A_1 + b_4A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(II)\quad o = bA_n + b_1A_{n-1} + b_2A_{n-2} + b_3A_{n-3} + \ldots\ldots + b_nA.$$

§. 501.

Wegen des dritten Falls §. 498. setze man

$$(I)\quad \frac{a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots}{b+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_rx^r}=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

so wird nach §. 52.

$$\begin{aligned}
a &= bA\\
a_1 &= bA_1+b_1A\\
a_2 &= bA_2+b_1A_1+b_2A\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r-1} &= bA_{r-1}+b_1A_{r-2}+b_2A_{r-3}+\ldots+b_{r-1}A\\
a_r &= bA_r+b_1A_{r-1}+b_2A_{r-2}+\ldots+b_{r-1}A_1+b_rA\\
a_{r+1} &= bA_{r+1}+b_1A_r+b_2A_{r-1}+\ldots+b_{r-1}A_2+b_rA_1\\
a_{r+2} &= bA_{r+2}+b_1A_{r+1}+b_2A_r+\ldots+b_{r-1}A_3+b_rA_2
\end{aligned}$$

und überhaupt:

$$(II)\quad a_n=bA_n+b_1A_{n-1}+b_2A_{n-2}+b_3A_{n-3}+\ldots+b_rA_{n-r}$$

oder auch

$$0=bA_n+b_1A_{n-1}+b_2A_{n-2}+\ldots\ldots+b_rA_{n-r}-a_n.$$

Diese allgemeine Koeffizientengleichung unterscheidet sich von den bisher gefundenen dadurch, daß derselben noch eine Funkzion a_n von der Stellenzahl n beigefügt ist, man also hienach jeden Koeffizienten der entsprechenden Reihe, welcher auf das $r$te Glied folgt, zwar wie bei den einfachen Reihen der $r$ten Ordnung, aus den r vorhergehenden Gliedern bestimmt, daß aber alsdann jeder Koeffizient noch den veränderlichen Zusatz a_n erhält. Man kann daher die vorstehende Reihe, eine **wiederkehrende Reihe der $r$ten Ordnung mit einem veränderlichen Zusatze** nennen.

Die Bestimmung des erzeugenden Bruches, sowohl, als der einzelnen Glieder von der demselben entsprechenden Reihe, erfordert nur allein, daß die allgemeine Koeffizientengleichung (II) gegeben sey; denn es sind hienach die Glieder $a, a_1, a_2, a_3 \ldots$ bekannt, wenn man $0, 1, 2, 3, \ldots$ statt n in a_n setzt. Daher findet man zur Bestimmung der Koeffizienten mittelst der vorstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a}{b}\\
A_1 &= \frac{a_1-b_1A}{b}\\
A_2 &= \frac{a_2-b_1A_1-b_2A}{b}\\
A_3 &= \frac{a_3-b_1A_2-b_2A_1-b_3A}{b}
\end{aligned}$$

u. s. w.

Beispiel. Ist die allgemeine Koeffizientengleichung

$$A_n+2A_{n-1}+3A_{n-2}+4A_{n-3}=1+n^2$$

einer wiederkehrenden Reihe der dritten Ordnung mit dem veränderlichen Zusatze $1+n^2$ gege-

ben, so wird hier $a_n = 1 + n^2$, also $a = 1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 10$; $a_4 = 17$; $a_5 = 26$; ... und $b = 1$; $b_1 = 2$; $b_2 = 3$; $b_3 = 4$, daher wird

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
A_1 &= 2 - 2 = 0 \\
A_2 &= 5 - 2.0 - 3.1 = 2 \\
A_3 &= 10 - 2.2 - 3.0 - 4.1 = 2 \\
A_4 &= 17 - 2.2 - 3.2 - 4.0 = 7 \\
A_5 &= 26 - 2.7 - 3.2 - 4.2 = -2
\end{aligned}$$

u. s. w. Der erzeugende Bruch ist

$$\frac{1+2x+5x^2+10x^3+\ldots+(1+n^2)x^n+\ldots}{1+2x+3x^2+4x^3} = 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 - 2x^5 + \ldots$$

§. 502.

Zusatz. Man setze $a_n = a$, so wird $a = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$ daher

(I) $\dfrac{a(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)}{b+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_rx^r} = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$ und

$$\begin{aligned}
a &= bA \\
a &= bA_1 + b_1A \\
a &= bA_2 + b_1A_1 + b_2A \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a &= bA_{r-1} + b_1A_{r-2} + b_2A_{r-3} + \ldots + b_{r-1}A \\
a &= bA_r + b_1A_{r-1} + b_2A_{r-2} + \ldots + b_{r-1}A_1 + b_rA \\
a &= bA_{r+1} + b_1A_r + b_2A_{r-1} + \ldots + b_{r-1}A_2 + b_rA_1
\end{aligned}$$

und überhaupt

(II) $a = bA_n + b_1A_{n-1} + b_2A_{n-2} + b_3A_{n-3} + \ldots + b_rA_{n-r}$

Die vorstehende allgemeine Koeffizientengleichung entspricht daher einer **wiederkehrenden Reihe der $r$ten Ordnung mit einem beständigen Zusatze a.**

Zur Bildung des erzeugenden Bruches und zur Bestimmung der Glieder der entsprechenden Reihe, ist die allgemeine Koeffizientengleichung (II) allein zureichend.

Der erzeugende Bruch kann auch noch einfacher dargestellt werden. Denn es ist §. 450. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$ daher erhält man auch für den erzeugenden Bruch folgenden Ausdruck:

(III) $\dfrac{a}{(1-x)(b+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_rx^r)} = A + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + \ldots$

so daß diesem Ausdruck gemäß, die vorstehende Reihe auch als eine Reihe der $r+1$sten Ordnung angesehen werden kann.

§. 503.

Nach dem vierten Falle §. 498. setze man

(I) $\dfrac{a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots}{b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_nx^n+\ldots} = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$

so findet man

$$a = bA$$
$$a_1 = bA_1 + b_1 A$$
$$a_2 = bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A$$
$$a_3 = bA_3 + b_1 A_2 + b_2 A_1 + b_3 A$$
$$a_4 = bA_4 + b_1 A_3 + b_2 A_2 + b_3 A_1 + b_4 A$$

und allgemein

$$(II) \quad a_n = bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + b_3 A_{n-3} + \ldots + b_n A.$$

Weil nach dieser allgemeinen Koeffizientengleichung jedes Glied der entsprechenden Reihe mittelst aller vorhergehenden Glieder und des veränderlichen Zusatzes a_n gefunden wird, so heißt die vorstehende Reihe (I) eine **wiederkehrende Reihe der höchsten Ordnung mit einem veränderlichen Zusatze.**

Die allgemeine Koeffizientengleichung (II) ist zur Bestimmung des erzeugenden Bruches und der Koeffizienten der entsprechenden Reihenglieder zureichend, weil man aus den gegebenen Funkzionen a_n und b_n die entsprechenden Werthe $a, a_1, a_2, \ldots$ und $b, b_1, b_2 \ldots$ also den erzeugenden Bruch, und mittelst der Gleichung

$$A_n = \frac{1}{b}(a_n - b_1 A_{n-1} - b_2 A_{n-2} - b_3 A_{n-3} - \ldots - b_n A)$$

jedes Glied der entsprechenden Reihe finden kann.

Sind hingegen außer der allgemeinen Koeffizientengleichung (II) noch mehrere besondere Werthe von den ersten Koeffizienten $A, A_1, A_2 \ldots a, a_1, a_2 \ldots$ oder $b, b_1, b_2 \ldots$ gegeben, oder willkührlich angenommen worden, welche den allgemeinen Ausdrücken A_n, a_n oder b_n nicht entsprechen, so kann auch für diesen Fall der erzeugende Bruch und die demselben entsprechende Reihe gefunden werden; nur ist alsdann die allgemeine Koeffizientengleichung (II) allein nicht zureichend, sondern es müssen auch noch die übrigen der vorstehenden Gleichungen, so weit als besondere Werthe gegeben sind, zur Bestimmung der zusammengehörigen nicht gegebenen besonderen Werthe, angewendet werden. Hiedurch entstehen noch besondere Bedingungsgleichungen, durch welche der Werth der nicht gegebenen besonderen Werthe gefunden werden kann, wie dies die folgenden Beispiele näher erläutern.

1. **Beispiel.** Die allgemeine Koeffizientengleichung

$$3^n = 4A_n + 3A_{n-1} + 2A_{n-2} + \ldots + (4-n)A$$

einer wiederkehrenden Reihe der höchsten Ordnung mit einem veränderlichen Zusatze ist ohne andere besondere Werthe gegeben, daher wird hier $a_n = 3^n$, also $a = 1$; $a_1 = 3$; $a_2 = 9$; $a_3 = 27$; $a_4 = 81$; .... und $b_n = 4 - n$, also $b = 4$; $b_1 = 3$; $b_2 = 2$; $b_3 = 1$; $b_4 = 0$; $b_5 = -1$; .... und man findet, weil hier keine Bedingungsgleichungen vorkommen

$$A = \frac{a}{b} = \frac{1}{4}$$
$$A_1 = \frac{a_1 - b_1 A}{b} = \frac{3 - 3 \cdot \frac{1}{4}}{4} = \frac{9}{16}.$$

$$A_2 = \frac{a_2 - b_1 A_1 - b_2 A}{b} = \frac{9 - 3 \cdot \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4}}{4} = \frac{109}{64}$$

$$A_3 = \frac{27 - 3 \cdot \frac{109}{64} - 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 \cdot \frac{1}{4}}{4} = \frac{1637}{256}$$

u. s. w., folglich

$$\frac{1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots + 3^n x^n + \ldots}{4 + 3x + 2x^2 + x^3 - x^5 - \ldots + (4-n) x^n + \ldots} = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} x + \frac{109}{64} x^2 + \frac{1637}{256} x^3 + \ldots$$

2. **Beispiel.** Sind die allgemeine Koeffizientengleichung

$$3^n = 2 A_n + 3 A_{n-1} + 2 A_{n-2} + \ldots + (4-n) A_n$$

nebst den besondern Werthen

$$a = 4; \; a_1 = 5 \text{ und } b = 2$$

gegeben, so entstehen folgende beide Bedingungsgleichungen:

$$4 = 2A$$
$$5 = 2A_1 + b_1 A = 2A_1 + 3A.$$

Hienach findet man $A = 2$ und $A_1 = -\frac{1}{2}$.

Ferner ist $a_n = 3^n$, also $a_2 = 9$; $a_3 = 27$; $a_4 = 81$; .... und $b_n = 4 - n$, also $b_1 = 3$; $b_2 = 2$; $b_3 = 1$; $b_4 = 0$; $b_5 = -1$; .... daher

$$A_2 = \frac{1}{b} (a_2 - b_1 A_1 - b_2 A) = \frac{9 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 2}{2} = \frac{13}{4}$$

$$A_3 = \frac{1}{b} (a_3 - b_1 A_2 - b_2 A_1 - b_3 A) = \frac{27 - 3 \cdot \frac{13}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 2}{2} = \frac{71}{8}$$

u. s. w., folglich

$$\frac{4 + 5x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + \ldots + 3^n x^n + \ldots}{2 + 3x + 2x^2 + x^3 - x^5 - 2x^6 - \ldots + (4-n) x^n + \ldots} = 2 - \frac{1}{2} x + \frac{13}{4} x^2 + \frac{71}{8} x^3 + \ldots$$

3. **Beispiel.** Die allgemeine Koeffizientengleichung

$$3^n = 1 A_n + 2 A_{n-1} + 2 A_{n-2} + A_{n-3} + \ldots + (4-n) A$$

nebst den besondern Werthen

$$a = 3; \; b = 1; \; b_1 = 2 \text{ und } A_2 = 10$$

sind gegeben. Hieraus entstehen folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$3 = 1 \cdot A$$
$$a_1 = 1 \cdot A_1 + 2A$$
$$a_2 = 1 \cdot 10 + 2A_1 + b_2 A = 1 \cdot 10 + 2A_1 + 2A.$$

Aus der ersten Bedingungsgleichung wird $A = 3$, und man kann, um A_1 aus der zweiten zu finden, a_1 willkührlich annehmen. Setzt man $a_1 = 8$, so wird $A_1 = 2$ und man findet ferner $a_2 = 10 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 20$.

Nun ist für diejenigen Fälle wo keine besondere Werthe gegeben oder bestimmt sind $a_n = 3^n$, also $a_3 = 27$; $a_4 = 81$; $a_5 = 243$; .... und $b_n = 4 - n$, also $b_3 = 1$; $b_4 = 0$; $b_5 = -1$; .... daher

$$A_3 = \frac{1}{b} (a_3 - b_1 A_2 - b_2 A_1 - b_3 A)$$

$$A_4 = \frac{1}{b} (a_4 - b_1 A_3 - b_2 A_2 - b_3 A_1 - b_4 A) \text{ u. s. w., oder}$$

A_3

$$A_3 = 27 - 2.10 - 2.2 - 1.3 = 0$$
$$A_4 = 81 - 2.0 - 2.10 - 1.2 - 0.3 = 59$$

u. s. w., folglich

$$\frac{3+8x+20x^2+27x^3+81x^4+\ldots+3^n x^n+\ldots}{1+2x+2x^2+x^3-x^5-2x^6-\ldots+(4-n)x^n+\ldots} = 3+2x+10x^2+59x^4+\ldots\ldots$$

§. 504.

Zusatz. Man setze $a_n = a$, so wird $a = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$ und man findet

$$\frac{a(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)}{b+b_1 x+b_2 x^2+b_3 x^3+\ldots+b_n x^n+\ldots}$$

$$= \frac{a}{(1-x)(b+b_1 x+b_2 x^2+\ldots+b_n x^n+\ldots)} = A+A_1 x+A_2 x^2+A_3 x^3+\ldots+A_n x^n+\ldots$$

$$a = bA$$
$$a = bA_1 + b_1 A$$
$$a = bA_2 + b_1 A_1 + b_2 A$$

und allgemein

$$a = bA_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + b_3 A_{n-3} + \ldots + b_n A.$$

Diese allgemeine Koeffizientengleichung entspricht einer **wiederkehrenden Reihe der höchsten Ordnung mit einem beständigen Zusatze**, und man ist im Stande mittelst derselben den erzeugenden Bruch und die einzelnen Reihenglieder zu finden.

V. Anwendung auf einige Entwickelungen.

§. 505.

Zur Vergleichung der bernoullischen Zahlen mit andern Ausdrücken, suche man den erzeugenden Bruch aus welchem dieselben entspringen. Dies zu bewirken, werde der §. 443. gefundene Ausdruck durch die Faktorenfolge $(2n+1)!$ dividirt, so findet man, wenn auch die Binomialkoeffizienten in ihre Faktorenfolgen aufgelöst werden,

$$\mp \frac{2n-1}{2(2n+1)!} = \frac{B_n}{(2n)!} - \frac{B_{n-1}}{3!(2n-2)!} + \frac{B_{n-2}}{5!(2n-4)!} - \ldots\ldots \pm \frac{B_2}{(2n-3)!4!} \mp \frac{B_1}{(2n-1)!2!}, \quad [I]$$

oder hierin n mit $n+1$ vertauscht, giebt

$$\pm \frac{2n+1}{2(2n+3)!} = \frac{1}{1}\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} - \frac{1}{3!}\frac{B_n}{(2n)!} + \frac{1}{5!}\frac{B_{n-1}}{(2n-2)!} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{(2n+1)!}\frac{B_1}{2!}.$$

Nun setze man

$$a_n = \pm \frac{2n+1}{2(2n+3)!}; \quad b_n = \pm \frac{1}{(2n+1)!} \text{ und } A_n = \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!},$$

so wird nach §. 503.

$$\frac{\frac{1}{2.3!} - \frac{3x}{2.5!} + \frac{5x^2}{2.7!} - \ldots}{1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \ldots} = \frac{B_1}{2!} + \frac{B_2 x}{4!} + \frac{B_3 x^2}{6!} + \frac{B_4 x^3}{8!} + \ldots$$

oder auch

$$(I)\quad \frac{\frac{1}{3!}-\frac{3x}{5!}+\frac{5x^2}{7!}-\frac{7x^3}{9!}+\frac{9x^4}{11!}-\frac{11x^5}{13!}+\dots}{2\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\frac{x^4}{9!}-\frac{x^5}{11!}+\dots\right)}$$
$$=\frac{B_1}{2!}+\frac{B_2 x}{4!}+\frac{B_3 x^2}{6!}+\frac{B_4 x^3}{8!}+\frac{B_5 x^4}{10!}+\frac{B_6 x^5}{12!}+\dots\dots$$

Es ist $\mp\frac{2n-1}{2(2n+1)!}=\mp\frac{-1}{(2n+1)!}\mp\frac{1}{2(2n)!}$, daher nach [$I$]

$$\mp\frac{1}{2(2n)!}=\frac{1}{1}\frac{B_n}{(2n)!}-\frac{1}{3!}\frac{B_{n-1}}{(2n-2)!}+\frac{1}{5!}\frac{B_{n-2}}{(2n-4)!}-\dots\mp\frac{1}{(2n-1)!}\frac{B_1}{2!}\pm\frac{+1}{(2n+1)!}(-1).$$

Setzt man daher $a_n=\mp\frac{1}{2(2n)!}$; $b_n=\pm\frac{1}{(2n+1)!}$ und $A_n=\frac{B_n}{(2n)!}$, so sind, in Vergleichung mit §. 503., hienach in der vorstehenden Gleichung mit diesen Voraussetzungen übereinstimmend, mit Ausnahme von $A=-1$. Daher gilt hier die Bestimmungsgleichung $a=bA=b(-1)=-b$, und weil $b=\frac{1}{2}$ gegeben ist, so wird $a=-1$. Es ist daher $a=-1$; $a_1=\frac{1}{2.2!}$; $a_2=\frac{-1}{2.4!}$; $a_3=\frac{1}{2.6!}\dots\dots A=-1$; $A_1=\frac{B_1}{2!}$; $A_2=\frac{B_2}{4!}\dots\dots$ folglich

$$\frac{-1+\frac{x}{2.2!}-\frac{x^2}{2.4!}+\dots}{1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\dots}=-1+\frac{B_1 x}{2!}+\frac{B_2 x^2}{4!}+\frac{B_3 x^3}{6!}+\dots$$

oder beide Seiten der Gleichung mit -1 und dann Zähler und Nenner des erzeugenden Bruches mit 2 multiplizirt, giebt

$$(II)\quad \frac{2-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\frac{x^5}{10!}+\dots}{2\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\frac{x^4}{9!}-\frac{x^5}{11!}+\dots\right)}$$
$$=1-\frac{B_1 x}{2!}-\frac{B_2 x^2}{4!}-\frac{B_3 x^3}{6!}-\frac{B_4 x^4}{8!}-\frac{B_5 x^5}{10!}-\frac{B_6 x^6}{12!}-\dots\dots$$

oder x^2 statt x gesetzt und nachher auf beiden Seiten durch x dividirt, giebt

$$\frac{2-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots}=\frac{2}{x}-\frac{2B_1 x}{2!}-\frac{2B_2 x^3}{4!}-\frac{2B_3 x^5}{6!}-\dots$$

daher nach §. 168. (II) und (I)

$$(III)\quad \frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{x}-\frac{2B_1 x}{2!}-\frac{2B_2 x^3}{4!}-\frac{2B_3 x^5}{6!}-\frac{2B_4 x^7}{8!}-\dots\dots$$

In (II) werde $1-\frac{B_1 x}{2!}-\frac{B_2 x^2}{4!}-\frac{B_3 x^3}{6!}-\dots=fx$ gesetzt, wo f das Funkzionenzeichen bedeutet, so wird

$$\frac{2}{x}f(-x^2)=\frac{2+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\dots}{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\dots}.$$

Nach §. 169. (*IX*) (*VII*) ist aber dieser Ausdruck $= \frac{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 1}{\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}}$, oder Zähler und Nenner mit $2e^x$ multiplizirt

$$= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{(e^x + 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \text{ daher}$$

$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{x} f(-x^2)$, oder, wenn man für diesen Ausdruck den entsprechenden Werth aus fx setzt,

$$(IV) \quad \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \frac{B_4 x^8}{8!} + \ldots\ldots\right).$$

§. 506.

Aufgabe. Die Tangente und Cotangente eines Bogens durch Reihen auszudrücken, welche nach den Potenzen dieses Bogens fortschreiten.

Auflösung. Nach §. 146. [60] ist

$\cot x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$; wenn man daher in (*III*) §. 505. $2x$ statt x setzt, so findet man

$$(I) \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{2!}x - \frac{2^4 B_2}{4!}x^3 - \frac{2^6 B_3}{6!}x^5 - \frac{2^8 B_4}{8!}x^7 - \ldots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}x^{2n-1} - \ldots\ldots$$

Hienach wird auch:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \tfrac{1}{6}\frac{2^2}{2!}x - \tfrac{1}{30}\frac{2^4}{4!}x^3 - \tfrac{1}{42}\frac{2^6}{6!}x^5 - \tfrac{1}{30}\frac{2^8}{8!}x^7 - \ldots\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2}{3!}x - \frac{2^3}{3.5!}x^3 - \frac{2^5}{3.7!}x^5 - \frac{3.2^7}{5.9!}x^7 - \frac{5.2^9}{3.11!}x^9 - \frac{691.2^{11}}{3.5.7.13!}x^{11} - \ldots\ldots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2}{3!}x - \frac{8}{3.5!}x^3 - \frac{32}{3.7!}x^5 - \frac{384}{5.9!}x^7 - \frac{2560}{3.11!}x^9 - \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.3.5} - \frac{2x^5}{3.5.7.9} - \frac{x^7}{3.5.5.7.9} - \frac{2x^9}{3.5.7.9.9.11} - \ldots\ldots$$

Aus der vorstehenden Gleichung (*I*) erhält man, wenn $2x$ statt x gesetzt wird,

$$\cot 2x = \frac{1}{2x} - \frac{2^3}{2!}B_1 x - \frac{2^7}{4!}B_2 x^3 - \frac{2^{11}}{6!}B_3 x^5 - \frac{2^{15}}{8!}B_4 x^7 - \ldots\ldots$$

Es ist aber $tg\, x = \cot x - 2\cot 2x$ (§. 146. [59]) daher

$$tg\, x = \begin{Bmatrix} + \frac{1}{x} - \frac{2^2}{2!}B_1 x - \frac{2^4}{4!}B_2 x^3 - \frac{2^6}{6!}B_3 x^5 - \ldots\ldots \\ - \frac{1}{x} + \frac{2^4}{2!}B_1 x + \frac{2^8}{4!}B_2 x^3 + \frac{2^{12}}{6!}B_3 x^5 + \ldots\ldots \end{Bmatrix} \text{ folglich}$$

$$(II) \quad tg\, x = \frac{2^2(2^2-1)}{2!}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{4!}B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{6!}B_3 x^5 + \frac{2^8(2^8-1)}{8!}B_4 x^7 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!}B_{n+1}x^{2n+1} + \ldots\ldots\ldots$$

daher auch

$$tg\, x = x + \frac{(2^4-1)2^3}{3.5!}x^3 + \frac{(2^6-1)2^5}{3.7!}x^5 + \frac{3(2^8-1)2^7}{5.9!}x^7 + \frac{5(2^{10}-1)2^9}{3.11!}x^9 + \frac{691(2^{12}-1)2^{11}}{3.5.7.13!}x^{11} + \ldots$$

oder

$$tg\,x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + \frac{7936}{9!}x^9 + \frac{353792}{11!}x^{11} + \ldots\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{5.7.9} + \frac{62x^9}{5.7.9.9} + \frac{1382x^{11}}{5.5.7.9.9.11} + \ldots\ldots\ldots$$

Bezeichnet man allgemein die Koeffizienten der Tangentenreihe durch T; T_1; T_2; T_3; .... so wird

$$(III)\quad tg\,x = Tx + T_1x^3 + T_2x^5 + T_3x^7 + \ldots + T_nx^{2n+1} + \ldots\ldots$$

und

$$T_n = \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!}B_{n+1}.$$

§. 507.

Aufgabe. Die Reihe für die Cosecante eines Bogens zu finden.

Auflösung. Es ist $cosec\,x = cot\,\frac{1}{2}x - cot\,x$ (§. 146. [61]). Nach §. 506. ist aber

$$cot\,\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2}{2!}B_1x - \frac{2}{4!}B_2x^3 - \frac{2}{6!}B_3x^5 - \ldots\ldots \text{ und}$$

$$cot\,x = \frac{1}{x} - \frac{2^2}{2!}B_1x - \frac{2^4}{4!}B_2x^3 - \frac{2^6}{6!}B_3x^5 - \ldots\ldots \text{ folglich}$$

$$(I)\quad cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)}{2!}B_1x + \frac{2(2^3-1)}{4!}B_2x^3 + \frac{2(2^5-1)}{6!}B_3x^5 + \frac{2(2^7-1)}{8!}B_4x^7 + \ldots$$

oder auch

$$cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3!} + \frac{2^3-1}{3.5!}x^3 + \frac{2^5-1}{3.7!}x^5 + \frac{3(2^7-1)}{5.9!}x^7 + \frac{5(2^9-1)}{3.11!}x^9 + \frac{691(2^{11}-1)}{3.5.7.13!}x^{11} + \frac{5.7(2^{13}-1)}{15!}x^{13} + \ldots\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3.5!} + \frac{31x^5}{3.7!} + \frac{381x^7}{5.9!} + \frac{2555x^9}{3.11!} + \ldots\ldots$$

§. 508.

Aufgabe. Die Secante eines Bogens durch eine Reihe, welche nach den Potenzen des Bogens fortschreitet, auszudrücken.

Auflösung. Es ist $sec\,x = \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots}$. Hienach hat die entsprechende Reihe folgende Form:

$$1 + \frac{\beta_1}{2!}x^2 + \frac{\beta_2}{4!}x^4 + \ldots + \frac{\beta_n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \text{ (§. 66.)}$$

wo β_1, β_2, β_3, ... noch näher zu bestimmende Koeffizienten sind. Es wird daher

$$1 = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)\left(1 + \frac{\beta_1}{2!}x^2 + \frac{\beta_2}{4!}x^4 + \ldots\right) \text{ oder}$$

$$
\begin{array}{llllll}
1 = 1 + \frac{\beta_1}{2!} & \Big| x^2 + \frac{\beta_2}{4!} & \Big| x^4 + \ldots\ldots + & \frac{\beta_n}{(2n)!} & \Big| x^{2n} + \ldots\ldots \\
\quad - \frac{1}{2!} & \Big| \quad - \frac{\beta_1}{2!2!} & \Big| & - \frac{\beta_{n-1}}{2!(2n-2)!} & \Big| \\
 & \quad + \frac{1}{4!} & \Big| & + \frac{\beta_{n-2}}{4!(2n-4)!} & \Big| \\
 & & & \ldots\ldots & \Big| \\
 & & & \mp \frac{\beta_1}{(2n-2)!2!} & \Big| \\
 & & & \pm \frac{1}{(2n)!} & \Big|
\end{array}
$$

daher (§. 52.) $o = \frac{\beta_n}{(2n)!} - \frac{\beta_{n-1}}{2!(2n-2)!} + \frac{\beta_{n-2}}{4!(2n-4)!} + \ldots \mp \frac{\beta_1}{(2n-2)!2!} \pm \frac{1}{(2n)!}$, oder $o = \beta_n - \frac{2n.2n-1}{1.2}\beta_{n-1} + \frac{2n\ldots 2n-3}{1\ldots 4}\beta_{n-2} + \ldots \mp \frac{2n.2n-1}{1.2}\beta_1 \pm 1$, oder nach der Bezeichnung für die Binomialkoeffizienten

$$o = \beta_n - (2n)_2\,\beta_{n-1} + (2n)_4\,\beta_{n-2} - \ldots \pm (2n)_4\,\beta_2 \mp (2n)_2\,\beta_1 \pm 1.$$

Hienach wird:

$$o = \beta_1 - 1$$

$$o = \beta_2 - \frac{4.3}{1.2}\beta_1 + 1$$

$$o = \beta_3 - \frac{6.5}{1.2}\beta_2 + \frac{6.5}{1.2}\beta_1 - 1$$

$$o = \beta_4 - \frac{8.7}{1.2}\beta_3 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\beta_2 - \frac{8.7}{1.2}\beta_1 + 1$$

$$o = \beta_5 - \frac{10.9}{1.2}\beta_4 + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\beta_3 - \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\beta_2 + \frac{10.9}{1.2}\beta_1 - 1$$

u. s. w., es ist daher für

$$Sec\,x = 1 + \frac{\beta_1}{2!}x^2 + \frac{\beta_2}{4!}x^4 + \frac{\beta_3}{6!}x^6 + \ldots + \frac{\beta_n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots\ldots$$

$$\beta_1 = 1$$
$$\beta_2 = 5$$
$$\beta_3 = 61$$
$$\beta_4 = 1385$$
$$\beta_5 = 50521$$
$$\beta_6 = 2702765$$
$$\beta_7 = 199360981$$
$$\beta_8 = 19391512145$$
$$\beta_9 = 2404879661671$$

u. s. w.

Ueber den Zusammenhang dieser Koeffizienten mit den Summen der reciproken ungeraden Potenzen s. m. §. 591.

§. 509.

Zusatz. Sucht man statt der wiederkehrenden, eine unabhängige Koeffizientengleichung für die Secantenreihe, so wird nach §. 185. (*I*)

$$\partial\, tg\, x = sec\, x^2 = \frac{sec\, x}{cos\, x}, \text{ daher}$$

$$sec\, x = cos\, x \,.\, \partial\, tg\, x.$$

Wird nun die Ableitung von $tg\, x$ (§. 506. *III*) genommen, so erhält man

$$\partial\, tg\, x = 1.T + 3T_1 x^2 + 5T_2 x^4 + 7T_3 x^6 + \ldots + (2n+1)\, T_n x^{2n} + \ldots\ldots$$

Ferner ist §. 168.

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \ldots\ldots$$

daher wird, wenn man diese beide Reihen in einander multiplizirt, $cos\, x \,.\, \partial\, tg\, x$, oder

$$sec\, x = \begin{array}{c|c|c|l} 1T & + 3T_1 & + 5T_2 & + \ldots + (2n+1)\, T_n \\ & - \frac{1T}{2!} & - \frac{3T_1}{2!} & - \frac{(2n-1)\, T_{n-1}}{2!} \\ & & + \frac{1T}{4!} & + \frac{(2n-3)\, T_{n-2}}{4!} \\ & & & \ldots\ldots\ldots \\ & & & \pm \frac{1.T}{(2n)!} \end{array} \begin{array}{l} x^{2n} + \ldots\ldots \end{array}$$

(mit den Faktoren x^2, x^4, … x^{2n} hinter den jeweiligen Spalten.)

Wenn man daher

$$sec\, x = R + R_1 x^2 + R_2 x^4 + R_3 x^6 + \ldots + R_n x^{2n} + \ldots\ldots$$

setzt, so findet man

$$R_n = (2n+1)\, T_n - \frac{2n-1}{2!} T_{n-1} + \frac{2n-3}{4!} T_{n-2} - \frac{2n-5}{6!} T_{n-3} + \ldots \pm \frac{1}{(2n)!} T.$$

Daher wird

$$R = T$$

$$R_1 = 3T_1 - \frac{1}{2!} T$$

$$R_2 = 5T_2 - \frac{3}{2!} T_1 + \frac{1}{4!} T$$

$$R_3 = 7T_3 - \frac{5}{2!} T_2 + \frac{3}{4!} T_1 - \frac{1}{6!} T$$

u. s. w.

§. 510.

Ueber die Lehre von den wiederkehrenden Reihen kann man nachlesen:

Euler, angef. Einleitung, 1. Buch, 13. Kap. S. 237. u. f.

de la Grange, Recherches sur la manière de former des Tables des Planètes d'après les seules observations. Mém. de l'acad. de Paris. année 1772. I. Partie. S. 513. u. f.

de la Grange, Recherches sur les suites recurrentes. Mém. de l'acad. de Berlin. année 1775. S. 183. u. f.

de la Grange, sur l'expression du terme général des séries recurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales. Mém. de l'acad. de Berlin, 1792 *et* 1793. S. 247. u. f.

Trembley, Essai sur la manière de trouver le terme général des séries recurrentes. Mém. de l'acad. de Berlin, 1797. S. 84. u. f.

Zwölftes Kapitel.

Von den Faktorenfolgen oder Fakultäten, mit ganzen Exponenten.

---

§. 511.

Der §. 6. gegebenen Erklärung gemäß, ist, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, die Faktorenfolge

$$a^{n;h} = a(a+h)(a+2h)(a+3h)\ldots.(a+nh-h)$$

wo $a(a+h)\ldots.(a+nh-h)$ die Entwickelung von $a^{n;h}$ heißt. Ferner ist auch

$$a^{n;\pm h} = a(a\pm h)(a\pm 2h)\ldots.(a\pm nh\mp h).$$

also $a^{3;\pm h} = a(a\pm h)(a\pm 2h)$; $a^{2;\pm h} = a(a\pm h)$ und

$$(I)\quad a^{1;\pm h} = a.$$

In der obersten Reihe $a = h = 1$ gesetzt, giebt nach der §. 6. angenommenen Bezeichnung

$$(II)\quad 1^{n;1} = 1.2.3.4\ldots.n = n!$$

Bedeutet a die Grundzahl, h die Differenz, n den Exponenten, und N den letzten Faktor einer Faktorenfolge, so wird

$$(III)\begin{cases} N = a + nh - h \\ a = N - nh + h \\ h = \dfrac{N-a}{n-1} \text{ und} \\ n = \dfrac{N-a}{h} + 1. \end{cases}$$

Hier wird vorausgesetzt, daß a und h jede mögliche ganze oder gebrochene Zahl bedeuten können; der Exponent n muß aber eine positive ganze Zahl seyn. Welche Ausdrücke für negative oder gebrochene Exponenten entstehen, soll in der Folge entwickelt werden.

Wenn die Differenz h negativ wird und die Grundzahl a bleibt positiv, so kann in der Entwickelung von $a^{n;-h}$ ein Faktor $= 0$ werden, wenn h ein Faktor von a ist. Unter dieser

Voraussetzung erhält man

$$(IV) \quad a^{n;-h} = 0,$$

wenn $a < nh$ und h ein Faktor von a ist. Aehnliche Folgerungen entstehen für eine negative Basis und positive Differenz.

Im Allgemeinen ist noch zu bemerken, daß die Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, aus einem Produkte von eben so viel gleichen Faktoren bestehen, als der Exponent Einheiten hat. Dagegen enthält eine Faktorenfolge zwar eben so viel Faktoren als der Exponent derselben Einheiten hat, aber diese Faktoren sind ungleich und Glieder einer arithmetischen Reihe. Hieraus übersieht man wie weit Potenzen und Faktorenfolgen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, mit einander übereinstimmen. Auch kann man die Faktorenfolgen als Potenzen einer höhern Klasse ansehen, welche, wenn man ihre Differenz $= 0$ setzt, in gewöhnliche Potenzen übergehen.

§. 512.

Schreibt man die Faktorenfolge in umgekehrter Ordnung, so wird

$$a^{n;\pm h} = (a \pm nh \mp h)\,(a \pm nh \mp 2h) \ldots . (a \pm h)\; a = (a \pm nh \mp h)^{n;\mp h},$$

oder durch h^n dividirt

$$\frac{a^{n;\pm h}}{h^n} = \left(\frac{a}{h} \pm n \mp 1\right)\left(\frac{a}{h} \pm n \mp 2\right) \ldots . \left(\frac{a}{h} \pm 1\right) a = \left(\frac{a}{h} \pm n \mp 1\right)^{n;\mp 1}$$

folglich

$$(I) \quad a^{n;\pm h} = (a \pm nh \mp h)^{n;\mp h}, \text{ oder}$$

$$(II) \quad a^{n;\mp h} = (a \mp nh \pm h)^{n;\pm h}$$

$$(III) \quad a^{n;\pm h} = h^n . \left(\frac{a}{h} \pm n \mp 1\right)^{n;\mp 1}.$$

Hierin $a \pm h$ statt a gesetzt, giebt

$$(IV) \quad (a \pm h)^{n;\pm h} = (a \pm nh)^{n;\mp h}$$

$$(V) \quad (a \pm h)^{n;\pm h} = h^n . \left(\frac{a}{h} \pm n\right)^{n;\mp 1}.$$

Es ist

$$a^{n;\pm h} = a\,(a \pm h)\,(a \pm 2h) \ldots . . (a \pm nh \mp h)$$

$$= \frac{ab(ab \pm bh) \ldots . (ab \pm nbh \mp bh)}{b^n}$$

$$= a^n . \frac{b\left(b \pm \frac{bh}{a}\right) \ldots . . \left(b \pm n\frac{bh}{a} \mp \frac{bh}{a}\right)}{b^n}$$

$$= \frac{a^n}{b^n} . b^{n;\pm\frac{bh}{a}} \text{ folglich}$$

$$(VI) \quad a^{n;\pm h} = \frac{a^n}{b^n} . b^{n;\pm\frac{bh}{a}}.$$

Man kann daher die Grundzahl a einer jeden Faktorenfolge in die Grundzahl b verwandeln.

Für $a = -a$, und wenn dann $b = a$ gesetzt wird, erhält man auch

$$(VII) \quad (-a)^{n;\pm h} = (-1)^n . a^{n;\mp h}.$$

Ferner

Ferner $\frac{ak}{h}$ statt b in (VII) gesetzt, giebt

$$(VIII) \quad a^{n|\pm h} = \frac{h^n}{k^n} \left(\frac{ak}{h}\right)^{n|\pm k}$$

Für $k = 1$ und $k = \frac{h}{a}$ wird

$$a^{n|\pm h} = h^n \left(\frac{a}{h}\right)^{n|\pm 1} \text{ und}$$

$$a^{n|\pm h} = a^n \cdot 1^{n|\pm \frac{h}{a}}.$$

Noch erhält man für $h = 1$

$$a^{n|\pm 1} = \frac{1}{k^n} (ak)^{n|\pm k}.$$

Die Differenz h einer jeden Faktorenfolge läßt sich daher in jede gegebene verwandeln.

Es ist

$$a^{n+m|\pm h} = a(a \pm h) \ldots (a \pm nh \mp h) \cdot (a \pm nh) \ldots (a \pm (n+m)h \mp h) = a^{n|\pm h} \cdot (a \pm nh)^{m|\pm h},$$

daher

$$(IX) \quad a^{n+m|\pm h} = a^{n|\pm h} \cdot (a \pm nh)^{m|\pm h}.$$

Hierin m mit n und n mit m vertauscht, giebt

$$(X) \quad a^{n+m|\pm h} = a^{m|\pm h} \cdot (a \pm mh)^{n|\pm h}.$$

Die beiden letzten Gleichungen mit einander verbunden, geben

$$(XI) \quad a^{n|\pm h} \cdot (a \pm nh)^{m|\pm h} = a^{m|\pm h} \cdot (a \pm mh)^{n|\pm h}.$$

Hierin $a \mp nh$ statt a gesetzt, giebt

$$(XII) \quad a^{m|\pm h} (a \mp nh)^{n|\pm h} = (a \mp nh)^{m|\pm h} (a \pm mh \mp nh)^{n|\pm h}.$$

Ferner in (XI) $a \mp nh \pm h$ statt a gesetzt, und dann die Faktorenfolgen, welche den Exponenten n haben, nach (III) verwandelt, giebt

$$(XIII) \quad a^{n|\mp h} (a \pm h)^{m|\pm h} = (a \mp nh \pm h)^{m|\pm h} (a \pm mh)^{n|\mp h}.$$

In (IX) und (X) werde $m = 1$ gesetzt, so wird wegen (I)

$$(XIV) \quad \begin{cases} a^{n+1|\pm h} = (a \pm nh)\, a^{n|\pm h} \\ a^{n+1|\pm h} = a\, (a \pm h)^{n|\pm h} \end{cases}$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen

$$(XV) \quad (a \pm nh)\, a^{n|\pm h} = a\, (a \pm h)^{n|\pm h}.$$

Es ist $a^{n|\pm h} = a(a \pm h) \ldots (a \pm nh \mp 2h)(a \pm nh \mp h)$, oder

$$\frac{(a \mp h)\, a^{n|\pm h}}{a \pm nh \mp h} = (a \mp h)\, a(a \pm h) \ldots (a \pm nh \mp 2h) = (a \mp h)^{n|\pm h},$$

folglich

$$(XVI) \quad a^{n|\pm h} = \frac{a \pm nh \mp h}{a \mp h} \cdot (a \mp h)^{n|\pm h}.$$

In (IX) $m - n$ statt m gesetzt, giebt

$$a^{m|\pm h} = a^{n|\pm h} (a \pm nh)^{m-n|\pm h}, \text{ oder}$$

$$(XVII) \quad a^{n|\pm h} = \frac{a^{m|\pm h}}{(a \pm nh)^{m-n|\pm h}}.$$

Hierin $a \mp nh$ statt a gesetzt, giebt

$$(XVIII)\quad a^{m-n;\pm h} = \frac{(a \mp nh)^{m;\pm h}}{(a \mp nh)^{n;\pm h}},$$

oder, wegen (XII)

$$(XIX)\quad a^{m-n;\pm h} = \frac{a^{m;\pm h}}{(a \pm mh \mp nh)^{n;\pm h}}.$$

In (XVIII) $n = 1$ und dann n statt m gesetzt, giebt, wegen (I),

$$(XX)\quad a^{n-1;\pm h} = \frac{(a \mp h)^{n;\pm h}}{a \mp h}.$$

In (XIV) werde $n - 1$ statt n gesetzt, so ist

$a^{n;\pm h} = (a \pm nh \mp h) \,.\, a^{n-1;\pm h}$. Ferner nach (XX)

$(a \mp h)^{n;\pm h} = (a \mp h) \,.\, a^{n-1;\pm h}$, folglich

$$(XXI)\quad a^{n;\pm h} - (a \mp h)^{n;\pm h} = \pm nh \,.\, a^{n-1;\pm h}.$$

Nach XVI ist:

$(a \pm h)^{n;\pm h} = \frac{a \pm nh}{a} \,.\, a^{n;\pm h}$, und weil

$a^{n;\pm h} = \frac{a}{a} \,.\, a^{n;\pm h}$, so wird

$$(XXII)\quad (a \pm h)^{n;\pm h} - a^{n;\pm h} = \pm \frac{nh}{a} \,.\, a^{n;\pm h},$$

oder wegen $a^{n;\pm h} = a(a \pm h)^{n-1;h}$

$(a \pm h)^{n;+h} - a^{n;\pm h} = \pm nh(a \pm h)^{n-1;\pm h}$,

oder, weil $a(a \pm h)^{n;\pm h} - a \,.\, a^{n;\pm h} = \pm nh a^{n;\pm h}$, so wird auch, wegen (XIV),

$a^{n+1;\pm h} - a \,.\, a^{n;\pm h} = \pm nh a^{n;\pm h}$.

§. 513.

Es ist $a^{2n;\pm h} = a(a \pm h)(a \pm 2h) \ldots (a \pm 2nh \mp 2h)(a \pm 2nh \mp h)$

$$= \begin{cases} a(a \pm 2h) \ldots (a \pm 2nh \mp 2h) = a^{n;\pm 2h} \\ (a \pm h)(a \pm 3h) \ldots (a \pm 2nh \mp h) = (a \pm h)^{n;\pm 2h} \end{cases}$$

folglich

$$(XXIII)\quad a^{2n;\pm h} = a^{n;\pm 2h} \,.\, (a \pm h)^{n;\pm 2h}.$$

Eben so findet man

$$(XXIV)\quad a^{3n;\pm h} = a^{n;\pm 3h} \,.\, (a \pm h)^{n;\pm 3h} \,.\, (a \pm 2h)^{n;\pm 3h}.$$

In (XII) werde n statt m gesetzt, so erhält man

$$(XXV)\quad a^{2n;\pm h} = a^{n;\pm h} \,.\, (a \pm nh)^{n;\pm h}$$

und wenn $2n$ statt m in (XII) gesetzt wird:

$a^{3n;\pm h} = a^{2n;\pm h} \,.\, (a \pm 2nh)^{n;\pm h}$, oder

$$(XXVI)\quad a^{3n;\pm h} = a^{n;\pm h} \,.\, (a \pm nh)^{n;\pm h} \,.\, (a \pm 2nh)^{n;\pm h}.$$

Wird (XXIII) mit $a \pm 2nh$, und (XXIV) mit $a \pm 3nh$ multiplizirt, so erhält man wegen (XIV)

(*XXVII*) $a^{2n+1|\pm h} = a^{n+1|\pm 2h} \cdot (a \pm h)^{n|\pm 2h}$

(*XXVIII*) $a^{3n+1|\pm h} = a^{n+1|\pm 3h} \cdot (a \pm h)^{n|\pm 3h} \cdot (a \pm 2h)^{n|\pm 3h}$

In (*XIV*) werde zuerst $2n$ statt n, dann $3n$ statt n gesetzt, so findet man

(*XXIX*) $a^{2n+1|\pm h} = (a \pm 2nh) \cdot a^{2n|\pm h}$ und

(*XXX*) $a^{3n+1|\pm h} = (a \pm 3nh) \cdot a^{3n|\pm h}$

wo ebenfalls durchgängig entweder nur die oberen, oder nur die unteren Zeichen gelten.

§. 514.

In $a^{n|\pm h} = a(a \pm h)(a \pm 2h)(a \pm 3h) \ldots (a \pm nh \mp h)$ werde $a = 0$ gesetzt, so findet man

(*XXXI*) $0^{n|\pm h} = 0$,

und wenn in der vorstehenden Faktorenfolge $h = 0$ gesetzt wird

(*XXXII*) $a^{n|0} = a^n$.

In (*IX*) werde $n = 0$ gesetzt, so erhält man

$$a^{0|\pm h} = \frac{a^{m|\pm h}}{a^{m|\pm h}}, \text{ oder}$$

(*XXXIII*) $a^{0|\pm h} = 1$.

Im vorstehenden Ausdruck $h = 0$ oder $a = 0$, oder a und $h = 0$ gesetzt, giebt

(*XXXIV*) $a^{0|0} = 1$

(*XXXV*) $0^{0|\pm h} = 1$

(*XXXVI*) $0^{0|0} = 1$.

In (*III*) $m + 1$ statt a und $h = 1$ gesetzt, giebt für die oberen Zeichen

$$(m+1)^{n|1} = (m+n)^{n|-1}.$$

Hierin $m = 0$, giebt

(*XXXVII*) $1^{n|1} = n^{n|-1} = [n]! = n!$

und hierin $n = 0$, giebt $1^{0|1} = [0]!$, oder wegen (*XXXIII*)

(*XXXVIII*) $[0]! = 0! = 1$.

In (*XII*) $a = h = 1$ gesetzt, giebt nach den oberen Zeichen:

$$1^{n+m|1} = 1^{m|1} \cdot (m+1)^{n|1}, \text{ oder}$$

$$(m+1)^{n|1} = \frac{[n+m]!}{[m]!}, \text{ daher}$$

(*XXXIX*) $(m+1)^{n|1} = (m+n)^{n|-1} = \frac{[n+m]!}{[m]!}$.

1, 2, 3, statt m gesetzt, giebt

$$2^{n|1} = (n+1)^{n|-1} = [n+1]!$$

$$3^{n|1} = (n+2)^{n|-1} = \frac{[n+2]!}{2}$$

$$4^{n|1} = (n+3)^{n|-1} = \frac{[n+3]!}{[3]!}.$$

n, $2n$, $3n$ statt m in (XXXIX) gesetzt, giebt

$$(n+1)^{n;1} = (2n)^{n;-1} = \frac{[2n]!}{[n]!}$$

$$(2n+1)^{n;1} = (3n)^{n;-1} = \frac{[3n]!}{[2n]!}$$

$$(3n+1)^{n;1} = (4n)^{n;-1} = \frac{[4n]!}{[3n]!}.$$

§. 515.

Wird $m = 0$ in (XIX) gesetzt, so erhält man

$$a^{-n;\pm h} = \frac{(a \mp nh)^{0;\pm h}}{(a \mp nh)^{n;\pm h}},$$

oder wegen (XXXIII)

$$(XL) \quad a^{-n;\pm h} = \frac{1}{(a \mp nh)^{n;\pm h}}.$$

In (V) werde $-h$ statt h gesetzt. Dies giebt $(a \mp h)^{n;\mp h} = (a \mp nh)^{n;\pm h}$, daher auch

$$(XLI) \quad a^{-n;\pm h} = \frac{1}{(a \mp h)^{n;\mp h}},$$ oder wegen (XV)

$$(XLII) \quad a^{-n;\pm h} = \frac{a}{a^{n+1;\mp h}}.$$

Hienach findet man aus (XLI) die Entwickelungen für

$$(XLIII) \quad a^{-n;h} = \frac{1}{a-h.a-2h.a-3h\ldots a-nh}$$ und

$$(XLIV) \quad a^{-n;-h} = \frac{1}{a+h.a+2h.a+3h\ldots a+nh},$$

woraus folgt, daß man auch die Entwickelung von Faktorenfolgen, deren Exponenten ganze negative Zahlen sind, darstellen kann. Es ist aber wohl zu bemerken, daß man in den vorstehenden beiden Entwickelungen nicht $+n$ statt $-n$ setzen darf, um daraus die Entwickelung von $a^{n;h}$ zu finden. Nur für a und h gelten diese Abänderungen.

Für $a = 0$ erhält man

$$(XLV) \quad \begin{cases} 0^{-n;\pm h} = \dfrac{1}{(\mp h)^{n;\mp h}} \text{ und} \\ 0^{-n;-h} = \dfrac{1}{1.2.3\ldots n.h^n} = \dfrac{1}{[n]!\,h^n}. \end{cases}$$

Ist h ein Faktor von a und $a < (n+1)h$, so wird nach den Entwickelungen (XLIII) und (XLIV)

$$a^{-n;h} = \frac{1}{0} = \infty \text{ und } (-a)^{-n;-h} = \infty \text{ oder } (\pm a)^{-n;\pm h} = \infty.$$

Ist daher r eine positive ganze Zahl und $r < n+1$, so setze man $a = rh$, alsdann wird

$$(XLVI) \quad (\pm rh)^{-n;\pm h} = \infty.$$

Hierin $r = 1$ und dann $a = \mp h$ in (XLI) gesetzt, giebt

$$(XLVII) \quad \begin{cases} (\pm h)^{-n;\pm h} = \infty \\ (\mp h)^{-n;\pm h} = \dfrac{1}{(\mp 2h)^{n;\mp h}} \end{cases}$$

wo entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gelten.

Für $n = 1$ in (XLI) wird wegen (I) §. 511.

$$(XLVIII)\quad a^{-1;\pm h} = \frac{1}{a \mp h}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren wie §. 512. (VII) und (VIII) findet man.

$$(XLIX)\quad a^{-n;\pm h} = \frac{b^n}{a^n}.\, b^{-n;\pm\frac{bh}{a}}.$$

Hierin $a = -a$ und $b = a$ gesetzt, giebt

$$(-a)^{-n;\pm h} = (-1)^n.\, a^{-n;\mp h}$$

$$(L)\quad a^{-n;\pm h} = \frac{k^n}{h^n}.\left(\frac{ak}{h}\right)^{-n;\pm k}.$$

Hierin $b = k = 1$ gesetzt, giebt

$$a^{-n;\pm h} = \frac{1}{a^n}.\, 1^{-n;\pm\frac{k}{a}} = \frac{1}{h^n}.\left(\frac{a}{h}\right)^{-n;\pm 1};$$

In (XL) $a \pm nh$ statt a gesetzt und den gefundenen Ausdruck mit (XL) verbunden, giebt

$$(LI)\quad \begin{cases} a^{\pm n;h} = \dfrac{1}{(a \pm nh)^{\mp n;h}} \\ a^{\pm n;-h} = \dfrac{1}{(a \mp nh)^{\mp n;-h}}. \end{cases}$$

In (XLI) $a \pm h$ statt a gesetzt und den gefundenen Ausdruck mit (XLI) verbunden, giebt

$$(LII)\quad \begin{cases} a^{\pm n;h} = \dfrac{1}{(a-h)^{\mp n;-h}} \\ a^{\pm n;-h} = \dfrac{1}{(a+h)^{\mp n;h}}. \end{cases}$$

Gleiche Werthe der vorstehenden vier Gleichungen mit einander verbunden und die abwechselnden Zeichen umgekehrt, giebt

$$(a \mp nh)^{\pm n;h} = (a-h)^{\pm n;-h}$$
$$(a \pm nh)^{\pm n;-h} = (a+h)^{\pm n;h}.$$

In die erste Gleichung $a \pm nh$ statt a und in die zweite $a \mp nh$ statt a gesetzt, giebt

$$(LIII)\quad \begin{cases} a^{\pm n;h} = (a \pm nh - h)^{\pm n;-h} \\ a^{\pm n;-h} = (a \mp nh + h)^{\pm n;h}. \end{cases}$$

Nach (XVIII) ist

$$(a \mp nh)^{n;\pm h} = \frac{(a \mp nh)^{m;\pm h}}{a^{m-n;\pm h}}, \text{ daher wegen } (XL)$$

$$= \frac{1}{a^{-n;\pm h}}, \text{ oder}$$

$$a^{m-n;\pm h} = a^{-n;\pm h}\,(a \mp nh)^{m;\pm h}; \text{ aber } (IX)$$

$$a^{m+n;\pm h} = a^{n;\pm h}\,(a \pm nh)^{m;\pm h}, \text{ folglich}$$

$$(LIV)\quad a^{m\pm n;h} = a^{\pm n;h}\,(a \pm nh)^{m;h}$$

$$(LV)\quad a^{m\pm n;-h} = a^{\pm n;-h}\,(a \mp nh)^{m;-h},$$

oder auch wegen (II) §. 512.

$$(LVI)\quad a^{\pm n;-h} = \frac{(a \mp nh - mh + h)^{m \pm n;h}}{(a \mp nh - mh + h)^{m;h}}.$$

Ferner ist nach (XIX)

$$(a \pm mh \mp nh)^{n;\pm h} = \frac{a^{m;\pm h}}{a^{m-n;\pm h}},$$

oder, weil nach (XL)

$$(a \pm mh \mp nh)^{n;\pm h} = \frac{1}{(a \pm mh)^{-n;\pm h}}, \text{ daher}$$

$$a^{m-n;\pm h} = a^{m;\pm h}(a \pm mh)^{-n;\pm h}; \text{ aber } (X)$$

$$a^{m+n;\pm h} = a^{m;\pm h}(a \pm mh)^{n;\pm h}, \text{ folglich}$$

$$(LVII)\quad a^{m \pm n;h} = a^{m;h}(a + mh)^{\pm n;h}$$

$$(LVIII)\quad a^{m \pm n;-h} = a^{m;-h}(a - mh)^{\pm n;-h}.$$

Es ist $a^{-m-n;h} = \dfrac{1}{a-h \ldots a-nh.\, a-nh-h \ldots a-(n+m)h}$, oder

$$a^{-m-n;h} = a^{-n;h}.\,(a - nh)^{-m;h}.$$

Eben so findet man

$$a^{-m-n;-h} = a^{-n;-h}.\,(a + nh)^{-m;-h}, \text{ folglich}$$

$$(LIX)\quad a^{-m-n;\pm h} = a^{-n;\pm h}(a \mp nh)^{-m;\pm h}.$$

Hierin m mit n und n mit m vertauscht, giebt

$$a^{-m-n;\pm h} = a^{-m;\pm h}(a \mp mh)^{-n;\pm h},$$

und wenn man diesen Ausdruck mit dem vorstehenden verbindet

$$(LX)\quad a^{-n;\pm h}(a \mp nh)^{-m;\pm h} = a^{-m;\pm h}(a \mp mh)^{-n;\pm h}.$$

In (LIV), (LV), (LVII), (LVIII) und (LIX) werde $m = 1$ gesetzt, so findet man wegen (I) und (XLIX)

$$(LXI)\quad a^{1 \pm n;h} = (a \pm nh).\,a^{\pm n;h} = a.\,(a + h)^{\pm n;h}$$

$$(LXII)\quad a^{1 \pm n;-h} = (a \mp nh).\,a^{\pm n;-h} = a.\,(a - h)^{\pm n;-h}$$

$$(LXIII)\quad a^{-1-n;\pm h} = \frac{a^{-n;\pm h}}{a \mp nh \mp h} = \frac{(a \mp h)^{-n;\pm h}}{a \mp h}.$$

Aus (LXI) wird $a^{\pm n;h} = \dfrac{a.\,(a + h)^{\pm n;h}}{a \pm nh}$, und aus (L), wenn man die abwechselnden Zeichen umkehrt,

$$a^{\mp n;-h} = \frac{1}{(a + h)^{\pm n;h}}, \text{ folglich}$$

$$(LXIV)\quad a^{\pm n;h}.\,a^{\mp n;-h} = \frac{a}{a \pm nh}.$$

Nach (LIV) und (LVII) ist für die unteren Zeichen

$$a^{m-n;h} = a^{-n;h}(a - nh)^{m;h} = a^{m;h}(a + mh)^{-n;h}.$$

Hiemit (XI) für die oberen Zeichen verbunden, giebt

$$(LXV)\quad a^{m \pm n;h} = a^{\pm n;h}(a \pm nh)^{m;h} = a^{m;h}(a + mh)^{\pm n;h}.$$

Hierin $-h$ statt h gesetzt, giebt

$$a^{\pm n;-h}(a \mp nh)^{m;-h} = a^{m;-h}(a - mh)^{\pm n;-h},$$

oder wenn man $a + mh$ statt a setzt und die Gleichung in umgekehrter Ordnung schreibt

$$a^{\pm n;-h}(a+mh)^{m;-h} = (a+mh \mp nh)^{m;-h}(a+mh)^{\pm n;-h}.$$

Nach (*II*) §. 512. ist aber $a^{m;-h} = (a - mh + h)^{m;h}$, daher erhält man auch

$$(LXVI)\quad a^{\pm n;-h}(a+h)^{m;h} = (a \mp nh + h)^{m;h}(a+mh)^{\pm n;-h},$$

wo durchgängig entweder nur die oberen oder die unteren Zeichen gelten.

Nach (*LXIII*) ist

$$a^{-n;\pm h} = (a \mp nh \mp h)\,.\,a^{-n-1;\pm h} \text{ und}$$

$$(a \mp h)^{-n;\pm h} = (a \mp h)\,.\,a^{-n-1;\pm h}, \text{ also}$$

$$a^{-n;\pm h} - (a \mp h)^{-n;\pm h} = \mp\, nh\,.\,a^{-n-1;\pm h}, \text{ daher wegen } (XXI)$$

$$(LXVII)\quad \begin{cases} a^{\pm n;h} - (a-h)^{\pm n;h} = \pm\, nh\,.\,a^{\pm n-1;h} \\ a^{\pm n;-h} - (a+h)^{\pm n;-h} = \mp\, nh\,.\,a^{\pm n-1;-h}. \end{cases}$$

§. 516.

Die aufeinander folgenden Glieder der Faktorenfolge

$1^{r;h} = 1\,(1+h)\,(1+2h)\,(1+3h)\ldots(1+rh-h)$ mit einander multiplizirt, geben offenbar eine Reihe von der Form $A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots$ wo $A, B, C, \ldots$ noch näher zu bestimmende Koeffizienten sind, welche nur von r und nicht von h abhängen. Zur Bestimmung des Gesetzes nach welchem diese Koeffizienten fortschreiten oder zur Entwickelung der entsprechenden **Koeffizientengleichung** setze man

$$1^{r;h} = {}^rF + {}^rF_1 h + {}^rF_2 h^2 + {}^rF_3 h^3 + \ldots + {}^rF_n h^n + \ldots [I].$$

Hier ist die Bezeichnung der Koeffizienten mit dem Zeiger r deshalb gewählt worden, weil für einen andern Werth des Exponenten r, auch die Koeffizienten andere Werthe erhalten.

In die vorstehende Reihe $1 + r$ statt r gesetzt, giebt

$$1^{1+r;h} = {}^{1+r}F + {}^{1+r}F_1 h^1 + {}^{1+r}F_2 h^2 + \ldots + {}^{1+r}F_n h^n + \ldots [II]$$

Nun ist $1^{1+r;h} = (1+rh)\,.\,1^{r;h}$ (§. 512. *XIV*).

Wird daher die Reihe [*I*] mit $1 + rh$ multiplizirt, so erhält man

$$1^{1+r;h} = {}^rF + \left.\begin{matrix} {}^rF_1 \\ + r\,{}^rF \end{matrix}\right| h + \left.\begin{matrix} {}^rF_2 \\ + r\,{}^rF_1 \end{matrix}\right| h^2 + \ldots + \left.\begin{matrix} {}^rF_n \\ + r\,{}^rF_{n-1} \end{matrix}\right| h^n + \ldots$$

Diese Reihe nach §. 52. mit [*II*] verglichen, giebt

$$(I)\quad {}^{1+r}F_n = {}^rF_n + r\,.\,{}^rF_{n-1}.$$

Mittelst dieser einfachen Koeffizientengleichung, lassen sich die Koeffizienten für höhere Exponenten aus den unmittelbar vorhergehenden niedrigeren finden.

In der Reihe

$1^{r;h} = 1\,(1+h)\,(1+2h)\ldots(1+nh-h) = {}^rF + {}^rF_1 h + {}^rF_2 h^2 + \ldots$ ist ${}^rF_{r-1} h^{r-1}$ das letzte Glied, weil die höchste Potenz von h bei h^{r-1} abbricht. Es ist daher ${}^rF_r;\ {}^rF_{r+1};\ {}^rF_{r+2};\ \ldots = 0$, oder

$$(II)\quad {}^rF_r = 0.$$

Wird in der Reihe [*I*] zuerst $h = 0$ und dann auch $r = 0$ gesetzt, so erhält man wegen $1^{r;0} = 1$ und $1^{0;0} = 1$.

$$(III)\quad {}^rF = 1 \text{ und } F = 1.$$

Nun setze man nach einander 1, 2, 3 ... statt r, und dann 1, 2, 3 ... statt n in (I), so erhält man wegen (II) und (III)

$$
\begin{aligned}
{}^2F_1 &= 0 + 1\,.\,{}^1F = 1\\
{}^3F_1 &= {}^2F_1 + 2\,.\,{}^2F = 3\\
{}^3F_2 &= 0 + 2\,.\,{}^2F_1 = 2\\
{}^4F_1 &= {}^3F_1 + 3\,.\,{}^3F = 6\\
{}^4F_2 &= {}^3F_2 + 3\,.\,{}^3F_1 = 11\\
{}^4F_3 &= 0 + 3\,.\,{}^3F_2 = 6
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Hienach entsteht folgende Tafel, welche, so weit man will, leicht fortgesetzt werden kann. Denn wenn man irgend eine Zahl dieser Tafel mit dem zugehörigen Exponenten r multiplizirt und dazu die rechts danebenstehende Zahl addirt, so erhält man dadurch die unmittelbar unter letzterer stehende Zahl.

Tafel für die Koeffizienten der Faktorenfolgen mit positiven Exponenten.

r	${}^rF$	${}^rF_1$	${}^rF_2$	${}^rF_3$	${}^rF_4$	${}^rF_5$	${}^rF_6$	${}^rF_7$	${}^rF_8$	${}^rF_9$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0
4	1	6	11	6	0	0	0	0	0	0
5	1	10	35	50	24	0	0	0	0	0
6	1	15	85	225	274	120	0	0	0	0
7	1	21	175	735	1 624	1 764	720	0	0	0
8	1	28	322	1 960	6 769	13 132	13 068	5 040	0	0
9	1	36	546	4 536	22 449	67 284	118 124	109 584	40 320	0
10	1	45	870	9 450	63 273	269 325	723 680	1 172 700	1 026 576	362 880

r	${}^rF$	${}^rF_1$	${}^rF_2$	${}^rF_3$	${}^rF_4$	${}^rF_5$	${}^rF_6$	${}^rF_7$
11	1	55	1 320	18 150	157 773	902 055	3 416 930	8 409 500
12	1	66	1 925	32 670	357 423	2 637 558	13 339 535	45 995 730
13	1	78	2 717	55 770	749 463	6 926 634	44 990 231	206 070 150
14	1	91	3 731	91 091	1 474 473	16 669 653	135 036 473	790 943 153
15	1	105	5 005	143 325	2 749 747	37 312 275	368 411 615	2 681 453 775
16	1	120	6 580	218 400	4 899 622	78 558 480	928 095 740	8 207 627 980
17	1	136	8 500	323 680	8 814 022	156 952 432	2 185 031 420	. . . . .
18	1	153	10 812	468 180	14 316 582	306 790 806	4 853 222 764	. . . . .
19	1	171	13 566	662 796	22 743 822	564 489 282	. . . . . .	. . . . .
20	1	190	16 815	920 550	35 336 946	996 621 900	. . . . . .	. . . . .

r	${}^{r}F_8$	${}^{r}F_9$	${}^{r}F_{10}$	${}^{r}F_{11}$	${}^{r}F_{12}$
11	12 751 576	10 628 640	3 628 800	0	0
12	105 256 076	150 895 976	120 543 840	39 916 800	0
13	657 204 836	1 413 968 888	1 931 295 552	1 486 442 880	479 001 600
14	3 336 116 786	9 957 631 756	20 312 891 096	20 799 398 400	19 802 759 040
15	14 409 320 928	56 663 266 760	159 719 735 680	2 256 875 697 920	210 994 336 640

Es läßt sich nun jede Faktorenfolge mit Hülfe dieser Tafel nach den Potenzen ihrer Differenz entwickeln. Man setze daher $\frac{h}{a}$ statt h in $[I]$, multiplizire durchgängig mit a^r, so erhält man, wegen $a^r \cdot 1^{r|\frac{h}{a}} = a^{r|h}$ (§. 512. *VIII.*) und ${}^{r}F = 1$.

$$(IV)\quad a^{r|h} = a^r + {}^{r}F_1 a^{r-1} h + {}^{r}F_2 a^{r-2} h^2 + \ldots + {}^{r}F_n a^{r-n} h^n + \ldots + {}^{r}F_{r-1} \cdot a h^{r-1}.$$

Beispiel. Die Faktorenfolge

$$1\,(1+h)\,(1+2h)\,(1+3h)\,(1+4h)\,(1+5h) = 1^{6|h}$$

nach den Potenzen von h geordnet, aufzulösen. Hier wird

$$1^{6|h} = 1 + {}^{6}F_1 h + {}^{6}F_2 h^2 + {}^{6}F_3 h^3 + {}^{6}F_4 h^4 + {}^{6}F_5 h^5,$$

oder, wenn die Koeffizienten aus vorstehender Tafel genommen werden,

$$1^{6|h} = 1 + 15h + 85h^2 + 225h^3 + 274h^4 + 120h^5.$$

Wäre h negativ, so erhält die Reihe abwechselnde Zeichen und man findet:

$$(V)\quad a^{r|-h} = a^r - {}^{r}F_1 a^{r-1} h + {}^{r}F_2 a^{r-2} h^2 - {}^{r}F_3 a^{r-3} h^3 + \ldots \mp {}^{r}F_{r-1} a h^{r-1},$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

§. 517.

Wegen der Wichtigkeit und der mancherlei Anwendungen, deren die gefundenen Koeffizienten der entwickelten Faktorenfolgen fähig sind, wird es nützlich seyn, noch eine Vergleichung derselben anzuführen.

Es ist $1^{r+1|h} = (1+h)^{r|h}$ (§. 512 *XIV.*) daher

$$1^{r+1|h} = {}^{r+1}F + {}^{r+1}F_1 h + {}^{r+1}F_2 h^2 + \ldots + {}^{r+1}F_{n+1} h^{n+1} + \ldots \text{ und}$$

$$(1+h)^{r|h} = {}^{r}F(1+h)^r + {}^{r}F_1 (1+h)^{r-1} h + \ldots + {}^{r}F_n (1+h)^{r-n} h^n + \ldots$$

oder wenn man die Binomien nach dem binomischen Lehrsatze auflöst und nach den Potenzen von h ordnet:

$$(1+h)^{r|h} = {}^{r}F + \begin{array}{r|r|r|l|l} {}^{r}F.r_1 & {}^{r}F.r_2 & {}^{r}F.r_3 & \ldots + {}^{r}F.r_{n+1} & \\ {}^{r}F_1.1 & {}^{r}F_1(r-1) & {}^{r}F_1(r-1)_2 & {}^{r}F_1(r-1)_n & \\ & {}^{r}F_2\;1 & {}^{r}F_2(r-2) & {}^{r}F_2(r-2)_{n-1} & \\ & & {}^{r}F_3\;1 & \ldots\ldots & \\ & & & {}^{r}F_{n-1}(r-n+1)_2 & \\ & & & {}^{r}F_n\,(r-n) & \\ & & & {}^{r}F_{n+1}\;1 & \end{array} \begin{array}{l} h + \ldots \end{array}$$

Column multipliers as printed: $h + \ldots \;|\; h^2 + \ldots \;|\; h^3 + \ldots \;|\; h^{n+1} + \ldots$

Vergleicht man diese Reihe mit der obersten nach §. 52., so wird

$${}^{r+1}F_{n+1} = {}^{r}F_{n+1} + (r-n)\,{}^{r}F_{n} + (r-n+1)_2\,{}^{r}F_{n-1} + \ldots\ldots + r_{n+1}\,{}^{r}F.$$

Nach §. 516. (I) ist aber ${}^{r+1}F_{n+1} = {}^{r}F_{n+1} + r\,{}^{r}F_{n}$. Diesen Ausdruck von der darüber stehenden Reihe abgezogen giebt, wegen ${}^{r}F = 1$

$$n\,{}^{r}F_n = r_{n+1} + (r-1)_n\,{}^{r}F_1 + (r-2)_{n-1}\,{}^{r}F_2 + (r-3)_{n-2}\,{}^{r}F_3 + \ldots + (r-n+1)_2\,{}^{r}F_{n-1}.$$

Hierin nach einander 1, 2, 3 .... statt n gesetzt, giebt

$$1.\,{}^{r}F_1 = r_2$$
$$2.\,{}^{r}F_2 = r_3 + (r-1)_2\,{}^{r}F_1$$
$$3.\,{}^{r}F_3 = r_4 + (r-1)_3\,{}^{r}F_1 + (r-2)_2\,{}^{r}F_2$$
$$4.\,{}^{r}F_4 = r_5 + (r-1)_4\,{}^{r}F_1 + (r-2)_3\,{}^{r}F_2 + (r-3)_2\,{}^{r}F_3$$
$$5.\,{}^{r}F_5 = r_6 + (r-1)_5\,{}^{r}F_1 + (r-2)_4\,{}^{r}F_2 + (r-3)_3\,{}^{r}F_3 + (r-4)_2\,{}^{r}F_4$$

. . . .

Hienach findet man

$${}^{r}F_1 = r_2$$
$${}^{r}F_2 = \frac{3r-1}{4}.r_3$$
$${}^{r}F_3 = \frac{r^2-r}{2}.r_4$$
$${}^{r}F_4 = \frac{15r^3-30r^2+5r+2}{48}.r_5$$
$${}^{r}F_5 = \frac{3r^4-10r^3+5r^2+2r}{16}.r_6$$

. . . .

Wegen eines allgemeinen Ausdrucks für ${}^{r}F_n$ s. m. §. 650.

§. 518.

Noch entstehen einige merkwürdige Ausdrücke für Faktorenkoeffizienten, welche von wichtigen Folgen sind. Man setze §. 516. (I) $n = r$, so wird, wegen ${}^{r}F_r = 0$ und ${}^{r}F = 1$,

${}^{r+1}F_r = r.{}^{r}F_{r-1}$, daher, wenn 1, 2, 3 ... statt r gesetzt wird

$${}^{2}F_1 = 1.{}^{1}F = 1$$
$${}^{3}F_2 = 2.{}^{2}F_1 = 1.2 = [2]!$$
$${}^{4}F_3 = 3.{}^{3}F_2 = [2]!3 = [3]!$$
$${}^{5}F_4 = 4.{}^{4}F_3 = [3]!4 = [4]!$$
$${}^{6}F_5 = 5.{}^{5}F_4 = [4]!5 = [5]!$$

u. s. w. daher allgemein

$${}^{r+1}F_r = [r]!.$$

Setzt man ferner in (I) §. 516. $r+1$ statt r und r statt n, so wird ${}^{r+2}F_r = {}^{r+1}F_r + (r+1)\,{}^{r+1}F_{r-1}$, oder ${}^{r+2}F_r = [r]! + (r+1)\,{}^{r+1}F_{r-1}$, daher, wenn 1, 2, 3 ... statt r gesetzt wird:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}F_1 &= [1]! + 2\,.\,{}^{2}F = [1]! + 1.2 \\
{}^{4}F_2 &= [2]! + 3\,.\,{}^{3}F_1 = [2]! + [1]!\,3 + 1.2.3 \\
{}^{5}F_3 &= [3]! + 4\,.\,{}^{4}F_2 = [3]! + [2]!\,4 + [1]!\,3.4 + 1.2.3.4 \\
{}^{6}F_4 &= [4]! + 5\,.\,{}^{5}F_3 = [4]! + [3]!\,5 + [2]!\,4.5 + [1]!\,3.4.5 + 1.2.3.4.5 \\
{}^{7}F_5 &= [5]! + 6\,.\,{}^{6}F_4 = [5]! + [4]!\,6 + [3]!\,5.6 + [2]!\,4.5.6 + [1]!\,3.4.5.6 + [6] \\
&= \frac{6[5]!}{6} + \frac{[4]!\,5.6}{5} + \frac{[3]!\,4.5.6}{4} + \frac{[2]!\,3.4.5.6}{3} + \frac{[1]!\,2.3.4.5.6}{2} + \frac{[6]!}{1} \\
&= [6]!\,(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + 1) = [6]!\;{}^{5}\!\!\int\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Um diesen Ausdruck in der erforderlichen Allgemeinheit zu beweisen, setze man voraus, daß derselbe für irgend eine ganze Zahl r gelte und es sey ${}^{r+2}F_r = [r+1]!\;{}^{r}\!\!\int\frac{1}{n+1}$. Nun ist ${}^{r+2}F_r = [r]! + (r+1)\;{}^{r+1}F_{r-1}$ oder hierin $r+1$ statt r gesetzt, giebt

$$
\begin{aligned}
{}^{r+3}F_{r+1} &= [r+1]! + (r+2).\,{}^{r+2}F_r = [r+1]! + (r+2)\,[r+1]!\;{}^{r}\!\!\int\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{[r+2]!}{r+2} + [r+2]!\;{}^{r}\!\!\int\frac{1}{n+1} = [r+2]!\left(\frac{1}{r+2} + {}^{r}\!\!\int\frac{1}{n+1}\right) \text{ oder}
\end{aligned}
$$

$$ {}^{r+3}F_{r+1} = [r+2]!\;{}^{r+1}\!\!\int\frac{1}{n+1}. $$

Dieser Ausdruck entsteht aus ${}^{r+2}F_r\;[r+1]!\;{}^{r}\!\!\int\frac{1}{n+1}$, wenn $r+1$ statt r in denselben gesetzt wird. Ist der Ausdruck daher für r wahr, so gilt er auch für $r+1$. Nun ist derselbe für $r = 1, 2, 3, 4, 5,$ erwiesen, daher gilt er auch für 6, 7, 8, 9, ... und jede noch so große ganze Zahl r.

Hienach erhält man ganz allgemein

$$ (I)\quad {}^{r+2}F_r = [r+1]!\;{}^{r}\!\!\int\frac{1}{n+1}, \text{ oder für } r = n \text{ (§. 352.)} $$

$$ {}^{n+2}F_n = [n+1]!\int\frac{1}{n+1}, \text{ oder} $$

$$ (II)\quad \int\frac{1}{n+1} = \frac{{}^{n+2}F_n}{[n+1]!} = \frac{{}^{n+2}F_n}{{}^{n+2}F_{n+1}}. $$

Hiedurch erhält man einen einfachen Ausdruck mittelst der Faktorenkoeffizienten von der Form ${}^{n+2}F_n$, die Summe jeder harmonischen Reihe zu finden.

Sucht man z. B. die Summe der harmonischen Reihe 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$, so wird

$$ {}^{6}\!\!\int\frac{1}{n+1} = \frac{{}^{8}F_6}{[7]!} = \frac{13068}{1.2.3.4.5.6.7} = 2,59571428\ldots\ldots $$

§. 519.

Zur Entwickelung der Faktorenfolgen mit negativen Exponenten setze man nach §. 515. (*XLIII*)

$$ 1^{-r|h} = \frac{1}{(1-h)(1-2h)(1-3h)\ldots(1-rh)}. $$

Dieser Bruch läßt sich nach §. 235. in die Partialbrüche $\frac{N_1}{1-h}, \ldots\ldots \frac{N_r}{1-rh}$ zerlegen.

Wird nun jeder derselben in eine Reihe aufgelöst, so entsteht nothwendig eine unendliche Reihe von der Form: $A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots$ wo die Koeffizienten $A, B, C, \dots$ lediglich Funkzionen von r und nicht von h sind. Man setze daher

$$1^{-r|h} = {}^{-r}F + {}^{-r}F_1 h + {}^{-r}F_2 h^2 + {}^{-r}F_3 h^3 + \dots + {}^{-r}F_n h^n + \dots \quad [I]$$

oder $1 - r$ statt $-r$ gesetzt, giebt

$$1^{1-r|h} = {}^{1-r}F + {}^{1-r}F_1 h + {}^{1-r}F_2 h^2 + \dots + {}^{1-r}F_n h^n + \dots \quad [II]$$

Nun ist $1^{1-r|h} = (1 - rh) . 1^{-r|h}$ §. 515. (LXI).

Wird daher [I] mit $1 - rh$ multiplizirt, so erhält man

$$1^{1-r|h} = {}^{-r}F + \left.\begin{matrix} {}^{-r}F_1 \\ -r.{}^{-r}F \end{matrix}\right| h + \left.\begin{matrix} {}^{-r}F_2 \\ -r.{}^{-r}F_1 \end{matrix}\right| h^2 + \dots + \left.\begin{matrix} {}^{-r}F_n \\ -\dots-r.{}^{-r}F_{n-1} \end{matrix}\right| h^n + \dots$$

Diese Reihe mit [II] verglichen (§. 52.) giebt für negative Exponenten

(I) ${}^{1-r}F_n = {}^{-r}F_n - r\,{}^{-r}F_{n-1}$, oder auch ${}^{-r}F_n = {}^{1-r}F_n + r.{}^{-r}F_{n-1}$.

Eben diesen Ausdruck hätte man erhalten, wenn $-r$ statt r in (I) §. 516. gesetzt worden wäre.

In [I] werde $h = o$ gesetzt, so ist, wegen $1^{-r|o} = 1$ (§. 515. XLIII.)

(II) ${}^{-r}F = 1$.

Ferner ist $1^{-1|h} = \frac{1}{1-h}$, oder

$${}^{-1}F + {}^{-1}F_1 h + {}^{-1}F_2 h^2 + {}^{-1}F_3 h^3 + \dots = 1 + h + h^2 + h^3 + \dots$$

Vergleicht man die zusammengehörigen Koeffizienten nach §. 52., so wird

$1 = {}^{-1}F = {}^{-1}F_1 = {}^{-1}F_2 = \dots$ oder überhaupt

(III) ${}^{-1}F_n = 1$.

In [I] werde $r = o$ gesetzt. Dies giebt, wegen $1^{o|h} = 1$,

$1 = F + F_1 h + F_2 h^2 + F_3 h^3 + \dots$ also (§. 52.)

$1 = F$ und $o = F_1 = F_2 = F_3 = \dots$ folglich

(IV) $F = 1$ und $F_n = o$.

Hienach lassen sich leicht die nöthigen Koeffizienten berechnen. Denn es ist

$${}^{-1}F = {}^{-1}F_1 = {}^{-1}F_2 = {}^{-1}F_3 = \dots = 1.$$

Für $r = 2$ wird (I) ${}^{-2}F_n = {}^{-1}F_n + 2.{}^{-2}F_{n-1}$, also

$${}^{-2}F_1 = {}^{-1}F_1 + 2.{}^{-2}F = 1 + 2.\ 1 = 3$$
$${}^{-2}F_2 = {}^{-1}F_2 + 2.{}^{-2}F_1 = 1 + 2.\ 3 = 7$$
$${}^{-2}F_3 = {}^{-1}F_3 + 2.{}^{-2}F_2 = 1 + 2.\ 7 = 15$$
$${}^{-2}F_4 = {}^{-1}F_4 + 2.{}^{-2}F_3 = 1 + 2.15 = 31$$

. . . .

Ferner für $r = 3$ wird ${}^{-3}F_n = {}^{-2}F_n + 3.{}^{-3}F_{n-1}$, also

$${}^{-3}F_1 = {}^{-2}F_1 + 3.{}^{-3}F = 3 + 3.\ 1 = 6$$
$${}^{-3}F_2 = {}^{-2}F_2 + 3.{}^{-3}F_1 = 7 + 3.\ 6 = 25$$
$${}^{-3}F_3 = {}^{-2}F_3 + 3.{}^{-3}F_2 = 15 + 3.25 = 90$$
$${}^{-3}F_4 = {}^{-2}F_4 + 3.{}^{-3}F_3 = 31 + 3.90 = 301$$

u. s. w.

Hienach entsteht folgende Tafel, welche leicht, so weit man will, fortgesetzt werden kann, weil dem Ausdruck (I) gemäß, jede Zahl derselben dadurch gefunden wird, daß die unmittelbar links daneben stehende Zahl mit dem zugehörigen Exponenten multiplizirt und dazu die über der gesuchten stehende Zahl addirt wird.

r	^{-r}F	$^{-r}F_1$	$^{-r}F_2$	$^{-r}F_3$	$^{-r}F_4$	$^{-r}F_5$	$^{-r}F_6$	$^{-r}F_7$	$^{-r}F_8$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	7	15	31	63	127	255	511
3	1	6	25	90	301	966	3 025	9 330	28 501
4	1	10	65	350	1 701	7 770	34 105	145 750	611 501
5	1	15	140	1 050	6 951	42 525	246 730	1 379 400	7 508 501
6	1	21	266	2 646	22 827	179 487	1 323 652	. . .	. . .
7	1	28	462	5 880	63 987	627 396	5 715 424	. . .	. . .
8	1	36	750	11 880	159 027	1 899 612	. . .	. . .	. . .
9	1	45	1 155	22 275	359 502	5 135 130	. . .	. . .	. . .
10	1	55	1 705	39 325	752 752	12 662 650	. . .	. . .	. . .

Mittelst dieser Tafel läßt sich nun jede Faktorenfolge mit negativen Exponenten entwickeln. Denn man setze $\frac{h}{a}$ statt h in [I], multiplizire durchgängig mit $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, so erhält man, wegen $a^{-r}.1^{-r|\frac{h}{a}} = a^{-r|h}$ (§. 515. *XLVIII.*)

$$(V) \quad a^{-r|h} = {}^{-r}F\frac{1}{a^r} + {}^{-r}F_1\frac{h}{a^{r+1}} + {}^{-r}F_2\frac{h^2}{a^{r+2}} + \dots + {}^{-r}F_n\frac{h^n}{a^{r+n}} + \dots\dots$$

Beispiel. Wäre die Faktorenfolge $\frac{1}{(1-h)(1-2h)\dots(1-6h)} = 1^{-6|h}$ gegeben, so erhält man

$$1^{-6|h} = {}^{-6}F + {}^{-6}F_1 h + {}^{-6}F_2 h^2 + {}^{-6}F_3 h^3 + {}^{-6}F_4 h^4 + \dots\dots$$

oder nach vorstehender Tafel

$$1^{-6|h} = 1 + 21h + 266h^2 + 2646h^3 + 22827h^4 + \dots\dots$$

§. 520.

Die Tafel für die Koeffizienten der Faktorenfolgen mit negativen Exponenten ist nur eine Erweiterung der Tafel §. 516. für positive Exponenten. Denn da die Koeffizientengleichung (I) §. 516. auch dann noch gilt, wenn r negativ genommen wird, so kann man beide Tafeln auf folgende Weise zusammenstellen, in welchem Falle die Koeffizienten für positive und negative Exponenten auf einerlei Weise, wie §. 516., berechnet werden, wenn man nur beobachtet, daß für ein negatives r die Addition in eine Subtraction verwandelt wird.

r	${}^rF$	${}^rF_1$	${}^rF_2$	${}^rF_3$	${}^rF_4$	${}^rF_5$	${}^rF_6$	${}^rF_7$
— 4	1	10	65	350	1701	7 770	34 105	145 750
— 3	1	6	25	90	301	966	3 025	9 330
— 2	1	3	7	15	31	63	127	255
— 1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	2	0	0	0	0	0
4	1	6	11	6	0	0	0	0
5	1	10	35	50	24	0	0	0
6	1	15	85	225	274	120	0	0
7	1	21	175	735	1624	1 764	720	0
8	1	28	322	1960	6769	13 132	13 068	5 040

§. 521.

Zur Entwickelung eines allgemeinen Ausdrucks für die Koeffizienten der Faktorenfolgen mit negativen Exponenten, setze man

$1^{-r;h} = \frac{1}{(1-h)(1-2h)\ldots(1-rh)}$, so wird (§. 235. 3. Beisp.)

$$[r]!\,1^{-r;h} = \frac{r^r}{1-rh} - \frac{r_1(r-1)^r}{1-rh+h} + \frac{r_2(r-2)^r}{1-rh+2h} - \ldots\ldots \pm \frac{r_2 2^r}{1-2h} \mp \frac{r_1}{1-h}.$$

Aber $\frac{1}{1-xh} = 1 + xh + x^2h^2 + x^3h^3 + \ldots\ldots$

Verwandelt man hienach jeden dieser Brüche in eine Reihe und ordnet solche nach h, so wird

$$[r]!\,1^{-r;h} = \left.\begin{array}{l} + \quad r^r \\ - r_1(r-1)^r \\ + r_2(r-2)^r \\ \ldots\ldots \\ \pm r_2 \quad 2^r \\ \mp r_1 \quad 1 \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} + \quad r^{r+1} \\ - r_1(r-1)^{r+1} \\ + r_2(r-2)^{r+1} \\ \ldots\ldots \\ \pm r_2 \quad 2^{r+1} \\ \mp r_1 \quad 1 \end{array}\right| h + \ldots + \left.\begin{array}{l} \quad r^{r+n} \\ - r_1(r-1)^{r+n} \\ + r_2(r-2)^{r+n} \\ \ldots\ldots \\ \pm r_2 \quad 2^{r+n} \\ \mp r_1 \quad 1 \end{array}\right| h^n + \ldots\ldots$$

Vergleicht man diese Reihe mit

$$1^{-r;h} = {}^{-r}F + {}^{-r}F_1 h + \ldots + {}^{-r}F_n h^n + \ldots$$

so erhält man folgende unabhängige Koeffizientengleichung:

$$[r]!\,{}^{-r}F_n = r^{r+n} - r_1(r-1)^{r+n} + r_2(r-2)^{r+n} - r_3(r-3)^{r+n} + \ldots \mp r_3 3^{r+n} \pm r_2 2^{r+n} \mp r_1,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades r gelten.

Wegen noch anderer Ausdrücke für ${}^{-r}F_n$ s. m. §. 787. (*III*) und (*IV*).

§. 522.

Zusatz. Für $n = 0$ wird ${}^{-r}F = 1$, daher

$$(I)\quad [r]! = r^r - r_1(r-1)^r + r_2(r-2)^r - r_3(r-3)^r + \dots \mp r_3 3^r \pm r_2 2^r \mp r_1,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, und die unteren für ein ungerades r gelten.

Hienach findet man auch, wenn m eine positive ganze Zahl und $m > r$ ist,

$$(II)\quad [r]! = m^r - r_1(m-1)^r + r_2(m-2)^r - r_3(m-3)^r + \dots \mp r_1(m-r+1)^r \pm 1.(m-r)^r.$$

Denn man setze in der Entwickelung §. 39. (IX) $n = r$, so verschwinden alle Glieder derselben bis auf das letzte Glied. Dieses Glied ist aber nach $[I] = [r]!$ woraus die Richtigkeit des vorstehenden Satzes folgt.

Setzt man in (II) $r = n - 1$ und $m = n$, so erhält man die von **Lagrange** gefundene Reihe. (*Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin, année* 1771. *Démonstration d'un Théoreme nauveau, par* d e l a G r a n g e, *pag.* 133.)

§. 523.

Zur Vergleichung der Koeffizienten mit positiven und negativen Exponenten setze man zur Abkürzung

$${}^{r}F_n = \alpha_n \text{ und } {}^{-r}F_n = \beta_n.$$

Nun ist §. 515. (LXIV)

$1 = (1 + rh) . 1^{r|h} . 1^{-r|-h}$, oder, wenn man nach §. 517 und 519. die entsprechenden Werthe setzt,

$$1 = (1 + rh)(1 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \dots)(1 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 + \dots)$$

$$1^{r|h} . 1^{-r|h} = 1 + \begin{array}{r|r|r|r|l} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_n & \\ -\beta_1 & -\alpha_1\beta_1 & -\alpha_2\beta_1 & -\alpha_{n-1}\beta_1 & \\ & +\beta_2 & +\alpha_1\beta_2 & +\alpha_{n-2}\beta_2 & \\ & & -\beta_3 & \dots\dots & \\ & & & \pm\beta_n & \end{array} \quad h + \dots h^2 + \dots h^3 + \dots + \dots h^n + \dots$$

(In der Vorlage: $1 + \alpha_1 \mid h + \alpha_2 \mid h^2 + \alpha_3 \mid h^3 + \dots + \alpha_n \mid h^n + \dots$, die Zeilen darunter spaltenweise wie oben.)

oder, wenn man

$$K_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 - \dots \pm \beta_n \text{ setzt,}$$

$$1^{r|h} . 1^{-r|h} = 1 + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \dots + K_n h^n + \dots \text{ also}$$

$$1 = (1 + rh)(1 + K_1 h + K_2 h^2 + \dots + K_n h^n + \dots), \text{ oder}$$

$$1 = 1 + \begin{array}{r|r|r|} K_1 & K_2 & K_n \\ +r & +rK_1 & +rK_{n-1} \\ & +r & +rK_{n-2} \\ & & \dots\dots \\ & & +r \end{array}$$

(In der Vorlage: $1 = 1 + K_1 \mid h + K_2 \mid h^2 + \dots + K_n \mid h^n + \dots$ daher §. 52.)

$$0 = K_1 + r$$

$$0 = K_2 + rK_1 + r \text{ und überhaupt}$$

$$0 = K_n + rK_{n-1} + rK_{n-2} + rK_{n-3} + \dots + r, \text{ also auch}$$

$$0 = K_{n+1} + rK_n + rK_{n-1} + rK_{n-2} + \dots + r.$$

Von dieser Reihe die unmittelbar darüber stehende abgezogen, giebt

$$o = K_{n+1} + (r-1)\,K_n, \text{ also hienach, mit Ausnahme von } n = 1,$$

$$\begin{array}{lll} o = K_1 + r & \text{oder} & K_1 = -r \\ o = K_2 + (r-1)\,K_1 & & K_2 = +r\,(r-1) \\ o = K_3 + (r-1)\,K_2 & & K_3 = -r\,(r-1)^2 \\ o = K_4 + (r-1)\,K_3 & & K_4 = +r\,(r-1)^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

und überhaupt $K_n = \pm\, r\,(r-1)^{n-1}$, folglich

$$\pm\, r\,(r-1)^{n-1} = \alpha_n - \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 - \ldots \mp \alpha_1\beta_{n-1} \pm \beta_n, \text{ oder}$$

$$r\,(r-1)^{n-1} = \beta_n - \alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_2\beta_{n-2} - \ldots \mp \alpha_{n-1}\beta_1 \pm \alpha_n, \text{ oder}$$

$$(I)\quad r\,(r-1)^{n-1} = {}^{-r}F_n - {}^{r}F_1 \,.\, {}^{-r}F_{n-1} + {}^{r}F_2 \,.\, {}^{-r}F_{n-2} - \ldots \mp {}^{r}F_{n-1} \,.\, {}^{-r}F_1 \pm {}^{r}F_n,$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades n gelten.

Hienach wird, mit Ausnahme von $n = o$,

$$\begin{aligned} 1 &= {}^{-r}F \\ r &= {}^{-r}F_1 - {}^{r}F_1 \\ r\,(r-1) &= {}^{-r}F_2 - {}^{r}F_1 \,.\, {}^{-r}F_1 + {}^{r}F_2 \\ r\,(r-1)^2 &= {}^{-r}F_3 - {}^{r}F_1 \,.\, {}^{-r}F_2 + {}^{r}F_2 \,.\, {}^{-r}F_1 - {}^{r}F_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

Eine zweite Vergleichung kann man auf folgende Weise erhalten.

Es ist (§. 515. XLII.) $1 = 1^{r+1;-h} \,.\, 1^{-r;+h}$, oder, wenn man nach §. 517 und 519. die entsprechenden Werthe, und ${}^{r+1}F_n = a_n$ setzt:

$$1 = (1 - a_1 h + a_2 h^2 - a_3 h^3 + \ldots)\,(1 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 + \ldots)$$

$$1 = 1 \begin{array}{l} - a_1 \\ + \beta_1 \end{array}\left|\, h \begin{array}{l} + a_2 \\ - a_1\beta_1 \\ + \beta_2 \end{array}\right|\, h^2 - \ldots \begin{array}{l} \pm a_n \\ \mp a_{n-1}\beta_1 \\ \pm a_{n-2}\beta_2 \\ \ldots\ldots \\ + \beta_n \end{array}\left|\, h^n \mp \ldots \right. \text{ daher §. 52.}$$

$$o = \beta_n - a_1\beta_{n-1} + a_2\beta_{n-2} - a_3\beta_{n-3} + \ldots \mp a_{n-1}\beta_1 \pm a_n,$$

oder auch,

$$(II)\quad o = {}^{-r}F_n - {}^{r+1}F_1 \,.\, {}^{-r}F_{n-1} + {}^{r+1}F_2 \,.\, {}^{-r}F_{n-2} - {}^{r+1}F_3 \,.\, {}^{-r}F_{n-3} + \ldots \pm {}^{r+1}F_n.$$

Hienach wird

$$\begin{aligned} o &= {}^{-r}F_1 - {}^{r+1}F_1 \\ o &= {}^{-r}F_2 - {}^{r+1}F_1 \,.\, {}^{-r}F_1 + {}^{r+1}F_2 \\ o &= {}^{-r}F_3 - {}^{r+1}F_1 \,.\, {}^{-r}F_2 + {}^{r+1}F_2 \,.\, {}^{-r}F_1 - {}^{r+1}F_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

Hienach den Werth von $\beta_n = {}^{-r}F_n$ durch eine unabhängige Koeffizientengleichung (§. 496.) auszudrücken s. m. §. 879.

§. 524.

§. 524.

Nach §. 512. (XIV) erhält man $a^{r+1;1} = a \,.\, a^{r;1} + r\, a^{r;1}$, oder $a \,.\, a^{r;1} = a^{r+1;1} - r \,.\, a^{r;1}$ [I]. Nun ist $a^{2;1} = a(a+1) = a^2 + a$, oder auch $a^2 = a^{2;1} - a^{1;1}$. Mit a multiplizirt, giebt $a^3 = a \,.\, a^{2;1} - a \,.\, a^{1;1}$, oder nach [$I$] $a^3 = a^{3;1} - 3\,a^{2;1} + a^{1;1}$.

Hier wieder durchgängig mit a multiplizirt und den Satz [I] angewandt, giebt $a^4 = a^{4;1} - 6\,a^{3;1} + 7\,a^{2;1} - a^{1;1}$ u. s. w. Hienach kann man setzen:

$$a^r = {}^rA\, a^{r;1} - {}^rA_1\, a^{r-1;1} + {}^rA_2\, a^{r-2;1} - \ldots \pm {}^rA_n\, a^{r-n;1} \mp {}^rA_{n+1}\, a^{r-1-n;1} \pm \ldots \quad [II]$$

wo ${}^rA$; ${}^rA_1$; ${}^rA_2$; .... noch näher zu bestimmende Koeffizienten und Funkzionen von r sind. Die oberen Zeichen gelten für ein gerades, die unteren für ein ungerades r.

Diesen Ausdruck durchgängig mit a multiplizirt und den Satz [I] angewandt, giebt

$$a^{r+1} = {}^rA\, a^{r+1;1} \begin{array}{l} - r \,.\, {}^rA \\ - {}^rA_1 \end{array}\Bigg|\, a^{r;1} \begin{array}{l} + (r-1) \,.\, {}^rA_1 \\ + {}^rA_2 \end{array}\Bigg|\, a^{r-1;1} - \ldots \begin{array}{l} \mp (r-n) \,.\, {}^rA_n \\ \mp {}^rA_{n+1} \end{array}\Bigg|\, a^{r-n;1} \pm \ldots \quad [III]$$

In [II] werde $r+1$ statt r gesetzt, dies giebt:

$$a^{r+1} = {}^{r+1}A\, a^{r+1;1} - {}^{r+1}A_1\, a^{r;1} + \ldots \mp {}^{r+1}A_{n+1}\, a^{r-n;1} \pm \ldots$$

Diese Reihe mit [III] nach §. 52. verglichen, giebt nachstehende Koeffizientengleichung:

$$(I) \quad {}^{r+1}A_{n+1} = {}^rA_{n+1} + (r-n) \,.\, {}^rA_n.$$

In [II] werde $\frac{a}{h}$ statt a gesetzt und dann durchgängig mit h^r multiplizirt, so erhält man

$$a^r = {}^rA \left(\frac{a}{h}\right)^{r;1} h^r - {}^rA_1 \left(\frac{a}{h}\right)^{r-1;1} h^{r-1} h \ldots \pm {}^rA_n \left(\frac{a}{h}\right)^{r-n;1} h^{r-n} h^n \mp \ldots$$

Nach §. 512. (VIII) ist aber $a^{n;h} = \left(\frac{a}{h}\right)^{n;1} h^n$, daher

$$(II) \quad a^r = {}^rA\, a^{r;h} - {}^rA_1\, a^{r-1;h} h + {}^rA_2\, a^{r-2;h} h^2 - \ldots \pm {}^rA_n\, a^{r-n;h} h^n \mp \ldots$$

Die Koeffizienten dieses Ausdrucks, nach welchem jede Potenz in eine Reihe von Faktorenfolgen aufgelöst werden kann, lassen sich nun leicht finden. Denn es wird für $h = 0$, in (II), $a^r = {}^rA\, a^{r;0}$, oder weil $a^{r;0} = a^r$ ist, so wird ${}^rA = 1$, also

$$1 = A = {}^1A = {}^2A = {}^3A = \ldots \quad [IV].$$

Für $r = 0$ in (II) wird

$$a^0 = A\, a^{0;h} - A_1\, a^{-1;h} h + A_2\, a^{-2;h} h^2 - \ldots$$

oder weil $a^0 = a^{0;h} = 1$ und $A = 1$ ist,

$$0 = -A_1\, a^{-1;h} + A_2\, a^{-2;h} h - A_3\, a^{-3;h} h^2 + \ldots$$

Für $h = 0$ wird hienach

$$A_1 = 0;\ A_2 = 0;\ A_3 = 0;\ A_4 = 0;\ \ldots \quad [V].$$

Nach (I) ist nun mit Anwendung der Sätze [IV] und [V]

für $r = 0$; ${}^1A_{n+1} = A_{n+1} - n\,A_n$, also

$$\begin{aligned} {}^1A_1 &= A_1 + 0 = 0; \\ {}^1A_2 &= A_2 - A_1 = 0; \\ {}^1A_3 &= A_3 - 2A_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Für $r = 1$ wird ${}^2A_{n+1} = {}^1A_{n+1} + (1-n)\,{}^1A_n$; also

$$
\begin{aligned}
{}^2A_1 &= {}^1A_1 + {}^1A = 0 + 1 = 1;\\
{}^2A_2 &= {}^1A_2 + 0 = 0;\\
{}^2A_3 &= {}^1A_3 - {}^1A_2 = 0;
\end{aligned}
$$

. . . .

Für $r = 2$ wird ${}^3A_{n+1} = {}^2A_{n+1} + (2-n)\,{}^2A_n$; also

$$
\begin{aligned}
{}^3A_1 &= {}^2A_1 + 2.{}^2A = 1 + 2 = 3;\\
{}^3A_2 &= {}^2A_2 + {}^2A_1 = 0 + 1 = 1;\\
{}^3A_3 &= {}^2A_3 + 0 = 0;\\
{}^3A_4 &= {}^2A_4 + {}^2A_3 = 0;
\end{aligned}
$$

. . . .

Für $r = 3$ wird ${}^4A_{n+1} = {}^3A_{n+1} + (3-n)\,{}^3A_n$; also

$$
\begin{aligned}
{}^4A_1 &= {}^3A_1 + 3.{}^3A = 3 + 3 = 6;\\
{}^4A_2 &= {}^3A_2 + 2.{}^3A_1 = 1 + 6 = 7;\\
{}^4A_3 &= {}^3A_3 + {}^3A_2 = 0 + 1 = 1;\\
{}^4A_4 &= {}^3A_4 + 0 = 0;
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Hienach ist folgende Tafel gebildet, welche leicht, so weit man will, fortgesetzt werden kann, weil jede Zahl derselben mit Hülfe der unmittelbar darüber befindlichen Zahl und der links neben dieser stehenden, nach (I) gefunden wird.

r	${}^rA$	${}^rA_1$	${}^rA_2$	${}^rA_3$	${}^rA_4$	${}^rA_5$	${}^rA_6$	${}^rA_7$	${}^rA_8$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	6	7	1	0	0	0	0	0
5	1	10	25	15	1	0	0	0	0
6	1	15	65	90	31	1	0	0	0
7	1	21	140	350	301	63	1	0	0
8	1	28	266	1050	1701	966	127	1	0
9	1	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1
10	1	45	750	5880	22827	42525	34105	9330	511

Wollte man z. B. die Potenz a^5 in eine Reihe von Faktorenfolgen auflösen, so erhält man

$$a^5 = {}^5A\,a^{5|h} - {}^5A_1\,a^{4|h}\,h + {}^5A_2\,a^{3|h}\,h^2 - {}^5A_3\,a^{2|h}\,h^3 + {}^5A_4\,a^{1|h}\,h^4$$

oder nach vorstehender Tafel

$$a^5 = 1\,a^{5|h} - 10\,a^{4|h}\,h + 25\,a^{3|h}\,h^2 - 15\,a^{2|h}\,h^3 + a^{1|h}\,h^4.$$

Die Uebereinstimmung der Koeffizienten in vorstehender Tafel mit den Koeffizienten der Faktorenfolgen mit negativen Exponenten (§. 519.) läßt sich auf folgende Art finden. Nach (I) ist ${}^{r}A_{n+1} = {}^{r+1}A_{n+1} - (r-n)\,{}^{r}A_{n}$. Hierin zuerst $n-1$ statt n, und dann $r+n-1$ statt r gesetzt, giebt

$${}^{r+n-1}A_n = {}^{r+n}A_n - r\,{}^{r+n-1}A_{n-1} \quad [VI].$$

Setzt man nun ${}^{r+n}A_n = {}^{-r}P_n$, so wird ${}^{r+n-1}A_n = {}^{1-r}P_n$ und ${}^{r+n-1}A_{n-1} = {}^{-r}P_{n-1}$. Diese Werthe in $[VI]$ gesetzt, giebt:

${}^{1-r}P_n = {}^{-r}P_n - r\,{}^{-r}P_{n-1}$ welches die §. 519. (I) gefundene Koeffizientengleichung für Faktorenfolgen mit negativen Exponenten ist, daher wird $P = F$, also ganz allgemein

$$(III) \quad {}^{r+n}A_n = {}^{-r}F_n.$$

§. 525.

Zur leichtern Vergleichung der Faktorenfolgen mit den Binomialkoeffizienten ist:

(I) $1^{n|1} = n!$

(II) $a^{n|h} = n!\,h^n\left(\frac{a}{h}+n-1\right)_n$, oder $a^{n|1} = n!\,(a+n-1)_n$

(III) $a^{n|-h} = n!\,h^n\left(\frac{a}{h}\right)_n$, oder $a^{n|-1} = n!\,a_n$

(IV) $a^{-n|h} = \frac{1}{n!\,h^n\left(\frac{a}{h}-1\right)_n}$, oder $a^{-n|1} = \frac{1}{n!(a-1)_n}$

(V) $a^{-n|-h} = \frac{1}{n!\,h^n\left(\frac{a}{h}+n\right)_n}$, oder $a^{-n|-1} = \frac{1}{n!(a+n)_n}$.

Von der Richtigkeit dieser Sätze überzeugt man sich leicht durch unmittelbare Entwickelung.

Nun werde $ah - nh + h$ statt a in (II); ah statt a in (III); $ah + h$ statt a in (IV) und $ah - nh$ statt a in (V) gesetzt, so erhält man:

(VI) $a_n = \frac{(ah-nh+h)^{n|h}}{n!\,h^n} = \frac{(a-n+1)^{n|1}}{n!}$

(VII) $a_n = \frac{(ah)^{n|-h}}{n!\,h^n} = \frac{a^{n|-1}}{n!}$

(VIII) $a_n = \frac{1}{n!\,h^n\,(ah+h)^{-n|h}} = \frac{1}{n!\,(a+1)^{-n|1}}$

(IX) $a_n = \frac{1}{n!\,h^n\,(ah-nh)^{-n|-h}} = \frac{1}{n!\,(a-n)^{-n|-1}}$.

In (VI) und (VII) werde $\frac{a}{h}$ statt a gesetzt, so findet man

(X) $\left(\frac{a}{h}\right)_n = \frac{(a-nh+h)^{n|h}}{n!\,h^n} = \frac{a^{n|-h}}{n!\,h^n}$.

Setzt man in (VII) für $a^{n|-1}$ seinen Werth nach §. 516. (V), so findet man:

(XI) $a_n = \frac{1}{n!}\left[a^n - {}^{n}F_1\,a^{n-1} + {}^{n}F_2\,a^{n-2} - {}^{n}F_3\,a^{n-3} + \ldots \mp {}^{n}F_{n-1}\,a\right]$.

Hienach wird

$$a_2 = \frac{1}{2!}\,[a^2 - {}^2F_1\,a]$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}\,[a^3 - {}^3F_1\,a^2 + {}^3F_2\,a]$$

$$a_4 = \frac{1}{4!}\,[a^4 - {}^4F_1\,a^3 + {}^4F_2\,a^2 - {}^4F_3\,a]$$

u. s. w.

§. 526.

Nach §. 41. (XXV) erhält man, wenn $\alpha = a - 1$, $\beta = b$ und $m = r$ gesetzt wird

$$(a+b+r-1)_r = (a+r-1)_r + (a+r-2)_{r-1}b_1 + (a+r-2)_{r-2}(b+1)_2 + \ldots + a_1(b+r-2)_{r-1} + 1(b+r-1)_r.$$

Nach §. 525. (II) ist aber $(a+r-1)_r = \frac{a^{r|1}}{r!}$, also $(a+r-2)_{r-1} = \frac{a^{r-1|1}}{(r-1)!}$ u. s. w., daher

$$\frac{(a+b)^{r|1}}{r!} = \frac{a^{r|1}}{r!} + \frac{a^{r-1|1}}{(r-1)!}\,\frac{b^{1|1}}{1!} + \frac{a^{r-2|1}}{(r-2)!}\,\frac{b^{2|1}}{2!} + \ldots + 1\,.\,\frac{b^{r|1}}{r!},$$

oder durchgängig mit $r!$ multiplizirt und die entstehenden Koeffizienten als Binomialkoeffizienten ausgedrückt, giebt

$$(a+b)^{r|1} = a^{r|1} + r_1\,a^{r-1|1}\,b^{1|1} + r_2\,a^{r-2|1}\,b^{2|1} + r_3\,a^{r-3|1}\,b^{3|1} + \ldots + r_1\,a^{1|1}\,b^{r-1|1} + b^{r|1}.$$

Hierin $\frac{a}{h}$ statt a und $\frac{b}{h}$ statt b gesetzt, giebt wegen $\left(\frac{a}{h}\right)^{r|1} = \frac{a^{r|h}}{h^r}$, wenn hienächst durchgängig mit h^r multiplizirt wird,

$$(a+b)^{r|h} = a^{r|h} + r_1\,a^{r-1|h}\,b^{1|h} + r_2\,a^{r-2|h}\,b^{2|h} + r_3\,a^{r-3|h}\,b^{3|h} + \ldots\ldots r_1\,a^{1|h}\,b^{r-1|h} + b^{r|h}.$$

Dieser merkwürdige dem binomischen Lehrsatze ähnliche Ausdruck ist zuerst von **Kramp** (*Analyse des Réfractions astronomiques etc. Strasbourg.* 1799. *p.* 61.) bekannt gemacht worden. Der dortige Beweis ist weitläuftig. Für jeden Werth von r wird dieser Satz §. 635. bewiesen.

§. 527.

Aufgabe. Die Summe der Reihe

$$a^{m|h} + (a+h)^{m|h} + (a+2h)^{m|h} + (a+3h)^{m|h} + \ldots\ldots + (a+nh)^{m|h}$$

zu finden.

Auflösung. Man setze §. 515. (LXVII) $a = a + nh$ und $n = m + 1$, so wird

$$(a+nh)^{m+1|h} - (a+nh-h)^{m+1|h} = (m+1)\,h\,(a+nh)^{m|h}.$$

Ferner setze man $N_n = (a+nh)^{m+1|h}$, so wird $N_{n-1} = (a+nh-h)^{m+1|h}$ und $N_{-1} = (a-h)^{m+1|h}$, daher nach §. 390.

$$y_n = N_n - N_{n-1} = (m+1)\,h\,(a+nh)^{m|h} \text{ und}$$

$$\int y_n = N_n - N_{-1} = (a+nh)^{m+1|h} - (a-h)^{m+1|h}, \text{ oder}$$

$$\int (m+1)\,h\,(a+nh)^{m|h} = (a+nh)^{m+1|h} - (a-h)^{m+1|h},$$

oder wegen §. 361. (I)

$$\int (a+nh)^{m|h} = \frac{(a+nh)^{m+1|h} - (a-h)^{m+1|h}}{(m+1)\,h}.$$

Für $a = h = 1$, $m = 3$ und $n = 4$ wird

$$^4\!\int(1+n)^{3;1} = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 = \frac{5.6.7.8}{4}.$$

§. 528.

Aufgabe. Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{a^{m;h}} + \frac{1}{(a+h)^{m;h}} + \frac{1}{(a+2h)^{m;h}} + \frac{1}{(a+3h)^{m;h}} + \dots + \frac{1}{(a+nh)^{m;h}}$$

zu finden.

Auflösung. Man setze §. 515. (LXVII)
$a = n + nh - h$ und $n = m - 1$, so wird

$$(a+nh)^{1-m;-h} - (a+nh-h)^{1-m;-h} = -(m-1)\,h\,(a+nh-h)^{-m;-h}.$$

Ferner setze man $N_n = (a+nh)^{1-m;-h}$, so wird $N_{n-1} = (a+nh-h)^{1-m;-h}$ und $N_{-1} = (a-h)^{1-m;-h}$, daher nach §. 390.

$$y_n = N_n - N_{n-1} = -(m-1)\,h\,(a+nh-h)^{-m;-h} \text{ und}$$

$$\int y_n = N_n - N_{-1} = (a+nh)^{1-m;-h} - (a-h)^{1-m;-h}, \text{ oder}$$

$$\int -(m-1)\,h\,(a+nh-h)^{-m;-h} = (a+nh)^{1-m;-h} - (a-h)^{1-m;-h}, \text{ oder}$$

$$\int(a+nh-h)^{-m;-h} = \frac{(a-h)^{1-m;-h} - (a+nh)^{1-m;-h}}{(m-1)\,h},$$

oder nach §. 515. (XLI)

$$(I)\ \int\frac{1}{(a+nh)^{m;h}} = \frac{1}{(m-1)\,h}\left[\frac{1}{a^{m-1;h}} - \frac{1}{(a+nh+h)^{m-1;h}}\right].$$

Für $a = 1$; $h = 2$; $m = 3$ und $n = 4$ wird

$$^4\!\int\frac{1}{(1+2n)^{3;2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1^{2;2}} - \frac{1}{11^{2;2}}\right], \text{ oder}$$

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{7.9.11} + \frac{1}{9.11.13} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{143}\right] = \frac{35}{429}.$$

Wird $n = \infty$, so erhält man $\frac{1}{(a+nh+h)^{m-1;h}} = 0$, folglich (§. 355.)

$$(II)\ ^{t}\!\int\frac{1}{(a+nh)^{m;h}} = \frac{1}{(m-1)\,h\,.\,a^{m-1;h}}.$$

